УДК 517.956.223 DOI: 10.14529/mmph230103

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РИКЬЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В.В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: karachik@susu.ru

Аннотация. Определяется элементарное решение полигармонического уравнения и приводятся его свойства. Это элементарное решение совпадает с известными ранее элементарными решениями бигармонического и тригармонического уравнений. Используя введенное элементарное решение, находится интегральное представление решений неоднородного полигармонического уравнения в ограниченной области с гладкой границей. На основе полученного интегрального представления исследуется разрешимость задачи Рикье–Неймана. Сначала определяется понятие функции Грина задачи Рикье–Неймана, а затем доказывается существование так определенной функции Грина. Затем, используя интегральное представление решений полигармонического уравнения и функцию Грина задачи Рикье–Неймана, находится интегральное представление решения задачи Рикье–Неймана в единичном шаре. Приведен пример решения задачи Неймана для уравнения Пуассона с простейшей правой частью, необходимый в дальнейшем.

На основе функции Грина задачи Рикье–Неймана доказана теорема об интегральном представлении решения краевой задачи Рикье–Неймана с граничными данными, интеграл от которых по единичной сфере обращается в нуль. В заключение на основании доказанной теоремы приводится пример вычисления решения задачи Рикье–Неймана с граничными функциями, совпадающими со следами однородных гармонических полиномов на единичной сфере.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение; задача Рикье–Неймана; функция Грина.

Введение. Явный вид функций Грина для разных краевых задач представлен во многих работах. Приведем только некоторые из них. Например, в двухмерном случае, в работе [1], на основании известной гармонической функции Грина представлены функции Грина различных бигармонических задач. Явный вид функции Грина для 3-й краевой задачи был найден в работах [2, 3], а функции Грина в секторе для бигармонического и 3-гармонического уравнений в работах [4, 5]. Исследования задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре можно найти в работах [6, 7]. В них получен явный вид функции Грина. Явное представление функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона получено в статье [8], а в [9] для 3-гармонического уравнения в шаре представлен оператор Грина, действующий на полиномиальные данные.

В связи с бигармоническим уравнением отметим недавние работы [10, 11], посвященные условиям разрешимости некоторых нестандартных задач в шаре для бигармонического уравнения. В качестве наиболее общих результатов по обобщённой задаче Неймана, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях, отметим работу [12]. В статье [13] для бигармонического уравнения в шаре получен явный вид функций Грина задач Навье [14] и Рикье–Неймана. Функция Грина применяется также и для исследования нелокальных уравнений. Например, в работе [15] исследована разрешимость четырех краевых задач для одного нелокального бигармонического уравнения с инволюцией.

Известно [16], что для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $S=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$ при $n\ge 2$ функция Грина имеет вид

$$G_2(x,\xi)=E(x,\xi)-E(x/|x|,|x|\xi),$$

где $E(x,\xi)$ – элементарное решение уравнения Лапласа. Элементарные решения бигармонического и 3-гармонического уравнений – функции $E_4(x,\xi)$ и $E_6(x,\xi)$ – были введены в работах [9, 17, 18]. Кроме того, в этих работах были найдены функции Грина соответствующих задач Дирихле в S. В дальнейшем изложении нам понадобится функция Грина задачи Неймана для уравнения Пуассона в S. Она была построена в работе [19]

$$\mathcal{N}_2(x,\xi)=E_2(x,\xi)-E_0(x,\xi), \tag{1}$$

где гармоническая по $x,\xi\in S$ функция $E_0(x,\xi)$ имеет вид

$$E_0(x,\xi)=\int_0^1\Big(\hat{E}_2\big(x/|x|,t|x|\xi\big)+1\Big)\frac{dt}{t},$$

причем $\hat{E}_2(x,\xi)=\Lambda_x E_2(x,\xi)$. Здесь обозначено $\Lambda u=\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$. Индекс x указывает, что оператор Λ применяется по переменным x. Нетрудно заметить, что $\Lambda u=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}$ на ∂S. Поскольку

$$\hat{E}_2(x,\xi)=-\frac{|x|^2-x\cdot\xi)}{|x-\xi|^n},$$

то функция

$$\hat{E}_2\Big(\frac{x}{|x|},t|x|\xi\Big)=-\frac{1-(x\cdot\xi)t}{(1-2t(x\cdot\xi)+|x|^2|\xi|^2\,t^2)^{n/2}}$$

симметрична и, значит, функция $E_0(x,\xi)$, а следовательно, и функция $\mathcal{N}_2(x,\xi)$ тоже симметричны. Функция $\mathcal{N}_2(x,\xi)$ обладает свойствами [8, теорема 3.1] и [13, теорема 3]

$$\Lambda_x\mathcal{N}_2(x,\xi)=\Lambda_x E_2(x,\xi)-(\Lambda_x E_2)\big(x/|x|,|x|\xi\big)-1,\quad x,\xi\in S, x\neq\xi$$

$$\Lambda_x\mathcal{N}_2(x,\xi)\Big|_{\xi\in\partial S}=-\frac{\partial G_2(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}-1,\quad x\in S,$$

а поэтому верны равенства

$$\int_S\frac{\partial\mathcal{N}_2(x,\xi)}{\partial\nu_x}f(\xi)\,d\xi\Big|_{x\in\partial S}=-\int_S f(\xi)\,d\xi,$$

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\frac{\partial\mathcal{N}_2(x,\xi)}{\partial\nu_x}\psi(\xi)\,ds_\xi\Big|_{x\in\partial S}=\psi(x)\Big|_{\partial S}-\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\psi(\xi)\,ds_\xi.$$

В [13, теорема 3] показано, что для следующей задачи Неймана

$$\Delta u(x)=f(x), x\in S;\quad \frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\Big|_{\partial S}=\psi(x), x\in\partial S$$

при выполненном условии

$$\int_{\partial S}\psi(\xi)\,ds_\xi=\int_S f(\xi)\,d\xi$$

решение записывается в виде

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\mathcal{N}_2(x,\xi)\psi(\xi)\,ds_\xi-\frac{1}{\omega_n}\int_S\mathcal{N}_2(x,\xi)f(\xi)\,d\xi+C.$$

Для полигармонического уравнения задача Неймана исследована в работах [20, 21], а в [22] приведено решение этой задачи.

Элементарное решение. Пусть $m\in\mathbb{N}$. Тогда множество $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ можно разбить на два непересекающихся подмножества $\mathbb{N}_m=\{n\in\mathbb{N}:n>2m>1\}\cup(2\mathbb{N}+1)$ и дополнение к нему $\mathbb{N}_m^c=\{2,4,\ldots,2m\}$. Поскольку множество $\mathbb{N}_m^c$ – конечное, то $\mathbb{N}_m$ – бесконечное. Ясно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c\subset\mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m\subset\mathbb{N}_{m-1}$. Определим элементарное решение m-гармонического уравнения $\Delta^m u=0$ в виде

$$E_{2m}(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m(2,2)_{m-1}}, & n\in\mathbb{N}_m,\\[2ex] \dfrac{(-1)^m|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m^*(2,2)_{m-1}}\Big(\ln|x-\xi|-\sum\limits_{k=1}^{m-n/2}\dfrac{1}{2k}-\sum\limits_{k=n/2}^{m-1}\dfrac{1}{2k}\Big), & n\in\mathbb{N}_m^c.\end{cases}, \tag{2}$$

где $(a,b)_k = a(a+b)\ldots(a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a,b)_0 = 1$, а символ $(a,b)_k^*$ означает, что если среди сомножителей $a,(a+b),\ldots,(a+kb-b)$, входящих в $(a,b)_k$, есть 0, то его следует заменить на 1, например, $(-2,2)_3^* = (-2)\cdot 1\cdot 2 = -4$. Кроме того, если в суммах, входящих в (2), верхний индекс становится меньше нижнего, то сумма считается равной нулю. Заметим, что $(2-n,2)_m = (2-n)(4-n)\ldots(2m-n) \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}_m$ и, значит, первая часть формулы (2) определена корректно.

Справедливы следующие простые утверждения.

Лемма 1. *Функция* $E_{2m}(x,\xi)$ *совпадает с элементарными функциями* $E(x,\xi)$, $E_4(x,\xi)$ *и* $E_6(x,\xi)$ *при* $m=1$, $m=2$ *и* $m=3$ *соответственно.*

Лемма 2. *Симметричная функция* $E_{2m}(x,\xi)$, *определенная при* $x \neq \xi$, *удовлетворяет равенствам*

$$\Delta_\xi E_{2m}(x,\xi) = -E_{2(m-1)}(x,\xi), \quad \Delta_\xi E_2(x,\xi) = 0.$$

Найдем интегральное представление функций $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей ∂D с помощью $E_{2m}(x,\xi)$.

Теорема 1. *Для любой функции* $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$ *справедливо следующее представление:*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \Big(E_{2k+2}(x,\xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} - \frac{\partial E_{2k+2}(x,\xi)}{\partial \nu} \Delta^k u \Big) ds_\xi + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_D E_{2m}(x,\xi) \Delta^m u(\xi)\, d\xi,$$

где $\omega_n = |\partial S|$ *– площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, ν *– внешняя единичная нормаль к* ∂D.

Доказательства этих утверждений опустим.

Пусть $n \geq 3$. В рассуждениях, приводимых ниже, необходима также следующая функция, задаваемая рекуррентно:

$$E_{2k}^r(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E_{2k-2}^r(x,y) E_2(y,\xi)\, dy, \quad k \geq 2,$$

где $E_2^r(x,\xi) = E_2(x,\xi)$. Например,

$$E_4^r(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E_2(x,y) E_2(y,\xi)\, dy, \quad E_6^r(x,\xi) = \frac{1}{\omega_n^2} \int_S E_2(x,\eta) \int_S E_2(\eta,y) E_2(y,\xi)\, dy\, d\eta.$$

Лемма 3. *Функция* $E_{2m}^r(x,\xi)$ *(m > 1) определена при* $\xi, x \in S$, $\xi \neq x$ *и имеет, быть может, особенность при* $\xi = x$ *такую, что* $E_{2m}^r(x,\xi) \leq C|x-\xi|^{3-n}$, *где* C *– некоторая положительная константа. При* $\xi \neq x$ *справедливо равенство* $\Delta E_{2m}^r(x,\xi) = -E_{2m-2}^r(x,\xi)$.

По теореме о стирании особенностей [23] функция $h_{2k}(x,\xi) = E_{2k}(x,\xi) - E_{2k}^r(x,\xi)$ является k-гармонической в S по ξ.

Функция Грина задачи Рикье–Неймана. Задача Рикье–Неймана, сформулированная в [24], состоит в нахождении функции $u \in C^{2m}(S) \cap C^{2m-1}(\bar{S})$, которая является решением следующей граничной задачи для неоднородного полигармонического уравнения

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \varphi_0(\xi), \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \varphi_1(\xi), \ldots, \frac{\partial \Delta^{m-1} u}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \varphi_{m-1}(\xi), \quad \xi \in \partial S. \tag{3}$$

Определение. *Функцию вида*

$$\mathcal{N}_{2m}(x,\xi) = E_{2m}(x,\xi) + g_{2m}^n(x,\xi), \quad m \geq 1,$$

где $g_{2m}^n(x,\xi)$ *–* m*-гармоническая функция по переменным* $x,\xi \in S$ *такая, что*

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\Big|_{\xi \in \partial S} = \ldots = \frac{\partial \Delta_\xi^{m-2} \mathcal{N}_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\Big|_{\xi \in \partial S} = 0, \quad \frac{\partial \Delta_\xi^{m-1} \mathcal{N}_{2m}(x,\xi)}{\partial \nu_\xi}\Big|_{\xi \in \partial S} = (-1)^m,$$

где $x \in S$ *назовем функцией Грина задачи Рикье–Неймана (3).*

Теорема 2. *Функция $\mathcal{N}_{2m}(x,\xi)$ при $\xi, x \in S$ и $m>1$, определяемая рекуррентно равенством*

$$\mathcal{N}_{2m}(x,\xi)=\frac{1}{\omega_n}\Big(\int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x,y)\mathcal{N}_2(y,\xi)\,dy-\frac{1}{\tau_n}\int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x,y)\,dy\cdot\int_S \mathcal{N}_2(y,\xi)\,dy\Big),$$

где $\tau_n=|S|$, а $\mathcal{N}_2(x,y)$ – функция Грина задачи Неймана из (1), является функцией Грина задачи Рикье–Неймана (3). Функция $\mathcal{N}_{2m}(x,\xi)$ обладает свойством

$$\Lambda_x \mathcal{N}_{2k}(x,\xi)\Big|_{x\in\partial S}=0, k>1, \quad \Lambda_x \mathcal{N}_2(x,\xi)\Big|_{x\in\partial S}=-1, \quad \xi\in S.$$

Пример 1. Для нахождения решения задачи Рикье–Неймана с многочленами в граничных условиях или в правой части уравнения необходима следующая формула:

$$\frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{N}_2(x,\xi)|\xi|^{2l}\,d\xi=-\frac{|x|^{2l+2}}{(2l+2)(2l+n)}+\frac{1}{(2l+2)(n-2)},$$

где $l\in\mathbb{N}_0$. Докажем ее. В работе [19, замечание 2] была получена аналогичная формула

$$\frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{N}_2(x,\xi)|\xi|^{2l}\,H_k(\xi)\,d\xi=-\frac{|x|^{2l+2}-(2l+2+k)/k}{(2l+2)(2l+2k+n)}H_k(x), \tag{4}$$

где $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени k, которая не работает в рассматриваемом случае, так как правая часть в ней не определена при $k=0$.

Рассмотрим полную систему однородных степени $k\in\mathbb{N}_0$ ортогональных на ∂S гармонических полиномов $\{H_k^{(i)}(x): i=1,\ldots,h_k, k\in\mathbb{N}_0\}$ [25] такую, что $\int_{\partial S}(H_k^{(i)}(\xi))^2\,ds_\xi=\omega_n$, где h_k – размерность базиса. В [8, теорема 1] установлено, что имеет место равенство

$$\frac{1}{\omega_n}\int_S E_2(x,\xi)|\xi|^{2l}\,H_k(\xi)\,d\xi=-\frac{|x|^{2l+2}\,H_k(x)}{(2l+2)(2l+2k+n)}+\frac{H_k(x)}{(2l+2)(2k+n-2)},$$

где $k\in\mathbb{N}_0$ и $l\in\mathbb{N}_0$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{\omega_n}\int_S E_2(x,\xi)|\xi|^{2l}\,d\xi=-\frac{|x|^{2l+2}}{(2l+2)(2l+n)}+\frac{1}{(2l+2)(n-2)}.$$

В [19, теорема 1] доказано, что при $x\in S$ и $\xi\in\overline{S}$

$$E_0(x,\xi)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+n-2}{k(2k+n-2)}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi),$$

причем приведенный ряд сходится равномерно по ξ. Поэтому имеем

$$\int_S E_0(x,\xi)|\xi|^{2l}\,d\xi=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+n-2}{k(2k+n-2)}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)\int_S H_k^{(i)}(\xi)|\xi|^{2l}\,d\xi=0,$$

и значит, учитывая (1), получаем доказываемую формулу.

Интегральное представление решения. Верно следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть граничные функции задачи обладают гладкостью $\varphi_0\in C(\partial S)$, $\varphi_k\in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ и $\int_{\partial S}\varphi_k(\xi)\,ds_\xi=0$ при $k=1,\ldots,m-1$, а $f=0$. Тогда решение задачи Рикье–Неймана (3) существует и его можно записать в виде*

$$u(x)=\sum_{k=0}^{m-1}u_k[\varphi_k](x)+C, \tag{5}$$

где обозначено

$$u_k[\varphi](x)=\frac{(-1)^k}{\omega_n}\int_{\partial S}\mathcal{N}_{2k+2}^0(x,\xi)\varphi(\xi)\,ds_\xi,$$

$$\mathcal{N}_{2k+2}^0(x,\xi)=\frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{N}_2(x,y)\mathcal{N}_{2k}^0(y,\xi)\,dy, k>0; \quad \mathcal{N}_2^0(x,\xi)=\mathcal{N}_2(x,\xi).$$

Для $(k+1)$-гармонической функции $u_k[\varphi_k](x)$ выполнены условия

$$\Delta u_k[\varphi](x) = u_{k-1}[\varphi](x), \frac{\partial u_k[\varphi]}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = 0, k \in \mathbb{N}; \quad \Delta u_0[\varphi](x) = 0, \frac{\partial u_0[\varphi]}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \varphi(x).$$

Пример 2. Вычислим функции $u_p[H_k](x)$ из формулы (5) при $p \in \mathbb{N}_0$, где $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени $k \in \mathbb{N}$. В этом случае условия теоремы 3 выполнены, поскольку справедливо равенство $\int_{\partial S} H_k(\xi)\, ds_\xi = 0$. В работе [19] было установлено, что при $x \in S$ и $\xi \in \partial S$ верны равенства

$$\mathcal{N}_2(x,\xi) = E(x,\xi) - E_0(x,\xi) = \frac{1}{n-2} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2k+n-2} + \frac{k+n-2}{k(2k+n-2)}\Big)\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi) = \frac{1}{n-2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi),$$

где система гармонических полиномов $\left\{H_k^{(i)}(x)\right\}$, определенная в примере 1, ортогональна на ∂S. Поэтому в силу равномерной сходимости ряда по $\xi \in \partial S$ имеем

$$u_0[H_k](x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S} \mathcal{N}_2(x,\xi) H_k(\xi)\, ds_\xi = \frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_{\partial S} H_k(\xi)\, ds_\xi +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{h_m} H_m^{(i)}(x)\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S} H_m^{(i)}(\xi) H_k(\xi)\, ds_\xi = \frac{1}{k} H_k(x).$$

Вычислим $u_1[H_k](x)$. С помощью (4) при $l = 0$ и предыдущих вычислений найдем

$$u_1[H_k](x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S} \mathcal{N}_4^0(x,\xi) H_k(\xi)\, ds_\xi = -\frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{N}_2(x,y)\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S} \mathcal{N}_2(y,\xi) H_k(\xi)\, ds_\xi\, dy =$$

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{N}_2(x,y) u_0[H_k](y)\, dy = -\frac{1}{k}\frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{N}_2(x,y) H_k(y)\, dy = \frac{1}{k}\frac{|x|^2 - 1 - 2/k}{2(2k+n)} H_k(x).$$

Аналогично в общем случае для $u_p[H_k](x)$ при $p \in \mathbb{N}$ имеем

$$u_p[H_k](x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S} \mathcal{N}_{2p+2}^0(x,\xi) H_k(\xi)\, ds_\xi = -\frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{N}_2(x,y) u_{p-1}[H_k](y)\, dy. \tag{6}$$

Отсюда, используя найденную выше функцию $u_1[H_k](x)$ и формулу (4), получим

$$u_2[H_k](x) = \Big(\frac{|x|^4 - 1 - 4/k}{8k(2k+n)(2k+2+n)} - (k+2)\frac{|x|^2 - 1 - 2/k}{4k^2(2k+n)^2}\Big) H_k(x).$$

Нетрудно убедиться, что 3-гармоническая функция $u_2[H_k](x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u_2[H_k]}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \Big(\frac{(k+4)|x|^4 - k - 4}{8k(2k+n)(2k+2+n)} - (k+2)\frac{(k+2)|x|^2 - k - 2}{4k^2(2k+n)^2}\Big) H_k(x)\Big|_{\partial S} = 0,$$

и поэтому

$$\Delta u_2[H_k] = \Big(\frac{|x|^2}{2k(2k+n)} - \frac{(k+2)}{2k^2(2k+n)}\Big) H_k(x) = u_1[H_k],$$

$$\frac{\partial \Delta u_2[H_k]}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \frac{(k+2)|x|^2 - k - 2}{2k(2k+n)} H_k(x)\Big|_{\partial S} = 0.$$

Кроме того, верны равенства

$$\Delta^2 u_2[H_k] = \frac{1}{k} H_k(x) = u_0[H_k], \quad \frac{\partial \Delta^2 u_2[H_k]}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = H_k(x).$$

Используя (6) и (4), можно последовательно найти любую функцию $u_p[H_k](x)$.

Литература

1. Begehr, H. Biharmonic Green functions / H. Begehr // Le Matematiche. – 2006. – Vol. 61, no. 2. – P. 395–405.

2. Begehr, H. Modified Harmonic Robin Function / H. Begehr, T. Vaitekhovich // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2013. – Vol. 58, Iss. 4. – P. 483–496.

3. Sadybekov, M.A. On an Explicit Form of the Green Function of the Robin Problem for the Laplace Operator in a Circle / M.A. Sadybekov // Advances in Pure and Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 6, no. 3. – P. 163–172.

4. Wang, Y. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector / Y. Wang, L. Ye // Complex Variables Elliptic Equ. – 2013. – Vol. 58, Iss. 1. – P. 7–22.

5. Wang, Y. Tri-harmonic Boundary Value Problems in a Sector / Y. Wang // Complex Variables Elliptic Equ. – 2014. – Vol. 59, Iss. 5. – P. 732–749.

6. Boggio, T. Sulle funzioni di Green d'ordine m / T. Boggio // Rend. Circ. Matem. Palermo. – 1905. – Vol. 20. – P. 97–135.

7. Kalmenov, T.Sh. Green Function Representation for the Dirichlet Problem of the Polyharmonic Equation in a Sphere / T.Sh. Kalmenov, B.D. Koshanov, M.Y. Nemchenko // Complex Var. Elliptic Equ. – 2008. – Vol. 53, Iss. 2. – P. 177–183.

8. Karachik, V.V. On Green’s Function of the Robin Problem for the Poisson Equation / V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov // Advances in Pure and Applied Mathematics. – 2019. – Vol. 10, Iss. 3. – P. 203–214.

9. Карачик, В.В. Полиномиальные решения задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал Сибирского федерального университета. Серия «Математика и физика». – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 527–546.

10. Карачик, В.В. О задаче Дирихле–Рикье для бигармонического уравнения / В.В. Карачик, Б.Т. Торебек // Матем. заметки. – 2017. – Т. 102, № 1. – С. 39–51.

11. Карачик, В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения / В.В. Карачик // Математические труды. – 2016. – Т. 19, № 2. – С. 86–108.

12. Солдатов, А.П. О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана / А.П. Солдатов // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 217–225.

13. Карачик В.В. Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 5. – С. 673–686.

14. Sweers, G. A Survey on Boundary Conditions for the Biharmonic / G. Sweers // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2009. – Vol. 54, Iss. 2. – P. 79–93.

15. Karachik, V. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball / V. Karachik, B. Turmetov, H. Yuan // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, Iss. 7. – P. 1–21.

16. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.

17. Karachik, V.V. Greens Function of Dirichlet Problem for Biharmonic Equation in the Ball / V.V. Karachik // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 64, Iss. 9. – P. 1500–1521.

18. Карачик, В.В. О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, № 1. – С. 71–86.

19. Карачик, В.В. О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона / В.В. Карачик, Б.Х. Турметов // Матем. труды. – 2018. – Т. 21, № 1. – С. 17–34.

20. Бицадзе, А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций / А.В. Бицадзе // Дифференц. ур-ния. – 1988. – Т. 24, № 5. – С. 825–831.

21. Бицадзе, А.В. К задаче Неймана для гармонических функций / А.В. Бицадзе // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311, № 1. – С. 11–13.

22. Карачик, В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана / В.В. Карачик // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 2. – С. 228–238.

23. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

24. Карачик, В.В. Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 653–662.

25. Karachik, V.V. On One Set of Orthogonal Harmonic Polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1998. – Vol. 126, no. 12. – P. 3513–3519.

Поступила в редакцию 10 января 2023 г.

Сведения об авторе

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, старший научный сотрудник, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3077-3595, e-mail: karachikvv@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2023, vol. 15, no. 1, pp. 26–33

DOI: 10.14529/mmph230103

A SOLUTION TO THE RIQUIER–NEYMANN PROBLEM FOR POLYHARMONIC EQUATIONS IN A BALL

V.V. Karachik
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: karachik@susu.ru

Abstract. In this paper, an elementary solution for polyharmonic equations is determined and its properties are given. This elementary solution coincides with previously known elementary solutions of biharmonic and triharmonic equations. Using the elementary solution, an integral representation of the solutions of a non-homogeneous polyharmonic equation in a bounded domain with a smooth boundary is found. Based on the integral representation, the solvability of the Riquier–Neumann problem is investigated. First, the concept of the Green's function of the Riquier–Neumann problem is defined, and then the Green's function is proved. Using the integral representation of the solutions of the polyharmonic equation and the Green's function of the Riquier–Neumann problem, the integral representation of the solution of the Riquier–Neumann problem in a unit ball is found. An example of the solution of the Neumann problem for the Poisson equation with the simplest right-hand side is given, which is necessary in what follows.

On the basis of the Green's function of the Riquier–Neumann problem, a theorem on the integral representation of the solution of the Riquier–Neumann boundary value problem with boundary data, the integral of which over the unit sphere vanishes, is proved. In conclusion, on the basis of the theorem, an example of calculating the solution of the Riquier–Neumann problem with boundary functions coinciding with the traces of homogeneous harmonic polynomials on a unit sphere is given.

Keywords: polyharmonic equation; the Riquier–Neumann problem; Green's function.

References

1. Begehr H. Biharmonic Green Functions. *Le Matematiche*, 2006, Vol. 61, no. 2, pp. 395–405.

2. Begehr H., Vaitekhovich T. Modified Harmonic Robin Function. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2013, Vol. 58, Iss. 4, pp. 483–496. DOI: 10.1080/17476933.2011.625092

3. Sadybekov M.A. On an Explicit Form of the Green Function of the Robin Problem for the Laplace Operator in a Circle. *Adv. Pure Appl. Math.*, 2015, Vol. 6, no. 3, pp. 163–172. DOI: 10.1515/apam-2015-0003

4. Wang Y., Ye L. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2013., Vol. 58, Iss.1, pp. 7–22. DOI: 10.1080/17476933.2010.551199

5. Wang Y. Tri-Harmonic Boundary Value Problems in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2014, Vol. 59, Iss. 5, pp. 732–749. DOI: 10.1080/17476933.2012.759566

6. Boggio T. Sulle funzioni di green d'ordine m. *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1905, Vol. 20, pp. 97–135. DOI: 10.1007/BF03014033

7. Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green Function Representation for the Dirichlet Problem of the Polyharmonic Equation in a Sphere. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2008, Vol. 53, Iss. 2, pp. 177–183. DOI: 10.1080/17476930701671726

8. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On Green's Function of the Robin Problem for the Poisson Equation. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 2019, Vol. 10, Iss. 3, pp. 203–214. DOI: 10.1515/apam-2017-0113

9. Karachik V.V. Polynomial Solutions to Dirihlet Boundary Value Problem for the 3-harmonic Equation in a Ball. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2012, Vol. 5, Iss. 4, pp. 527–546.

10. Karachik V.V., Torebek B.T. On the Dirichlet–Riquier Problem for Biharmonic Equations. *Mathematical Notes*, 2017, Vol. 102, Iss. 1, pp. 31–42. DOI: 10.1134/S0001434617070045

11. Karachik V.V. A Neumann-type Problem for the Biharmonic Equation. *Siberian Advances in Mathematics,* 2017, Vol. 27, Iss. 2, pp. 103–118. DOI: 10.3103/S105513441702002X

12. Soldatov, A.P. On the Fredholm Property and Index of the Generalized Neumann Problem. *Differential Equations*, 2020, Vol. 56, no. 2, pp. 212–220.

13. Karachik V.V. Green's Functions of the Navier and Riquier–Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball. *Differential Equations*, 2021, Vol. 57, no. 5, pp. 654–668.

14. Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2009, Vol. 54, Iss. 2, pp. 79–93. DOI: 10.1080/17476930802657640

15. Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball. *Mathematics*, 2022, Vol. 10, Iss. 7, pp. 1–21. DOI: 10.3390/math10071158

16. Bitsadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1982, 336 p. (in Russ.).

17. Karachik V.V. Greens Function of Dirichlet Problem for Biharmonic Equation in the Ball. *Complex Variables and Elliptic Equations,* 2019, Vol. 64, Iss. 9, pp. 1500–1521. DOI: 10.1080/17476933.2018.1536702

18. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a Ball. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, Vol. 59, no. 1, pp. 66–81. DOI: 10.1134/S0044466919010113

19. Karachik V.V., Turmetov B.Kh. On the Green's Function for the Third Boundary Value Problem. *Siberian Advances in Mathematics*, 2019, Vol. 29, Iss. 1, pp. 32–43. DOI: 10.3103/S1055134419010036

20. Bitsadze A.V. Some Properties of Polyharmonic Functions. *Differ. Equ.*, 1988, Vol. 24, no. 5, pp. 543–548.

21. Bitsadze, A.V. On the Neumann Problem for Harmonic Functions. *Sov. Math. Dokl*., 1990, Vol. 41, no. 2, pp. 193–195.

22. Karachik V.V. On the Arithmetic Triangle Arising from the Solvability Conditions for the Neumann Problem. *Mathematical Notes*, 2014, Vol. 96, Iss. 2, pp. 217–227. DOI: 10.1134/S0001434614070232

23. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow, Nauka Publ., 1981, 512 p.

24. Karachik V.V. Riquier–Neumann Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball. *Differential Equations*, 2018, Vol. 54, no. 5, pp. 648–657.

25. Karachik V.V. On One Set of Orthogonal Harmonic Polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1998, Vol. 126, no. 12, pp. 3513–3519. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-05019-9

Received January 10, 2023

Information about the author

Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3077-3595, e-mail: karachikvv@susu.ru