

## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ОДНОРОДНОЙ КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ С ДВИЖУЩИМИСЯ БЕЗ УСКОРЕНИЯ СМЕЖНЫМИ СТОРОНАМИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

**А.В. Рязских, А.А. Хвостов, Е.А. Соболева, В.И. Рязских**

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация,  
E-mail: ryazhskihav@bk.ru

**Аннотация.** Исследована однородная по теплофизическим характеристикам деформируемая с сохранением подобия 2D-область в виде квадрата. В начальный момент времени две смежные стороны начинают двигаться соответственно в направлении осей абсцисс и ординат с постоянной скоростью, оставаясь эквидистантными двум другим смежным сторонам (неподвижные и движущиеся стороны поддерживаются при различных постоянных температурах). Нелинейная начально-краевая задача с граничными условиями первого рода путем применения специальных координат иммобилизует движущуюся границу области в неподвижную с соответствующей трансформацией исходной начально-краевой задачи для неподвижных границ относительно мультипликативной переменной двух неизвестных функций, которые определены с помощью формулировки дополнительных начально-краевых задач. Решения сформулированных дополнительных задач получены с помощью последовательного применения интегральных синус-преобразований по псевдопространственным переменным. Это позволило записать решение исходной задачи в аналитическом виде с помощью специально сконструированных квадратур. Вычислительный эксперимент показал корректность полученного решения и безусловное выполнение начального условия. Полученные результаты также иллюстрируют качественную адекватность расчётов процессу прогрева квадратной области с движущимися сопряженными границами.

**Ключевые слова:** теплопроводность; движущаяся граница; квадратная область; аналитическое решение; граничные условия 1-го рода.

**Введение.** Интерес к задачам с движущимися границами не ослабевает в связи с многопредметными приложениями: идентификация движущейся границы для обратной задачи теплопроводности [1]; прогнозирование переходной свободной конвекции и тепловой стратификации в резервуарах хранения сжиженных газов в присутствии микропримесей [2, 3]; оценка термического воздействия на защитные ограждения [4]; изменение объема при тепловой обработке в пищевой технологии [5, 6]; повышение эффективности абляционной защиты гиперзвуковых обтекателей летательных аппаратов [7] и т. д. Если ограничиваться переносными характеристиками в практических применениях, то их математические модели формализуются на основе фундаментальных законов Фурье и Фика в виде уравнений в частных производных параболического типа либо их систем с соответствующим набором краевых условий, в том числе и на части или на всей границе, движущейся по произвольному закону с сохранением ее гладкости [8]. В частности, при описании задач с фазовыми переходами на движущейся границе (плавление или кристаллизация) [9] добавляется условие Стефана [10] и формулировка такой задачи переходит в классическую формулировку Стефана.

Только ограниченное число задач с движущимися границами допускает аналитическое решение, к которым относятся в основном классические одномерные задачи Стефана и Неймана [11], а также найденные в последнее время новые решения [12–15], но тоже в одномерной постановке.

В связи с этим актуален поиск новых решений задач для 2D-областей, в которых части границы движутся в разных направлениях.

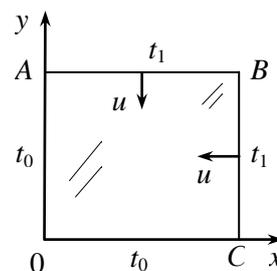


Рис. 1. Расчетная схема области

**Постановка задачи.** Рассматривается однородная по теплофизическим характеристикам (коэффициент температуропроводности  $a = \text{const}$ ) деформируемая с сохранением подобия область  $ABCO$  в декартовой системе координат  $(xOy)$ , для которой  $AB = BC = CO = OA = h_0$  (рис. 1). В начальный момент времени  $\tau = 0$  стороны  $AB$  и  $BC$  начинают двигаться соответственно в направлении осей абсцисс и ординат с постоянной скоростью  $u$ , оставаясь им параллельными, причем локальная температура в каждой точке области одинакова и равна  $t_0 = \text{const}$ , при  $\tau > 0$  сторона  $AO$  и  $OC$  также поддерживается при температуре  $t_0$ , а стороны  $AB$  и  $BC$  при  $t_1 = \text{const}$ .

Изменение локальной температуры  $t(x, y, \tau)$  во внутренних точках рассматриваемой области должно быть определено из следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial t(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right]; \quad (1)$$

$$t(x, y, 0) = t(0, y, \tau) = t(x, 0, \tau) = t_0; \quad (2)$$

$$t(h, y, \tau) = t(x, h, \tau) = t_1; \quad (3)$$

$$h(\tau) = h_0 - u\tau. \quad (4)$$

С помощью относительных переменных  $\theta = a\tau/h_0^2$ ;  $X = x/h_0$ ;  $Y = y/h_0$ ;  $T(X, Y, \theta) = [t(x, y, \tau) - t_0]/(t_1 - t_0)$ ;  $A = uh_0/a$ ;  $H(\theta) = 1 - A\theta$  система (1)–(4) записана в безразмерном виде:

$$\frac{\partial T(X, Y, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 T(X, Y, \theta)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T(X, Y, \theta)}{\partial Y^2}; \quad (5)$$

$$T(X, Y, 0) = T(0, Y, \theta) = T(X, 0, \theta) = 0; \quad (6)$$

$$T[H(\theta), Y, \theta] = T[X, H(\theta), \theta] = 1; \quad (7)$$

$$H(\theta) = 1 - A\theta. \quad (8)$$

Применение координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$  [16]:

$$\alpha = X/(1 - A\theta); \quad \beta = Y/(1 - A\theta); \quad \gamma = \theta$$

иммобилизует движущиеся стороны области и трансформирует систему (5)–(8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = & -\frac{A}{1 - A\gamma} \left[ \frac{\partial \Omega(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Omega(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} \right] + \\ & + \frac{A}{(1 - A\gamma)^2} \left[ \frac{\partial^2 \Omega(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Omega(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta^2} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Omega(\alpha, \beta, 0) = \Omega(0, \beta, \gamma) = \Omega(\alpha, 0, \gamma) = 0, \quad (10)$$

$$\Omega(1, \beta, \gamma) = \Omega(\alpha, 1, \gamma) = 1, \quad (11)$$

где

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = T[X(\alpha, \beta, \gamma), Y(\alpha, \beta, \gamma), \theta(\alpha, \beta, \gamma)].$$

Решение. Пусть

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = q(\alpha, \beta, \gamma)W(\alpha, \beta, \gamma), \quad (12)$$

где  $q = q(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $W = W(\alpha, \beta, \gamma)$  – функции, которые будут определены ниже. С помощью (12) уравнение (9) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \gamma} = & \frac{1}{(1 - A\gamma)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{(1 - A\gamma)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \left[ -\frac{\alpha A}{1 - A\gamma} + \frac{1}{(1 - A\gamma)^2} \frac{2}{q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right] \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \\ & + \left[ -\frac{\beta A}{1 - A\gamma} + \frac{1}{(1 - A\gamma)^2} \frac{2}{q} \frac{\partial q}{\partial \beta} \right] \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{1}{q} \left[ -\frac{\alpha A}{1 - A\gamma} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{1}{(1 - A\gamma)^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha^2} \right] W + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{q}\left[-\frac{\beta A}{1-A\gamma}\frac{\partial q}{\partial\beta}+\frac{1}{(1-A\gamma)^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\beta^2}\right]W. \quad (13)$$

Подстановка  $q(\alpha, \beta, \gamma)$  как координатный мультипликатор

$$q(\alpha, \beta, \gamma) = q_1(\alpha, \gamma)q_2(\beta, \gamma),$$

где  $q_1(\alpha, \gamma)$ ,  $q_2(\beta, \gamma)$  идентифицируются соответственно из условий

$$-\frac{\alpha A}{1-A\gamma} + \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \frac{2}{q_1} \frac{\partial q_1}{\partial\alpha} = 0, \quad -\frac{\beta A}{1-A\gamma} + \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \frac{2}{q_2} \frac{\partial q_2}{\partial\beta} = 0,$$

откуда

$$q_1(\alpha, \gamma) = C_1(\gamma) \exp\left[\frac{1}{4}A\alpha^2(1-A\gamma)\right], \quad q_2(\beta, \gamma) = C_2(\gamma) \exp\left[\frac{1}{4}A\beta^2(1-A\gamma)\right],$$

где константы интегрирования  $C_1(\gamma)$  и  $C_2(\gamma)$  определяются из выполнения тождеств

$$-\frac{\alpha A}{1-A\gamma} \frac{\partial q_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \frac{\partial^2 q_1}{\partial\alpha^2} \equiv 0, \quad -\frac{\beta A}{1-A\gamma} \frac{\partial q_2}{\partial\beta} + \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \frac{\partial^2 q_2}{\partial\beta^2} \equiv 0,$$

что обеспечивается, когда  $C_1(\gamma) = C_2(\gamma) = (1-A\gamma)^{-1/2}$ .

Таким образом соотношение (12) принимает структурированный вид

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{W(\alpha, \beta, \gamma)}{1-A\gamma} \exp\left[\frac{1}{4}A(1-A\gamma)(\alpha^2 + \beta^2)\right]. \quad (14)$$

С помощью (14) из системы (9)–(11) следует начально-краевая задача для  $W(\alpha, \beta, \gamma)$ :

$$\frac{\partial W}{\partial\gamma} = \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial\beta^2} \right); \quad (15)$$

$$W(\alpha, \beta, 0) = W(\alpha, 0, \gamma) = W(0, \beta, \gamma) = 0; \quad (16)$$

$$W(1, \beta, \gamma) = F_1(\beta, \gamma), \quad W(\alpha, 1, \gamma) = F_2(\alpha, \gamma), \quad (17)$$

где

$$F_1(\beta, \gamma) = (1-A\gamma) \exp\left[-\frac{1}{4}A(1-A\gamma)(1+\beta^2)\right],$$

$$F_2(\alpha, \gamma) = (1-A\gamma) \exp\left[-\frac{1}{4}A(1-A\gamma)(\alpha^2+1)\right].$$

Исходная функция  $W(\alpha, \beta, \gamma)$  представлена как суперпозиция функций  $W_1(\alpha, \beta, \gamma)$  и  $W_2(\alpha, \beta, \gamma)$ , т. е.

$$W(\alpha, \beta, \gamma) = W_1(\alpha, \beta, \gamma) + W_2(\alpha, \beta, \gamma), \quad (18)$$

где  $W_1(\alpha, \beta, \gamma)$  и  $W_2(\alpha, \beta, \gamma)$  являются решениями следующих начально-краевых задач:

$$\frac{\partial W_1(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\gamma} = \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \left[ \frac{\partial^2 W_1(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 W_1(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\beta^2} \right], \quad (19)$$

$$W_1(\alpha, \beta, 0) = W_1(\alpha, 0, \gamma) = W_1(0, \beta, \gamma) = 0; \quad (20)$$

$$W_1(1, \beta, \gamma) = F_1(\beta, \gamma), \quad W_1(\alpha, 1, \gamma) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial W_2(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\gamma} = \frac{1}{(1-A\gamma)^2} \left[ \frac{\partial^2 W_2(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 W_2(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial\beta^2} \right], \quad (22)$$

$$W_2(\alpha, \beta, 0) = W_2(\alpha, 0, \gamma) = W_2(0, \beta, \gamma) = 0; \quad (23)$$

$$W_2(1, \beta, \gamma) = 0, \quad W_2(\alpha, 1, \gamma) = F_2(\alpha, \gamma). \quad (24)$$

Для нахождения  $W_1(\alpha, \beta, \gamma)$  вновь воспользуемся суперпозицией неизвестных функций

$$W_1(\alpha, \beta, \gamma) = V_1(\alpha, \beta, \gamma) + U_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad (25)$$

где  $U_1(\alpha, \beta, \gamma)$  представим как

$$U_1(\alpha, \beta, \gamma) = U_1^*(\alpha, \beta, \infty)W_1(1, \beta, \gamma), \quad (26)$$

причем  $U_1^*(\alpha, \beta, \infty) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} U_1^*(\alpha, \beta, \gamma)$ , а  $U_1^*(\alpha, \beta, \gamma)$  есть решение вспомогательной задачи

$$\frac{\partial U_1^*(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 U_1^*(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U_1^*(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta^2}, \quad (27)$$

$$U_1^*(\alpha, \beta, 0) = U_1^*(\alpha, 0, \gamma) = U_1^*(0, \beta, \gamma) = U_1^*(\alpha, 1, \gamma) = 0; \quad (28)$$

$$U_1^*(1, \beta, \gamma) = 1. \quad (29)$$

Поскольку решение (27)–(29)

$$U_1^*(\alpha, \beta, \gamma) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos q_k}{q_k} \right) \left[ \frac{\text{sh}(q_k \alpha)}{\text{sh} q_k} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i \sin(\delta_i \alpha)}{(\delta_i^2 + q_k^2) \cos \delta_i} \exp(-\delta_i^2 \gamma) \right] \sin(q_k \beta), \quad (30)$$

где  $q_k = \pi k$ ,  $\delta_i = \pi i$ ,  $k, i = \overline{1, \infty}$ , то при  $\gamma \rightarrow \infty$  из (30) следует

$$U_1^*(\alpha, \beta, \infty) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos q_k}{q_k} \right) \frac{\text{sh}(q_k \alpha)}{\text{sh} q_k} \sin(q_k \beta). \quad (31)$$

С помощью (25), (26) и (31) система (22)–(24) может быть представлена относительно  $V_1 = V_1(\alpha, \beta, \gamma)$  в виде:

$$(1 - A\gamma)^2 \frac{\partial V_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial \beta^2} - (1 - A\gamma)^2 \frac{\partial U_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \beta^2}; \quad (32)$$

$$V_1(\alpha, \beta, 0) = -U_1^*(\alpha, \beta, \infty)F_1(\beta, \gamma); \quad (33)$$

$$V_1(\alpha, 0, \gamma) = V_1(0, \beta, \gamma) = V_1(\alpha, 1, \gamma) = V_1(1, \beta, \gamma) = 0. \quad (34)$$

Применение конечного интегрального синус-преобразования Фурье по переменной  $\alpha$  к системе (32)–(34)

$$\Phi_1 = \Phi_1(\alpha, \lambda_n, \gamma) = \int_0^1 V_1(\alpha, \beta, \gamma) \sin(\lambda_n \beta) d\beta,$$

$$P_1 = P_1(\alpha, \lambda_n, \gamma) = \int_0^1 U_1(\alpha, \beta, \gamma) \sin(\lambda_n \beta) d\beta,$$

где  $\lambda_n = \pi n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , переводит ее в систему

$$(1 - A\gamma)^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \alpha^2} - \lambda_n^2 \Phi_1 - (1 - A\gamma)^2 \frac{\partial P_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial \alpha^2} - \lambda_n^2 P_1; \quad (35)$$

$$\Phi_1(\alpha, \lambda_n, 0) = - \int_0^1 U_1^*(\alpha, \beta, \infty) F_1(\beta, 0) \sin(\lambda_n \beta) d\beta; \quad (36)$$

$$\Phi_1(\alpha, 0, \gamma) = \Phi_1(0, \beta, \gamma) = \Phi_1(\alpha, 1, \gamma) = \Phi_1(1, \beta, \gamma) = 0. \quad (37)$$

Применение конечного интегрального синус-преобразования Фурье по переменной  $\beta$

$$\Psi_1 = \Psi_1(\mu_m, \lambda_n, \gamma) = \int_0^1 \Phi_1(\alpha, \lambda_n, \gamma) \sin(\mu_m \alpha) d\alpha,$$

$$Q_1 = Q_1(\mu_m, \lambda_n, \gamma) = \int_0^1 P_1(\alpha, \lambda_n, \gamma) \sin(\mu_m \alpha) d\alpha$$

к (35)–(37) генерирует задачу Коши относительно  $\Psi_1$

$$\frac{d\Psi_1}{d\theta} + \frac{\mu_m^2 + \lambda_n^2}{(1 - A\theta)^2} \Psi_1 = - \left[ \frac{dQ_1}{d\theta} + \frac{\mu_m^2 + \lambda_n^2}{(1 - A\theta)^2} Q_1 \right] = L_1(\theta),$$

$$\Psi_1^0(\mu_m, \lambda_n, 0) = - \int_0^1 \int_0^1 U_1^*(\alpha, \beta, \infty) F_1(\beta, 0) \sin(\lambda_n \beta) \sin(\mu_m \alpha) d\alpha d\beta,$$

$$L_1(\theta) = - \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial U_1}{\partial \theta} + \frac{\mu_m^2 + \lambda_n^2}{(1 - A\theta)^2} U_1 \right] \sin(\lambda_n \beta) \sin(\mu_m \alpha) d\alpha d\beta,$$

решение которой

$$\Psi_1(\mu_m, \lambda_n, \theta) = \exp \left[ - \frac{(\mu_m^2 + \lambda_n^2)\theta}{1 - A\theta} \right] \left\{ \Psi_1^0(\mu_m, \lambda_n, 0) + \int_0^1 L_1(\theta) \exp \left[ \frac{(\mu_m^2 + \lambda_n^2)\theta}{1 - A\theta} \right] d\theta \right\}. \quad (38)$$

Оригинал (38)

$$V_1(X, Y, \theta) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_1(\mu_m, \lambda_n, \theta) \sin\left(\frac{\mu_m X}{1 - A\theta}\right) \sin\left(\frac{\lambda_n Y}{1 - A\theta}\right) \quad (39)$$

и в итоге

$$W_1(X, Y, \theta) = U_1^*\left(\frac{X}{1 - A\theta}, \frac{Y}{1 - A\theta}, \infty\right) F_1\left(\frac{Y}{1 - A\theta}, \theta\right) + V_1(X, Y, \theta). \quad (40)$$

Решая систему (22)–(24) аналогичным образом, получим

$$W_2(X, Y, \theta) = U_2^*\left(\frac{X}{1 - A\theta}, \frac{Y}{1 - A\theta}, \infty\right) F_2\left(\frac{X}{1 - A\theta}, \theta\right) + V_2(X, Y, \theta), \quad (41)$$

где

$$U_2^*(\alpha, \beta, \infty) = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos p_l}{p_l} \right) \frac{\text{sh}(p_l \beta)}{\text{sh} p_l} \sin(q_k \alpha), \quad p_l = \pi l;$$

$$V_2(X, Y, \theta) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_2(\mu_m, \lambda_n, \theta) \sin\left(\frac{\mu_m X}{1 - A\theta}\right) \sin\left(\frac{\lambda_n Y}{1 - A\theta}\right);$$

$$\Psi_2(\mu_m, \lambda_n, \theta) = \exp \left[ - \frac{(\mu_m^2 + \lambda_n^2)\theta}{1 - A\theta} \right] \left\{ \Psi_2^0(\mu_m, \lambda_n, 0) + \int_0^1 L_2(\theta) \exp \left[ \frac{(\mu_m^2 + \lambda_n^2)\theta}{1 - A\theta} \right] d\theta \right\};$$

$$\Psi_2^0(\mu_m, \lambda_n, 0) = - \int_0^1 \int_0^1 U_2^*(\alpha, \beta, \infty) F_2(\alpha, 0) (\mu_m \alpha) \sin(\lambda_n \beta) \sin d\alpha d\beta;$$

$$L_2(\theta) = - \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{\mu_m^2 + \lambda_n^2}{(1 - A\theta)^2} U_2 \right] \sin(\lambda_n \beta) \sin(\mu_m \alpha) d\alpha d\beta;$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \theta} = U_2^*(\alpha, \beta, \infty) \left[ -A + \frac{1}{4} A^2 (1 - A\theta) (1 + \alpha^2) \right] \exp \left\{ - \frac{1}{4} [A\alpha^2 (1 - A\theta) + A(1 - A\theta)] \right\}.$$

Таким образом, окончательное решение с учетом (14), (40), (41) таково:

$$T(X, Y, \theta) = \frac{W_1(X, Y, \theta) + W_2(X, Y, \theta)}{1 - A\theta} \exp\left(\frac{A}{4} \cdot \frac{X^2 + Y^2}{1 - A\theta}\right). \quad (42)$$

Результаты расчетов по (42) показаны на рис. 2, которые при безусловном выполнении начального условия иллюстрируют справедливость полученного аналитического решения в квадратах.

**Заключение.** Полученное решение может быть обобщено на случай  $A < 0$ , а также на движение частей границы области в разных направлениях и с разными скоростями. Кроме того, нет никаких ограничений к распространению изложенного подхода для равноускоренного или равнозамедленного движения сторон, а также при наличии источника или стока теплоты.

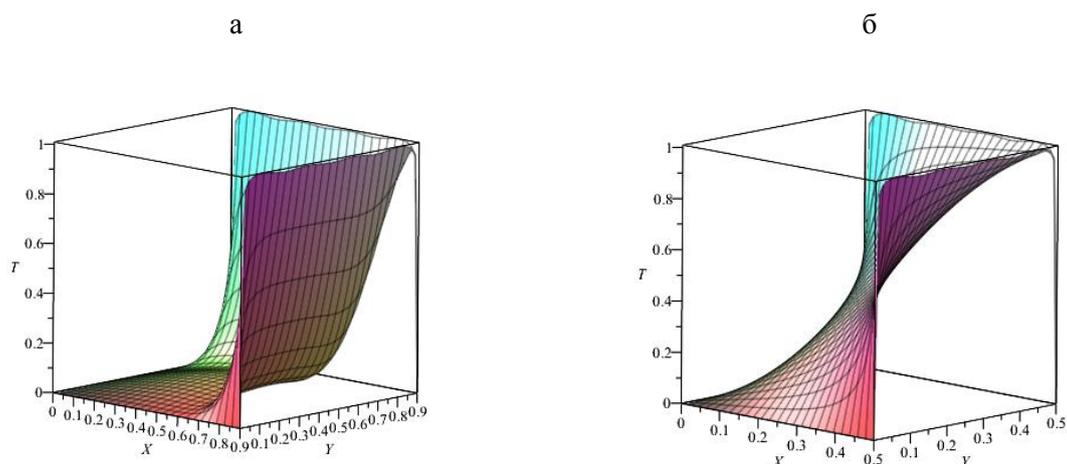


Рис. 2. Температурное поле при  $A=1$  и различных  $\theta$ : а – 0,1; б – 0,5

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору А.В. Богомолову за участие в обсуждении выбора метода решения задачи и поздравляют его с юбилеем.

### Литература

1. Lin, J.-Ch. Moving Boundary Identification for a Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem / J.-Ch. Lin, T. Wei // *Inverse Problems in Science and Engineering*. – 2011. – Vol. 19, Iss. 8. – P. 1139–1154.
2. A Moving-Boundary Based Dynamic Model for Predicting the Transient Free Convection and Thermal Stratification in Liquefied Gas Storage Tank / Z. Duan, H. Sun, C. Cheng *et al.* // *Int. J. of Thermal Sciences*. – 2021. – Vol. 160. – Article 106890.
3. Ryazhskih A.V. Sedimentation of a Low-Concentration Suspension of Stokes Particles in a Stirred Layer with a Movable Free Boundary / A.V. Ryazhskih // *Technical Physics*. – 2019. – Vol. 64. – P. 1082–1089.
4. Sulc, S. Thermal Model for Timber Fire Exposure with Moving Boundary / S. Sulc, V. Smilauer, F. Wald // *Materials*. – 2021. – Vol. 14, Iss. 3. – P. 574–584.
5. Feyissa A.H., Adler-Nissen J., Gernacy K.V. Model of Heat and Mass Transfer with Moving Boundary during Roasting of Meat in Convection-Oven / *Proceedings of the COMSOL Conference, Milan*. – 2009. – Article 168420.
6. Adrover, A. A Non-Isothermal Moving-Boundary Model for Continues and Intermittent Drying of Pears / A. Adrover, C. Venditti, A. Brasiello // *Foods*. – 2020. – Vol. 9, Iss. 11. – P. 1577–1599.
7. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В.С. Авдеевский, Б.М. Галицкий, Г.А. Глебов, В.К. Кошкин. – М.: Машиностроение, 1992. – 518 с.
8. Gupta, S.C. Temperature and Moving Boundary in Two-Phase Freezing due to an Axisymmetric Cold Spot / S.C. Gupta // *Quarterly of applied mathematics*. – 1987. – Vol. 45. – P. 205–222.
9. Crank, J. *Free and Moving Boundary Problems* / J. Crank. – Oxford: Clarendon Press, 1984. – 425 p.
10. Ozisik, M.N. *Heat Conduction* / M.N. Ozisik. – NY: John Wiley & Sons, Inc. – 1993. – 692 p.
11. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
12. Рубин, А.Г. Решение краевых задач нестационарной теплопроводности в области с движущейся границей при наличии источника теплоты / А.Г. Рубин // *Челябинский физико-математический журнал*. – 1994. – Т. 3. – №1(2). – С. 108–111.
13. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М.: Высш. шк., 2001. – 549 с.
14. Власов, П.А. Влияние равномерного движения границы на температурное поле полупространства, подверженного нагреву внешним тепловым потоком / П.А. Власов // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*. – 2014. – № 8. – С. 101–109.

15. Kulish, V. A Non-Field Analytical Method for Heat Transfer Problems through a Moving Boundary / V. Kulish, V. Horak // Scientific Reports. – 2021. – Vol. 11. – Article 18968.

16. Landau, H.G. Heat Conduction in a Melting Solid / H.G. Landau // Quarterly of applied mathematics. – 1950. – Vol. 8, no. 1. – P. 81–94.

Поступила в редакцию 19 октября 2022 г.

### Сведения об авторах

Ряжских Александр Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: ryazhskihav@bk.ru

Хвостов Анатолий Анатольевич – доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: khvtol1974@yandex.ru

Соболева Елена Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: sobol5661@yandex.ru

Ряжских Виктор Иванович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: ryazhskih\_vi@mail.ru

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2023, vol. 15, no. 1, pp. 55–62

DOI: 10.14529/mmph230106

## THE TEMPERATURE PATTERN OF A HOMOGENEOUS SQUARE AREA WITH ADJACENT SIDES MOVING WITHOUT ACCELERATION UNDER BOUNDARY CONDITIONS OF THE FIRST KIND

**A. V. Ryazhskih, A. A. Khvostov, E. A. Soboleva, V. I. Ryazhskih**  
Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation  
E-mail: ryazhskihav@bk.ru

**Abstract.** A square area with homogeneous thermal and physical characteristics, deformed preserving 2-D similarity, is investigated. At the initial moment of time, two adjacent sides start moving respectively towards the abscissa and ordinate axes with constant speed while remaining equidistant to the other two adjacent sides (the fixed and moving sides are kept at different constant temperatures). A nonlinear initial boundary value problem with boundary conditions of the first kind and special coordinates immobilizes the moving boundary of the area into a fixed one with the corresponding transformation of the initial boundary value problem for the fixed boundaries with respect to the multiplicative variable of two unknown functions, which are defined by additional initial boundary values. These were solved by the successive application of integral sine transformations on pseudo-space variables.

This enables the solution of the original problem to be notated analytically using special quadratures. The computational experiment proved the correctness of the solution and the absolute fulfillment of the initial conditions. The results also illustrate the adequacy of the qualitative calculations for the heating process of a quadratic area with moving adjacent boundaries. This approach can be applied to the differently directed motion of adjacent boundaries, to uniformly retarded or uniformly accelerated motion. Considering that Fourier's and Fick's laws are mathematically similar, the solution and its generalization are of practical importance in describing mass transfer processes, such as crystallization or dissolution.

**Keywords:** thermal conductivity; moving boundary; square area; analytical solution; boundary conditions of the first kind.

### References

1. Lin J.-Ch., Wei T. Moving Boundary Identification for a Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2011, Vol. 19, Iss. 8, pp. 1139–1154. DOI: 10.1080/17415977.2011.603084

2. Duan Z., Sun H., Cheng C., Tang W., Xue H. A Moving-Boundary Based Dynamic Model for Predicting the Transient Free Convection and Thermal Stratification in Liquefied Gas Storage Tank. *Int. J. of Thermal Sciences*, 2021, Vol. 160, Article 106890. DOI:°10.1016/j.ijthermalsci.2020.106690
3. Ryazhskikh A.V. Sedimentation of a Low-Concentration Suspension of Stokes Particles in a Stirred Layer with a Movable Free Boundary. *Technical Physics*, 2019, Vol. 64, pp. 1082–1089. DOI:°10.1134/S106378421908019X
4. Sulc S., Smilauer V., Wald F. Thermal Model for Timber Fire Exposure with Moving Boundary. *Materials*, 2021, Vol. 14, Iss. 3, pp. 574–584. DOI:°10.3390/ma14030574
5. Feyissa A.H., Adler-Nissen J., Gernacy K.V. Model of Heat and Mass Transfer with Moving Boundary During Roasting of Meat in Convection-Oven. *Expert from the proceedings of the COMSOL Conference*, Milan. 2009, Article 168420, [www.comsol.ru/paper/6798](http://www.comsol.ru/paper/6798)
6. Adrover A., Venditti C., Brasiello A. A Non-Isothermal Moving-Boundary Model for Continuous and Intermittent Drying of Pears. *Foods*, 2020, Vol. 9, Iss. 11, pp. 1577–1599. DOI: 10.3390/foods9111577
7. Avduevskiy V.S., Galitseyskiy B.M., Glebov G.A., Koshkin V.K. *Osnovy teploperedachi v aviatsionnoy i raketno-kosmicheskoy tekhnike* (Fundamentals of Heat Transfer in Aviation and Rocket and Space Technology). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992, 518p. (in Russ.).
8. Gupta S.C. Temperature and Moving Boundary in Two-Phase Freezing due to an Axisymmetric Cold Spot. *Quarterly of applied mathematics*, 1987, Vol. 45, pp. 205–222. DOI: 10.1090/qam/895094
9. Crank J. Free and moving boundary problems, *Oxford: Clarendon Press*, 1984, 425 p.
10. Ozisik M.N. *Heat Conduction*, NY: John Wiley & Sons, Inc., 1993, 692 p.
11. Karslou G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdykh tel.* (Thermal Conductivity of Solids). Moscow, Nauka Publ., 1964, 487 p. (in Russ.).
12. Rubin A.G. Reshenie kraevykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti v oblasti s dvizhushcheyasya granitsey pri nalichii istochnika teploty (Solution of Boundary Value Problems of Nonstationary Heat Conduction in a Region with a Moving Boundary in the Presence of a Heat Source). *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskii zhurnal*, 1994, Vol. 3, no. 1(2), pp. 108–111. (in Russ.).
13. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* (Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids). Moscow, Vyssh. shk. Publ., 2001, 549 p. (in Russ.).
14. Vlasov P.A. Vliyanie ravnomernogo dvizheniya granitsy na temperaturnoe pole poluprostranstva, podverzhennogo nagrevu vneshnim teplovym potokom (Influence of Uniform Boundary Motion on the Temperature Field of a Half-Space Subjected to Heating by an External Heat Flow). *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana*, 2014, no. 8, pp. 101–109. (in Russ.). DOI: 10.7463/0814.0726072
15. Kulish V., Horak V. A Non-Field Analytical Method for Heat Transfer Problems Through a Moving Boundary. *Scientific Reports*, 2021, Vol. 11, Article 18968. DOI: 10.1038/s41598-021-98572-x
16. Landau H.G. Heat Conduction in a Melting Solid. *Quarterly of applied mathematics*, 1950, Vol. 8, no. 1, pp. 81–94. <https://www.jstor.org/stable/43633788>

*Received October 19, 2022*

### Information about the authors

Ryazhskikh Aleksandr Viktorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9823-3165>, e-mail: [ryazhskikhav@bk.ru](mailto:ryazhskikhav@bk.ru)

Khvostov Anatoliy Anatol'evich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: [khvtol1974@yandex.ru](mailto:khvtol1974@yandex.ru)

Soboleva Elena Aleksandrovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: [sobol5661@yandex.ru](mailto:sobol5661@yandex.ru)

Ryazhskikh Viktor Ivanovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Applied Mathematics and Mechanics Department, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: [ryazhskikh\\_vi@mail.ru](mailto:ryazhskikh_vi@mail.ru)