Физика

УДК 534.2 **DOI: 10.14529/mmph230108**

ЗАМЕЧАНИЕ О ВЫЧИСЛЕНИИ СКОРОСТИ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ И ПРОИЗВОДНОЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ РЭЛЕЯ В УПРУГИХ СРЕДАХ

С.Ю. Гуревич, Е.В. Голубев
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
e-mail: golubevev@susu.ru

Аннотация. Существует много приближенных и точных формул для определения скорости поверхностных волн в упругих средах. Получено аналитическое выражение для скорости волны Рэлея через значения скоростей объемных волн, а также формула, позволяющая определить вычет в задачах возбуждения и дифракции поверхностных акустических волн в однородном изотропном упругом полупространстве, допускающих решение для полей деформаций и напряжений в виде квадратур. Вычислены значения скорости волн Рэлея и производной определителя Рэлея для некоторых сред по литературным данным. Полученные результаты могут помочь в получении аналитических выражений и позволяют уменьшить время расчета на этапе численного решения задач дифракции и возбуждения акустических волн.

Ключевые слова: поверхностные волны; скорость волны Рэлея; корни характеристического уравнения; точное решение.

Поверхностные волны или волны Рэлея [1] давно и широко применяются в науке и технике, например, для определения характеристик их излучателей и изучения физических процессов, происходящих при возбуждении и распространении колебаний [2, 3], фазовых переходов [4], изучения свойств веществ и состояния их поверхностей [5], в дефектоскопии и оценке остаточного ресурса [6–8], для передачи и обработки информации [9, 10], в геофизике и сейсмологии [11].

Задача вычисления скорости рэлеевской волны, сводящаяся к решению уравнения третьей степени, раньше решалась численно [2] или с помощью простых приближенных формул [6, 12–15]. Поскольку к настоящему времени математики уже предложили аналитические методы решения уравнений невысоких степеней, например метод Лагранжа [16] или формулу Кардано [17–19], то эти методы учитываются при исследовании выражений в программах компьютерной алгебры. Это позволяет записать и упростить аналитические выражения для скорости поверхностной волны и для корней соответствующего уравнения [20, 21] (см. также источники 4, 6–13 в [20]).

Работа посвящена записи производной определителя Рэлея в аналитическом виде с помощью точного решения характеристического уравнения.

Согласно [22, с. 136], уравнение для определения скорости волны Рэлея

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2\left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0, \quad (1)$$

где $\xi = \omega / c_t k = c_r / c_t$ $(0 \le \xi < 1)$, ω – циклическая частота колебаний, $k = \omega / c$ – волновое число, c_r, c_t, c_l – скорость поверхностных, поперечных и продольных волн соответственно.

Сделаем замену $x = \xi^2 = (k/k_t)^2$, введем обозначение $u^2 = (c_t/c_l)^2$ и получим уравнение

$$x^3 - 8x^2 + 8x\left(3 - 2u^2\right) - 16\left(1 - u^2\right) = 0, \quad (2)$$

имеющее в интервале $x \in [0,1)$ единственный действительный корень a, который и определяет скорость волны Рэлея:

$$c_r = c_t\sqrt{a}. \quad (3)$$

Введем обозначения

$$T=\sqrt{((-64u^2+107)u^2-62)u^2+11}, \qquad (4)$$

$$U=\sqrt[3]{17-45u^2-3\sqrt{3}T} \qquad (5)$$

и запишем решение уравнения (2), полученное в программах *Maxima* [23] и *WolframAlfa* [24] в виде

$$a=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\left[U+\frac{2(6u^2-1)}{U}\right]. \qquad (6)$$

Это выражение вместе с (4) и (5) является решением поставленной задачи. Значение корня определяется только отношением квадратов скоростей объемных волн или коэффициентом Пуассона σ, связанным с u^2 известным соотношением $u^2=c_2^2/c_1^2=(1-2\sigma)/2(1-\sigma)$ (табл. 1).

Таблица 1

Зависимость $a(\sigma)$

σ	u^2	a, точное решение (6)	a, численный метод [c)]
–1,0	0,7500000000000000	0,4745724391564827	0,474572439156483
–0,9	0,7368421052631579	0,4960417626756930	0,4960417626756933
–0,8	0,7222222222222222	0,5191753282850295	0,5191753282850295
–0,7	0,7058823529411765	0,5440779615104171	0,5440779615104173
–0,6	0,6875000000000000	0,5708262701628667	0,570826270162867
–0,5	0,6666666666666667	0,5994463782101697	0,5994463782101699
–0,4	0,6428571428571429	0,6298836881418670	0,6298836881418671
–0,3	0,6153846153846159	0,6619660579475539	0,661966057947554
–0,2	0,5833333333333333	0,6953666629760182	0,6953666629760183
–0,1	0,5454545454545455	0,7295801516555792	0,7295801516555793
0,0	0,5000000000000000	0,7639320225002102 [a)]	0,7639320225002103
0,1	0,4444444444444444	0,7976383362116029	0,797638336211603
0,2	0,3750000000000000	0,8299135133739662	0,8299135133739663
0,3	0,2857142857142857	0,8600943341185433	0,8600943341185434
0,4	0,1666666666666667	0,8877322341853701 [b)]	0,88773223418537
0,5	0,0000000000000000	0,9126219746158490	0,9126219746158474

a) $3-\sqrt{5}$, *b*) $a=2(4-\sqrt[3]{19})/3$ [21], *c*) – значения получены с помощью [23] при использовании функции *find_root*, пример кода: $s{:}-1.0$; $u2{:}0.5*(1-2*s)/(1-s)$; $find\_root(((x-8)*x-16*u2+24)*x+16*u2-16,x,0.47,0.92)$;

В научных работах, например в [20], есть подобные результаты, но они записаны в другой форме – в виде подробного алгоритма действий, которые к нему приводят, а не в виде конечной формулы (6). В [20] приведена таблица корней уравнения (2) для различных значений коэффициента Пуассона ($-1\le\sigma\le 0{,}5$) и корней, полученных численным методом (см. табл. 1 из [20]). Из рассмотрения этой таблицы следует, что необходимо порядка 10 итераций для вычисления корня с абсолютной погрешностью, меньшей 10^{-9}. Очевидно, что точное выражение существенно проще в использовании, чем применение численных методов, которые требуют многократного вычисления исходной функции (2).

Согласно [22, с. 137], u^2 изменяется для различных веществ от 0 до $1/2$ (u от 0 до $1/\sqrt{2}$). Решение (6) допускает подстановку любого значения u^2 из указанного интервала и остается действительным. Вычисление не вызывает никаких трудностей в интервале $1/6 < u^2 < 0{,}3215$ с использованием действительных чисел. При $u^2 < 1/6$ $(\sigma>0{,}4)$, подкоренное выражение в (5) отрицательно и это требует аккуратного вычисление корня $U=-\sqrt[3]{-17+45u^2+3\sqrt{3}T}$ при работе с такими веществами, например, как свинец и золото. В самой точке $u^2=1/6$ $(\sigma=0{,}4)$ и ее малой окрестности при вычислении функции может накопиться значительная вычислительная погрешность, так как для получения значения знаменателя в формуле (6) требуется существенно больший объем вычислений, чем для числителя. Неопределенность типа $0/0$ легко устраняется разложением функции $U(u^2)$ в ряд Тейлора в окрестности этой точки

$$U(u^2) \approx \frac{12}{\sqrt[3]{19}}\left(u^2 - \frac{1}{6}\right) + \frac{360}{19\sqrt[3]{19}}\left(u^2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \ldots,$$

что дает из (6) значение корня $a = 2(4 - \sqrt[3]{19})/3 \approx 0{,}887732234185370088\ldots$. Автором [21] получен аналогичный результат из (2) при u^2 = 1/6. При u^2 > 0,3215 ($u = c_t/c_l$ > 0,567) T (4) становится мнимым и в расчетах необходимо использовать переменные комплексного типа (например, для таких веществ как цинк, германий, бериллий), для получения действительного значения a необходимо выделить реальную часть, мнимая часть сравнима с вычислительной погрешностью.

В работе [21] с помощью формулы Кардано и программы MAPLE получено выражение (см. формулу после 2.14), определяющее действительный корень через коэффициент Пуассона, которое в заключительной части работы автор привел к (6), записанному не в упрощенном виде. Автором отмечено, что функция имеет разрыв в точке $u^2 = 1/6$ $(\sigma = 2/5)$, что, как показано, не имеет места. В [21] также получено, что $a = 2(4 - \sqrt[3]{19})/3$, при $\sigma = 2/5 = 0{,}4$. В [25] приведены точные значения других корней для σ равных $-\frac{15}{17}, -\frac{2}{7}, -\frac{5}{123}, \frac{3}{28}, \frac{77}{365}, \frac{20}{69}, \frac{55}{136}, \frac{114}{235}$.

Результаты вычисления на основе выражения (6) можно сравнить с экспериментальными данными для величины скорости рэлеевской волны в различных материалах и признать удовлетворительным соответствие расчетных и табличных данных. Так, в работе [26] приведены данные измерений скорости: в алюминии (А-1) – 2990 м/с, в железе (АРМКО) – 2912 м/с. По данным [7] (см. приложение, табл. П2, 10^3 м/с): свинец – 0,63; золото – 1,12; платина – 1,57; серебро – 1,48; висмут – 1,03; латунь – 1,95; вольфрам – 2,65; медь – 3,52 (указана c_t = 3,72); алюминий – 2,80; олово – 1,56; никель – 2,64; кадмий – 1,4; железо – 3,0; цинк – 2,22; бериллий – 7,87.

При решении задачи возбуждения и распространения акустических волн в сплошных упругих средах при использовании модели полупространства и методов интегральных преобразований для нахождения решения в аналитическом виде конечные квадратурные формулы для акустического поля (поля векторов деформаций и напряжений) содержат в знаменателе выражение [12, стр. 7] (I.6) (также см. [2]):

$$R(k) = (k^2 + s^2)^2 - 4k^2 qs = (2k^2 - k_2^2)^2 - 4k^2\sqrt{k^2 - k_1^2}\sqrt{k^2 - k_2^2}, \tag{7}$$

где $k = \omega/c$ – волновое число; $q = \sqrt{k^2 - k_l^2}$, $k_l = \omega/c_l$; $s = \sqrt{k^2 - k_t^2}$, $k_t = \omega/c_t$. Согласно [27], $R(k)$ определяет четыре точки ветвления подынтегральной функции $k = \pm k_1, \pm k_2$ и три полюса $k = 0, \pm k_r$, где $k_r = \omega/c_r$ – волновое число волны Рэлея. Вычет в $k = k_r$ определяет вклад волны Рэлея в акустическое поле. Для его определения необходимо вычислить производную

$$R'(k_r) = \left.\frac{dR}{dk}\right|_{k=k_r} = \left.\left[8k(2k^2 - k_t^2) - 8k\sqrt{k^2 - k_l^2}\sqrt{k^2 - k_t^2} - 4k^3\frac{\sqrt{k^2 - k_t^2}}{\sqrt{k^2 - k_l^2}} - 4k^3\frac{\sqrt{k^2 - k_l^2}}{\sqrt{k^2 - k_t^2}}\right]\right|_{k=k_r} =$$

$$= -\left.\frac{2k_t^8 - 8k^2k_t^6 + 16k^6(k_t^2 - k_l^2)}{k(2k^2 - k_t^2)^2}\right|_{k=k_r} = -\frac{2[a^3 - 4a^2 + 8(1 - u^2)]}{\sqrt{a}(a-2)^2}k_t^3, \tag{8}$$

где учтено, что $(2k_r^2 - k_2^2)^2 = 4k_r^2\sqrt{k_r^2 - k_1^2}\sqrt{k_r^2 - k_2^2}$, $k_r = k_t/\sqrt{a}$, $k_l = uk_t$. Это выражение, записанное в аналитическом виде, пропорционально частоте в третьей степени. Безразмерный коэффициент перед k_t^3 (приведен для некоторых веществ в табл. 2), от которого зависит амплитуда волны Рэлея, определяется только отношением скоростей распространения объемных упругих волн или коэффициентом Пуассона.

Аналогичные результаты представлены в [2], где приведены графики расчетных зависимостей величин скорости волны Рэлея и отношения производной определителя и k_t^3 от коэффициента Пуассона (см. рис. 2 и 3 в [2]).

Таблица 2

Скорости звука для некоторых веществ (c_l, c_t – данные [28], столбцы 4–7 – расчет по (6), (3) и (8))

	c_l	c_t	$u^2 = c_t^2 / c_l^2$	a	c_r	$\frac{1}{k_t^3} \frac{dR}{dk}\Big\vert_{k=k_r}$
1	2	3	4	5	6	7
Свинец	2160	700	0,105024	0,898355	663,47	–8,09648
Золото	3240	1200	0,137174	0,893063	1134,02	–7,64224
Платина	3960	1670	0,177845	0,885579	1571,56	–7,07566
Серебро	3600	1590	0,195069	0,882107	1493,34	–6,83877
Висмут (кристалл)	2140	960	0,20124	0,880815	900,98	–6,75439
Нейзильбер	4760	2160	0,205918	0,879817	2026,05	–6,69059
Латунь	4430	2123	0,229664	0,874507	1985,33	–6,36919
Вольфрам	5460	2620	0,230259	0,874369	2449,9	–6,36118
Медь	4700	2260	0,231218	0,874145	2113	–6,3483
Алюминий	6260	3080	0,242077	0,871556	2875,4	–6,20289
Олово	3320	1670	0,253021	0,868846	1556,64	–6,05731
Константен	5240	2640	0,253831	0,868641	2460,5	–6,04658
Висмут	2180	1100	0,254608	0,868444	1025,09	–6,03629
Никель	5630	2960	0,276418	0,862689	2749,28	–5,7496
Чугун	4500	2400	0,284444	0,860454	2226,26	–5,6452
Свинец (кристалл)	2350	1266	0,290223	0,858804	1173,22	–5,57043
Кадмий	2780	1500	0,291134	0,858541	1389,86	–5,55867
Олово (кристалл)	3480	1900	0,298091	0,8565	1758,4	–5,46916
Железо	5850	3230	0,304855	0,854465	2985,72	–5,3826
Цинк	4170	2410	0,334012	0,845069	2215,46	–5,01527
Германий (кристалл)	5390	3540	0,431349	0,80447	3175,11	–3,87086
Бериллий	12660	8900	0,494211	0,767838	7798,7	–3,2182

Выводы

В виде конечных формул приведены аналитическое решение для уравнения, определяющего скорость поверхностной волны, и выражение, помогающее определить вычет при использовании квадратурных формул, определяющих поля векторов деформаций и напряжений. Полученные результаты могут помочь в получении и анализе аналитических выражений, а также позволят уменьшить время расчета на этапе численного моделирования при решении задач дифракции и возбуждения акустических волн.

Литература

1. Rayleigh, L. On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid / L. Rayleigh // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1885. – Vol. s1-17, Iss. 1. – P. 4–11.
2. Гуляев, Ю.В. Распространение поверхностных акустических волн в периодических структурах / Ю.В. Гуляев, В.П. Плесский / Успехи физических наук. – 1989. – Т. 157, Вып. 1. – С. 85–127.
3. Карабутов, А.А. Лазерное возбуждение поверхностных акустических волн: новое направление в оптико-акустической спектроскопии твердого тела / А.А. Карабутов / Успехи физических наук. – 1985. – Т. 147, № 3. – С. 605–620.
4. Гуляев, Ю.В. Поверхностные магнитоакустические волны в магнитных кристаллах в области ориентационных фазовых переходов / Ю.В. Гуляев, И.Е. Дикштейн, В.Г. Шавров // Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167, № 7. – С. 735–750.
5. Муравьев, В.В. Скорость звука и структура сталей и сплавов / В.В. Муравьев, Л.Б. Зуев, К.Л. Комаров. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1996. – 184 с.
6. Ермолов, И.Н. Теория и практика ультразвукового контроля. – М.: Машиностроение, 1981. – 240 с.
7. Ермолов И.Н. Неразрушающий контроль. Кн. 2. Акустические методы контроля: практ. пособие / И.Н. Ермолов, Н.П. Алешин, А.И. Потапов. – М.: Высш. шк., 1991. – 283 с.
8. Non-destructive Testing with Surface Acoustic Waves using Double-Pulse TV Holography / D. Carnadas, C. Trillo, A.F. Doval *et al*. // Meas. Sci. Technol. – 2002. – no. 13. – P. 438–444.

9. Crecraft, D.I. Ultrasonic instrumentation: principles, methods and applications / D.I. Crecraft // J. Phys. E: Sci. Instrum. – 1983. – Vol. 16, no. 3. – P. 181–189.

10. Meirion, F.L. Rayleigh Waves – a Progress Report / F.L. Meirion // Eur. J. Phys. – 1995. – Vol. 16. – P. 1–7.

11. Novotny, O. Seismic Surface Waves / O. Novotny. – Salvador, Bahia, 1999. – 155 p.

12. Викторов, И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1966. – 168 с.

13. Викторов, И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1981. – 287 с.

14. Можаев, В.Г. Приближенные аналитические выражения для скорости волн Рэлея в изотропных средах и на базисной плоскости в высокосимметричных кристаллах / В.Г. Можаев // Акустический журнал. – 1991. – Т. 37, Вып. 2. – С. 368–374.

15. Vinh P.C., Malischewsky P.G. Improved Approximations of the Rayleigh Wave Velocity / P.C. Vinh, P.G. Malischewsky // Journal of Thermoplastic Composite Materials. – 2008. – Vol. 21, Iss. 4. – P. 337–352.

16. Zhao, T. Solution formulas for cubic equations without or with constraints / T. Zhao, D. Wang, H. Hong // J. Symb. Comput. – 2011. – Vol. 46. – P. 904–918.

17. Cardano, G. Ars Magna / G. Cardano. – Nurmberg, 1545.

18. Stedall, J. From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections. Filling a Gap in the History of Algebra / J. Stedall. – Heritage of European Mathematics. Zurich: European Mathematical Society (EMS), 2011. – 236 p. (German, English).

19. Herbison-Evans, D. Solving Quartics and Cubics for Graphics / D. Herbison-Evans // Technical Report TR94-487. – 1994. (updated 31 March 2011, 27 May 2017, 13 January 2019).

20. Sudheer, G. A Note on Formulas for the Rayleigh Wave Speed in Elastic Solids / G. Sudheer, M.H. Lakshmi, Y.V. Rao // Ultrasonics. – 2017. – Vol. 73. – P. 82–87.

21. Mechkour, H. The Exact Expressions for the Roots of Rayleigh Wave Equation / H. Mechkour / Proceedings of the 2-nd International Colloquium of Mathematics in Engineering and Numerical Physics (MENP-2) April 22–27, 2002, Bucharest, ROMANIA. – P. 96–104.

22. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.

23. https://maxima.sourceforge.io/ru/index.html

24. https://wolframalfa.com

25. Pichugin, A. Approximation of the Rayleigh Wave Speed / A. Pichugin // People.Brunel.Ac.Uk (Unpublished draft). – 2008. – P. 1-2008. http://people.brunel.ac.uk/~mastaap/draft06rayleigh.pdf

26. Виноградов, Н. Измерение скорости и затухания ультразвуковых поверхностных волн в твердых материалах / Н. Виноградов, К. Ульянов / Акустический журнал. – 1959. – Т. 5, Вып. 3. – С. 290–293.

27. Коломенский, Ал.А. Поверхностные отклики при лазерном воздействии на твердое тело: рэлеевские волны и предвестники / Ал.А. Коломенский, А.А. Мазнев // Акуст. журн. – 1990. – Т. 36, № 3. – С. 463–469.

28. Кикоин, И.К. Таблицы физических величин. Справочник / И.К. Кикоин. – М.: Атомиздат, 1976. – 1005 с.

Поступила в редакцию 5 января 2022 г.

Сведения об авторах

Гуревич Сергей Юрьевич – доктор технических наук, профессор, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1042-0303, e-mail: gurevichsi@susu.ru

Голубев Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: https://ocrid.org/0000-0002-6641-0702, e-mail: golubevev@susu.ru,

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2023, vol. 15, no. 1, pp. 69–75

DOI: 10.14529/mmph230108

A NOTE ON CALCULATING RAYLEIGH WAVE VELOCITY AND THE DERIVATIVE OF THE RAYLEIGH DETERMINANT IN ELASTIC MEDIA

S.Yu. Gurevich, E.V. Golubev
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
e-mail: golubevev@susu.ru

Abstract. There are many approximate and exact formulae to calculate surface wave velocity in an elastic medium. An analytical expression for Rayleigh wave velocity in volume wave velocity values has been obtained. A formula which determines the remainder in the excitation and diffraction of surface acoustic waves in a homogeneous isotropic elastic half-space involving solutions for the strain and stress fields in the form of quadratures is worked out. The values of the Rayleigh wave velocity and the derivative of the Rayleigh determinant for different media according to the reference data were obtained. The results can help in obtaining analytic expressions and reducing the calculation time of numerical solutions of the diffraction and excitation of acoustic waves.

Keywords: surface waves; Rayleigh wave velocity; roots of the characteristic equation; exact solution.

References

1. Rayleigh L. On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid. *Proc. London Mathematical Society*, 1885, Vol. s1-17, Iss. 1, pp. 4–11. DOI: 10.1112/plms/s1-17.1.4

2. Gulyaev Y.V., Plesskiĭ V.P. Propagation of Acoustic Surface Waves in Periodic Structures. *Physics–Uspekhi*, 1989, Vol. 32, Iss. 1, pp. 51–74. DOI: 10.1070/PU1989v032n01ABEH002676

3. Karabutov A.A. Laser Excitation of Surface Acoustic Waves: a New Direction in Opto-Acoustic Spectroscopy of a Solid. *Physics–Uspekhi*, 1985, Vol. 28, Iss. 11, pp. 1042–1051. DOI: 10.1070/PU1985v028n11ABEH003981

4. Gulyaev Yu.V., Dikshtein I.E., Shavrov V.G. Magnetoacoustic Surface Waves in Magnetic Crystals Near Spin-Reorientation Phase Transitions. *Physics–Uspekhi*, 1997, Vol. 40, Iss. 7, pp. 701–716. DOI: 10.1070/PU1997v040n07ABEH000252

5. Muraviev V.V., Zuev L.B., Komarov K.L. *Skorost' zvuka i struktura staley i splavov* (The Ultrasound Velocity and Structure of Steels and Alloys). Novosibirsk, Nauka, Siberian Publishing Firm RAN, 1995, 184 p. (in Russ.).

6. Ermolov I.N. *Teoriya i praktika ul'trazvukovogo kontrolya* (Theory and Practice of Ultrasound Control). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981, 240 p. (in Russ.).

7. Ermolov I.N., Aleshin N.P., Potapov A.I. *Nerazrushayushchiy kontrol'. Kn. 2. Akusticheskie metody kontrolya: prakt. posobie* (Non-destructive Testing. Book 2. Acoustic Control Methods: Practice Guide). Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1991, 283 p. (in Russ.).

8. Carnadas D., Trillo C., Doval A.F., Lopez J.C., Dorrio B.V., Fernandez J.L., Perez-Amor M. Non-Destructive Testing with Surface Acoustic Waves using Double-Pulse TV Holography. *Meas. Sci. Technol.*, 2002, no. 13, pp. 438–444.

9. Crecraft D.I. Ultrasonic Instrumentation: Principles, Methods and Applications. *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, 1983, Vol. 16, no. 3, pp. 181–189. DOI: 10.1088/0022-3735/16/3/001

10. Meirion F. L. Rayleigh Waves – A Progress Report. *Eur. J. Phys.*, 1995, Vol. 16, pp. 1–7.

11. Novotny O. *Seismic Surface Waves*. Salvador, Bahia, 1999, 155 p.

12. Viktorov I.A. *Fizicheskie osnovy primeneniya ul'trazvukovykh voln Releya i Lemba v tekhnike* (Physical Bases of Application of Rayleigh and Lamb Ultrasonic Waves in Engineering). Moscow, Nauka Publ., 1966, 168 p. (in Russ.).

13. Viktorov I.A. *Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh* (Sound Surface Waves in Solids). Moscow, Nauka Publ., 1981, 287 p. (in Russ.).

14. Mozhaev V.G. Priblizhennye analiticheskie vyrazheniya dlya skorosti voln Releya v izotropnykh sredakh i na bazisnoy ploskosti v vysokosimmetrichnykh kristallakh (Approximate Analytical Expressions for the Rayleigh Wave Velocity in Isotropic Media and on the Basis Plane in Highly Symmetric Crystals). *Akusticheskiy zhurnal*, 1991, Vol. 37, Iss. 2, pp. 368–374. (in Russ.).

15. Vinh P.C., Malischewsky P.G. Improved Approximations of the Rayleigh Wave Velocity. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 2008, Vol. 21, Iss. 4, pp. 337–352. DOI: 10.1177/0892705708089479

16. Zhao T., Wang D., Hong H. Solution Formulas for Cubic Equations without or with Constraints. *J. Symb. Comput.*, 2011, Vol. 46, pp. 904–918. DOI: 10.1016/j.jsc.2011.02.001

17. Cardano G. *Ars Magna*. Nurmberg, 1545.

18. Stedall J. *From Cardano's Great Art to Lagrange's Reflections. Filling a Gap in the History of Algebra*. Heritage of European Mathematics. Zurich: European Mathematical Society (EMS), 2011, 236 p. (German, English). DOI: 10.4171/092

19. Herbison-Evans, D. Solving Quartics and Cubics for Graphics. *Technical Report*. *TR94-487*, 1994. (updated 31 March 2011, 27 May 2017, 13 January 2019). DOI: 10.1016/b978-0-12-543457-7.50009-7

20. Sudheer G., Lakshmi M.H., Rao Y.V. A Note on Formulas for the Rayleigh Wave Speed in Elastic Solids. *Ultrasonics*, 2017, Vol. 73, pp. 82–87. DOI: 10.1016/j.ultras.2016.08.021

21. Mechkour H. The Exact Expressions for the Roots of Rayleigh Wave Equation. *BSG Proceedings 8*, Geometry Balkan Press, 2003, pp. 96–104.

22. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theory of Elasticity* (3rd ed.). Oxford, England: Butterworth Heinemann, 1986, 204 p.

23. https://maxima.sourceforge.io/ru/index.html

24. https://wolframalfa.com

25. Pichugin, A.V. Approximation of the Rayleigh wave speed. *Unpublished draft*, 2008, http://people.brunel.ac.uk/~mastaap/draft06rayleigh.pdf

26. Vinogradov N., Ul'yanov K. Izmerenie skorosti i zatukhaniya ul'trazvukovykh poverkhnostnykh voln v tverdykh materialakh (Measurement of the Velocity and Attenuation of Ultrasonic Surface Waves in Solid Materials). *Akusticheskiy zhurnal*, 1959, Vol. 5, Iss. 3, pp. 290–293. (in Russ.).

27. Kolomenskiy Al.A., Maznev A.A. Poverkhnostnye otkliki pri lazernom vozdeystvii na tverdoe telo: releevskie volny i predvestniki (Surface Responses under Laser Action on a Solid: Rayleigh Waves and Precursors). *Akusticheskiy zhurnal*, 1990, Vol. 36, no. 3, pp. 463–469. (in Russ.).

28. Kikoin I.K. *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik* (Tables of Physical Quantities. Guide). Moscow, Atomizdat Publ., 1976, 1005 p. (in Russ.).

Received January 5, 2023

Information about the authors

Gurevich Sergey Yur'evich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1042-0303, e-mail: gurevichsi@susu.ru

Golubev Evgeniy Valer'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: https://ocrid.org/0000-0002-6641-0702, e-mail: golubevev@susu.ru,