Математика

УДК 512.64

О СТРУКТУРЕ ЯДРА ТЕПЛИЦ-ПЛЮС-ГАНКЕЛЕВЫХ МАТРИЦ

В.М. Адуков, О.Л. Ибряева

В работе изучается структура ядра блочных теплиц-плюс-ганкелевых матриц и на основе этого дается формула для производящего многочлена обратной матрицы для данного класса матриц.

1. Введение

Хорошо известно, что задача описания ядра теплицевых или ганкелевых матриц и задача их обращения тесно связаны между собой [1] – [3]. Обе эти задачи решаются в терминах индексов и существенных многочленов конечной последовательности, порождающей данную теплицеву матрицу [1], [2] (или в терминологии работы [3] в терминах характеристических степеней и характеристических многочленов). Метод оказался также эффективным в задаче явного построения факторизации Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций [4] и при исследовании равномерной сходимости строк таблицы Паде для функций и матриц-функций [5] – [7].

Мы собираемся распространить подход, основанный на понятиях индексов и существенных многочленов, на класс блочных теплиц-плюс-ганкелевых матриц (далее $T+H$-матриц). Обращение матриц этого класса возникает в задаче приближенного решения интегральных уравнений с ядром, являющимся суммой двух слагаемых: одно из них зависит от разности аргументов, а другое – от суммы. Кроме того, задача нахождения линейной аппроксимации Паде-Чебышева фактически сводится к нахождению ядра $T+H$-матрицы. Эти применения $T+H$-матриц и определяют цели данной работы: ввести аналоги индексов и существенных многочленов для случая блочных $T+H$-матриц и, на этой основе, описать структуру их ядра и предложить метод их обращения.

Для $T+H$-матриц существует два подхода к определению индексов и существенных многочленов, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. В этой статье мы ограничимся описанием только того подхода, который более предпочтителен для применения в задаче обращения $T+H$-матриц. Другой подход, который дает более тонкое описание структуры ядра этих матриц, будет опубликован отдельно. Его мы собираемся использовать для изучения аппроксимаций Паде-Чебышева.

Структура данной работы такова. В параграфе 2 мы вводим понятия существенных индексов и многочленов, объясняем причины возникновения двух различных подходов и сравниваем их. Структура ядра блочных $T+H$-матриц описывается одним из методов в параграфе 3. В заключительном параграфе 4 мы приводим результат по обращению блочных $T+H$-матриц.

2. Определение индексов и существенных многочленов $T+H$-последовательности

Пусть $a_M, a_{M+1}, \ldots, a_N$ и $b_0, b_1, \ldots, b_{N-M}$, $(M < N)$ произвольные конечные последовательности комплексных матриц размером $p \times q$. Упорядоченную пару этих двух последовательностей будем называть $T+H$-*последовательностью.* Составим с помощью $T+H$-последовательности семейство блочных теплиц-плюс-ганкелевых матриц:

$$S_k = T_k + H_k = \|a_{i-j} + b_{i+j-k}\|_{\substack{i=k,k+1,\ldots,N \\ j=0,1,\ldots,k-M}},$$

$M \le k \le N$.

Для того, чтобы ввести понятия индексов и существенных многочленов $T+H$ - последовательности изучим структуру правых $\ker_{\mathrm{R}} S_k$ и левых $\ker_{\mathrm{L}} S_k$ ядер семейства матриц S_k.

Поскольку удобнее иметь дело не с векторами, а с производящими векторными многочленами, перейдем от пространств $\ker_{\mathrm{R}} S_k$ и $\ker_{\mathrm{L}} S_k$ к изоморфным пространствам $\mathcal{N}_k^R$ и $\mathcal{N}_k^L$ производящих векторных многочленов. Для этого введем операторы σ_R^T (σ_R^H), действующие из пространства рациональных матриц-функций вида $R(t) = \sum_{j=-N}^{-M} r_j t^j$ ($R(t) = \sum_{j=0}^{N-M} r_j t^j$), $r_j \in \mathbb{C}^{\,q\times l}$, в пространство $\mathbb{C}^{\,p\times l}$ по правилу

$$\sigma_R^T\{R(t)\} = \sum_{j=-N}^{-M} a_{-j} r_j \quad \left(\sigma_R^H\{R(t)\} = \sum_{j=0}^{N-M} b_j r_j\right)$$

и σ_L^T (σ_L^H) из пространства рациональных матриц-функций вида $L(t) = \sum_{j=-N}^{-M} l_j t^j$ ($L(t) = \sum_{j=0}^{N-M} l_j t^j$), $l_j \in \mathbb{C}^{\,l\times p}$, в $\mathbb{C}^{\,l\times q}$ по правилу

$$\sigma_L^T\{L(t)\} = \sum_{j=-N}^{-M} l_j a_{-j} \quad \left(\sigma_L^H\{L(t)\} = \sum_{j=0}^{N-M} l_j b_j\right).$$

Определение 2.1. *Определим $\mathcal{N}_k^R$, $k = M,\ldots,N$, как пространство векторных столбцовых многочленов $R(t) = \sum_{j=0}^{k-M} r_j t^j$, $r_j \in \mathbb{C}^{\,q\times 1}$, таких, что*

$$\sigma_R^T\{t^{-i}R(t)\} + \sigma_R^H\{t^{i-k}R(t)\} = 0$$

для $i = k, k+1, \ldots, N$.

Пусть также $\mathcal{N}_k^L$, $k = M,\ldots,N$, – пространство векторных строчных многочленов $L(t) = \sum_{j=0}^{N-k} l_j t^j$, $l_j \in \mathbb{C}^{\,1\times p}$, таких, что

$$\sigma_L^T\{t^{-i}L(t^{-1})\} + \sigma_L^H\{t^{k-i}L(t)\} = 0$$

для $i = k, k-1, \ldots, M$.

Определим пространство $\mathcal{N}_{N+1}^R$ как пространство всех столбцовых многочленов от t формальной степени $N-M+1$ и положим $\mathcal{N}_{M-1}^R = \mathcal{N}_{M-2}^R = \{0\}$. Введем также пространство $\mathcal{N}_{M-1}^L$ всех многочленов от t формальной степени $N-M+1$ и положим $\mathcal{N}_{N+1}^L = \mathcal{N}_{N+2}^L = \{0\}$

Очевидно, что $\mathcal{N}_k^R \cong \ker_{\mathrm{R}} S_k$ и $\mathcal{N}_k^L \cong \ker_{\mathrm{L}} S_k$.

Следующая теорема является ключевой при построении всей теории.

Теорема 2.1. *Выполняются следующие условия*

$$(t+1)\mathcal{N}_k^R \subseteq \mathcal{N}_{k+1}^R, \quad t\mathcal{N}_k^R \subseteq \mathcal{N}_{k+2}^R,$$

$$t\mathcal{N}_k^R \cap (t+1)^2\mathcal{N}_k^R = t(t+1)^2\mathcal{N}_{k-2}^R, \quad t\mathcal{N}_k^R \cap (t+1)\mathcal{N}_{k+1}^R = t(t+1)\mathcal{N}_{k-1}^R,$$

$$(t+1)\mathcal{N}_k^L \subseteq \mathcal{N}_{k-1}^L, \quad t\mathcal{N}_k^L \subseteq \mathcal{N}_{k-2}^L,$$

$$t\mathcal{N}_k^L \cap (t+1)^2\mathcal{N}_k^L = t(t+1)^2\mathcal{N}_{k+2}^L, \quad \mathcal{N}_k^L \cap (t+1)\mathcal{N}_{k-1}^L = t(t+1)\mathcal{N}_{k+1}^L.$$

Доказательство. Пусть $R(t) \in \mathcal{N}_k^R$. Рассмотрим $\tilde{R}(t) = (t+1)R(t)$. Очевидно, $\deg \tilde{R}(t) \le k - M + 1$. Используя условия ортогональности из определения 2.1 для $R(t) \in \mathcal{N}_k^R$, получаем

$$\sigma_R^T\{t^{-i}\tilde{R}(t)\} + \sigma_R^H\{t^{i-(k+1)}\tilde{R}(t)\} = 0$$

для $i = k+1, \dots, N$. Значит, $\tilde{R}(t) \in \mathcal{N}_{k+1}^R$. Аналогично доказывается вложение $t\mathcal{N}_k^R \subseteq \mathcal{N}_{k+2}^R$.

Очевидно, что

$$t(t+1)^2\mathcal{N}_{k-2}^R \subseteq t\mathcal{N}_k^R \cap (t+1)^2\mathcal{N}_k^R.$$

Докажем противоположное вложение. Пусть $R(t) \in t\mathcal{N}_k^R \cap (t+1)^2\mathcal{N}_k^R$ и $k > M-2$. Тогда, $R(t) = tR_1(t)$, $R_1(t) \in \mathcal{N}_k^R$ и $R(t) = (t+1)^2R_2(t)$, $R_2(t) \in \mathcal{N}_k^R$. Значит, $R(t) = t(t+1)^2\tilde{R}_2(t)$, где $R_2(t) = t\tilde{R}_2(t)$ и $\deg \tilde{R}_2(t) \le k - M - 2$. Докажем, что $\tilde{R}_2(t) \in \mathcal{N}_{k-2}^R$, т.е., что выполняются соответствующие условия ортогональности:

$$\sigma_R^T\{t^{-i}\tilde{R}_2(t)\} + \sigma_R^H\{t^{i-(k-2)}\tilde{R}_2(t)\} = 0 \tag{2.1}$$

для $i = k-2, k-1, \dots N$. Используя условия ортогональности для $R_2(t) = t\tilde{R}_2(t)$, получим, что это верно для $i = k-1, k, \dots N-1$. Из условий ортогональности для R_1, R_2 и условия (2.1), взятых при $i = k$, получаем, что (2.1) верно и для $i = k-2$. Аналогично, из условий ортогональности для R_1, R_2 при $i = N$ и условия (2.1) при $i = N-2$, получаем, что (2.1) верно для $i = N$. Нетрудно убедиться, что $t\mathcal{N}_M^R \cap (t+1)^2\mathcal{N}_M^R = 0$, $t\mathcal{N}_{M+1}^R \cap (t+1)^2\mathcal{N}_{M+1}^R = 0$, т.е. доказываемое соотношение верно и при $k = M, M+1$.

Аналогично доказывается вложение $t\mathcal{N}_k^R \cap (t+1)\mathcal{N}_{k+1}^R = t(t+1)\mathcal{N}_{k-1}^R$ и вторая часть теоремы. ■

Таким образом, в отличии от теплицева случая, теперь мы должны рассмотреть вложения трех последовательных пространств $\mathcal{N}_k^R$, $\mathcal{N}_{k+1}^R$, $\mathcal{N}_{k+2}^R$, что дает возможность для двух различных вариантов построения дальнейшей теории. Во-первых, мы можем рассмотреть две независимые цепочки вложений: $\mathcal{N}_M^R \subseteq \mathcal{N}_{M+2}^R \subseteq \mathcal{N}_{M+4}^R \dots$ и $\mathcal{N}_{M+1}^R \subseteq \mathcal{N}_{M+3}^R \subseteq \mathcal{N}_{M+5}^R \dots$, используя тем самым только вложения $t\mathcal{N}_k^R$, $(t+1)^2\mathcal{N}_k^R$ (или $(t^2+1)\mathcal{N}_k^R$) в $\mathcal{N}_{k+2}^R$. Для этих двух цепочек пространств мы независимо определим два набора индексов и существенных многочленов никак не связанных между собой. Этот способ не использует вложения $(t+1)\mathcal{N}_{k+1}^R$ в $\mathcal{N}_{k+2}^R$ и потому дает более грубое описание структуры ядра, чем второй способ, использующий это вложение. В последнем случае мы имеем одну цепочку вложенных пространств $\mathcal{N}_k^{R,L}$, $M \le k \le N$ и один набор индексов и существенных многочленов. Однако, при таком подходе многие формулы, относящиеся к задаче обращения $T+H$-матриц, становятся более сложными. Для обращения матрицы S_0 необязательно рассмотривать все пространства $\mathcal{N}_k^{R,L}$. Достаточно рассмотреть только одну цепочку вложений, содержащую $\mathcal{N}_0^R$. В данной статье мы поступим именно таким образом. Второй подход будет описан в другой работе.

Пусть $\alpha_0 = \dim \mathcal{N}_M^R$, $\alpha_1 = \dim \mathcal{N}_{M+1}^R$, $\omega_1 = \dim \mathcal{N}_{N-1}^L$, $\omega_0 = \dim \mathcal{N}_N^L$. Заметим, что всегда $\alpha_0 \le \alpha_1$, $\omega_0 \le \omega_1$, т.к. $(t+1)\mathcal{N}_M^R \subseteq \mathcal{N}_{M+1}^R$, $(t+1)\mathcal{N}_N^L \subseteq \mathcal{N}_{N-1}^L$.

Будем называть $T+H$-последовательность ***регулярной***, если $\alpha_0, \alpha_1, \omega_1, \omega_0$ равны нулю. Сами числа $\alpha_0, \alpha_1, \omega_1, \omega_0$ будем называть ***дефектами*** $T+H$-последовательности. В случае $\alpha_1 = \omega_1 = 0$, автоматически получаем $\alpha_0 = \omega_0 = 0$.

Обозначим $d_k^R = \dim \mathcal{N}_k^R$, $d_k^L = \dim \mathcal{N}_k^L$. По определению положим $\Delta_k^R = d_k^R - d_{k-2}^R$ и $\Delta_k^L = d_k^L - d_{k+2}^L$.

Легко убедиться, что для $M-1 \le k \le N-1$

$$\Delta_{k+2}^R + \Delta_k^L = 2(p+q) \tag{2.2}$$

Чтобы соотношение (2.2) выполнялось и для $k = M-2, N$ нужно положить $d^R_{N+2} = (N-M+3)q+p$, и $d^L_{M-2} = (N-M+3)p+q$, Теперь имеют место следующие равенства: $\Delta^R_M = \alpha_0$, $\Delta^R_{M+1} = \alpha_1$, $\Delta^R_{N+1} = 2(p+q)-\omega_1$, $\Delta^R_{N+2} = 2(p+q)-\omega_0$, $\Delta^L_{M-2} = 2(p+q)-\alpha_0$, $\Delta^L_{M-1} = 2(p+q)-\alpha_1$, $\Delta^L_{N-1} = \omega_1$, $\Delta^L_N = \omega_0$. Заметим, что определение чисел d^R_{N+2}, и d^L_{M-2} является формальным – сами пространства $\mathcal{N}^R_{N+2}$, $\mathcal{N}^L_{M-2}$ не определены.

Теперь мы можем установить очень важный для дальнейшего факт – монотонность последовательностей $\Delta^{R,L}_k$.

Теорема 2.2. *Пусть $N - M \equiv \epsilon (\mathrm{mod}\, 2)$, $\epsilon = 0,1$. Тогда для любой $T+H$-последовательности справедливы следующие неравенства:*

$$\alpha_\nu = \Delta^R_{M+\nu} \le \Delta^R_{M+2+\nu} \le \ldots \le \Delta^R_{N-[\epsilon+\nu]} \le \Delta^R_{N+2-[\epsilon+\nu]} = 2(p+q) - \omega_{[\epsilon+\nu]}, \quad \nu = 0,1, \tag{2.3}$$

$$2(p+q) - \alpha_\nu = \Delta^L_{M-2+\nu} \ge \Delta^L_{M+\nu} \ge \ldots \ge \Delta^L_{N-2-[\epsilon+\nu]} \ge \Delta^L_{N-[\epsilon+\nu]} = \omega_{[\epsilon+\nu]}, \quad \nu = 0,1, \tag{2.4}$$

где $\epsilon+\nu \equiv [\epsilon+\nu](\mathrm{mod}\, 2)$, $[\epsilon+\nu] = 0,1$.

Доказательство. Как показано в теореме 2.1, пространство $\mathcal{N}^R_{k+2}$ содержит подпространство $t\mathcal{N}^R_k + (t+1)^2\mathcal{N}^R_k$. Воспользовавшись формулой Грассмана, получим

$$\dim\left(t\mathcal{N}^R_k + (t+1)^2\mathcal{N}^R_k\right) =$$
$$\dim t\mathcal{N}^R_k + \dim (t+1)^2\mathcal{N}^R_k - \dim\left(t\mathcal{N}^R_k \cap (t+1)^2\mathcal{N}^R_k\right) = 2d^R_k - d^R_{k-2} \le d^R_{k+2}.$$

Это и означает, что $\Delta^R_k \le \Delta^R_{k+2}$.

Аналогично доказываются остальные неравенства. ∎

Перейдем теперь к определению индексов и существенных многочленов для цепочки пространств

$$\mathcal{N}^R_{M+\nu}, \ \mathcal{N}^R_{M+2+\nu}, \ \mathcal{N}^R_{M+4+\nu} \ldots, \quad \nu = 0,1.$$

Из теоремы 2.2 и в силу того, что Δ^R_k целые числа, следует, что цепочка неравенств (2.3) возможна лишь в том случае, если найдется $2(p+q) - \omega_{[\epsilon+\nu]} - \alpha_\nu$ целых чисел $\mu^\nu_{\alpha_\nu+1} \le \ldots \le \mu^\nu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}$ таких, что

$$\begin{array}{lcccl}
\Delta^R_M & = \ldots = & \Delta^R_{\mu^\nu_{\alpha_\nu+1}} & = & \alpha_\nu, \\
 & \ldots & & & \\
\Delta^R_{\mu^\nu_i+2} & = \ldots = & \Delta^R_{\mu^\nu_{i+1}} & = & i, \\
 & \ldots & & & \\
\Delta^R_{\mu^\nu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}+2} & = \ldots = & \Delta^R_{N+2-[\epsilon+\nu]} & = & 2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}.
\end{array} \tag{2.5}$$

Если i-я строка в этих соотношениях отсутствует, считаем, что $\mu^\nu_i = \mu^\nu_{i+1}$. Кроме того, по определению будем считать, $\mu^\nu_1 = \ldots = \mu^\nu_{\alpha_\nu} = M-2+\nu$ (в случае $\alpha_\nu \ne 0$) и $\mu^0_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}+1} = \ldots = \mu^0_{2(p+q)} = N+2-[\epsilon+\nu]$ (в случае $\omega_{[\epsilon+\nu]} \ne 0$).

Аналогичным образом для цепочки неравенств (2.4) можно определить $2(p+q)$ целых чисел $\pi^\nu_1 \le \ldots \le \pi^\nu_{2(p+q)}$. Эти числа определяются следующей таблицей:

$$\begin{array}{lcccl}
\Delta^L_{M-2+\nu} & = \ldots = & \Delta^L_{\pi^\nu_{\alpha_\nu+1}-2} & = & 2(p+q)-\alpha_\nu, \\
 & \ldots & & & \\
\Delta^L_{\pi,\nu} & = \ldots = & \Delta^L_{\pi^\nu_{i+1}-2} & = & 2(p+q)-i, \\
 & \ldots & & & \\
\Delta^L_{\pi^\nu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}} & = \ldots = & \Delta^L_{N-[\epsilon+\nu]} & = & \omega_{[\epsilon+\nu]}
\end{array} \tag{2.6}$$

с доопределением $\pi_1^\nu = \ldots = \pi_{\alpha_\nu}^\nu = M - 2 + \nu$ (для случая, когда $\alpha_\nu \neq 0$) и $\pi_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}+1}^\nu = \ldots = \pi_{2(p+q)}^\nu = N + 2 - [\epsilon + \nu]$, если $\omega_{[\epsilon+\nu]} \neq 0$.

Предложение 2.1. *Числа $\mu_1^\nu, \ldots, \mu_{2(p+q)}^\nu$ и $\pi_1^\nu, \ldots, \pi_{2(p+q)}^\nu$ совпадают. Кроме того,*

$$\sum_{i=1}^{2(p+q)} \mu_i^\nu = 2\left[p(N+1) + q(M-1)\right].$$

Доказательство. Первая часть предложения легко следует из ранее полученной формулы $\Delta_{k+2}^R + \Delta_k^L = 2(p+q)$.

Докажем формулу для суммы чисел μ_i^ν. С одной стороны,

$$\sum_{i=M}^{N+2}{}' \Delta_i^R = \Delta_M^R + \ldots + \Delta_{N+2}^R = d_{N+2}^R + d_{M-2}^R = (N - M + 3)q + p.$$

Здесь знак $\sum'$ означает, что в этой сумме шаг изменения индекса i равен двум. С другой стороны, $\sum\limits_{i=M}^{N+2}{}' \Delta_i^R = -\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{2(p+q)} \mu_i^\nu - 2(p+q)(N+2)$.

Сравнивая, получаем $\sum\limits_{i=1}^{2(p+q)} \mu_i^\nu = 2\left[p(N+1) + q(M-1)\right]$. ■

Заметим, что если $0 \in [M, N]$, то эта сумма равна удвоенному индексу оператора S_0, взятому с обратным знаком.

Определение 2.2. *Целые числа $\mu_1^\nu, \ldots, \mu_{2(p+q)}^\nu$ будем называть индексами порядка ν данной $T + H$-последовательности.*

Перейдем теперь к определению существенных многочленов.

Мы знаем, что $t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R \subseteq \mathcal{N}_{k+2}^R$. Обозначим $\mathcal{H}_{k+2}^R$ дополнение пространства $t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R$ до $\mathcal{N}_{k+2}^R$, т.е.

$$\mathcal{N}_{k+2}^R = \left(t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R\right) \dot{+} \mathcal{H}_{k+2}^R$$

для $k = M, M+2, \ldots$. Тогда $\dim \mathcal{H}_{k+2}^R = \Delta_{k+2}^R - \Delta_k^R$. Из таблицы (2.5) видно, что эта разность $\Delta_{k+2}^R - \Delta_k^R \neq 0$ только для $k = \mu_j^\nu$ и равна кратности индекса μ_j^ν. Таким образом,

$$\mathcal{N}_{k+2}^R = t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R, \qquad k \neq \mu_j^\nu,$$

$$\mathcal{N}_{k+2}^R = \left(t\mathcal{N}_k^R + (t+1)^2\mathcal{N}_k^R\right) \dot{+} \mathcal{H}_{k+2}^R, \qquad k = \mu_j^\nu.$$

Аналогично, для случая левых ядер, мы имеем

$$\mathcal{N}_{k-2}^L = t\mathcal{N}_k^L + (t+1)^2\mathcal{N}_k^L, \qquad k \neq \mu_j^\nu,$$

$$\mathcal{N}_{k-2}^L = \left(t\mathcal{N}_k^L + (t+1)^2\mathcal{N}_k^L\right) \dot{+} \mathcal{H}_{k-2}^L, \qquad k = \mu_j^\nu.$$

Определение 2.3. *Любые столбцовые многочлены* $R_j^\nu(t)$, $R_{j+1}^\nu(t)$, $\ldots$, $R_{j+k_j+1}^\nu(t)$, *образующие базис* $\mathcal{H}^R_{\mu_j^\nu+2}$, *где* $k_j = \dim \mathcal{H}^R_{\mu_j^\nu+2}$ *– кратность* μ_j^ν, *будем называть правыми существенными многочленами, соответствующими индексу* μ_j^ν.

Аналогично, любые строчные многочлены $L_j^\nu(t), L_{j+1}^\nu(t), \ldots, L_{j+k_j+1}^\nu(t)$, *являющиеся базисом дополнения* $\mathcal{H}^L_{\mu_j^\nu-2}$, *будем называть левыми существенными многочленами, соответствующими индексу* μ_j^ν.

Многочлены $R_1^\nu(t), \ldots, R^\nu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}$ $(L^\nu_{\alpha_\nu+1}(t), \ldots, L^\nu_{2(p+q)})$ *назовем правыми (левыми) существенными многочленами порядка* ν *для данной* $T+H$*-последовательности.*

Если $0 \in [M,N]$ и $M \equiv \nu(\mathrm{mod}\, 2)$, $\nu = 0,1$, то нетрудно убедиться, что матрица S_0 обратима тогда и только тогда, когда $T+H$-последовательность регулярна, все индексы порядка ν равны нулю, и $\mu_1^{[\nu+1]} = \ldots = \mu_{p+q}^{[\nu+1]} = -1$, $\mu_{p+q+1}^{[\nu+1]} = \ldots = \mu_{2(p+q)}^{[\nu+1]} = 1$. Кроме того, в этом случае все правые существенные многочлены порядка ν мы можем получить, найдя базис $\ker_{\mathrm{R}} S_2$, так как $d_2^R = 2(p+q)$. Аналогично, базис $\ker_{\mathrm{L}} S_{-2}$ состоит из $2(p+q)$ левых существенных многочленов порядка ν. Как мы увидем в дальнейшем, именно эти правые и левые существенные многочлены и будут определять матрицу S_0^{-1}.

3. Структура ядра $T+H$-матриц

Теперь мы можем описать структуру ядра блочных $T+H$-матриц в терминах индексов и существенных многочленов.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mu_1^\nu, \ldots, \mu_{2(p+q)}^\nu$, $\nu = 0,1$, *– индексы* $T+H$*-последовательности и* $R_1^\nu(t), \ldots, R^\nu_{2(p+q)-\omega_{[\epsilon+\nu]}}$ *– правые существенные многочлены* $((N-M) \equiv \epsilon(\mathrm{mod}\, 2))$. *Тогда, если* $l \in [\mu_i^\nu + 2, \mu_{i+1}^\nu]$, *то производящие многочлены для элементов базиса* $\ker_R S_l$ *есть:*

$$\left\{t^{k_j} R_j^\nu(t), t^{k_j-1}(t+1)^2 R_j^\nu(t), \ldots, t(t+1)^{2(k_j-1)} R_j^\nu(t), (t+1)^{2k_j} R_j^\nu(t)\right\}_{j=1}^{i}.$$

Здесь $k_j = \dfrac{l-\mu_j^\nu}{2} - 1$.

Для удобства в случае $\omega_0 = 0$ *положено* $\mu^\nu_{2(p+q)+1} = N+2$ *и, если* $\omega_1 = 0$, $\mu^\nu_{2(p+q)+1} = N+1$.

Доказательство. Докажем утверждение теоремы по индукции. Очевидно, утверждение теоремы верно для первого пространства $\ker_R S_M$. Предположим, что оно выполняется и для $\ker_R S_k$, $k \le l-1$. Докажем, что тогда оно верно и для $\ker_R S_l$. Для упрощения записи опустим верхний индекс ν.

Рассмотрим случай $l \in (\mu_i + 2, \mu_{i+1})$. Производящие многочлены для элементов базиса $\ker_R S_{l-2} \cong \mathcal{N}^R_{l-2}$ есть

$$\left\{t^{k_j-1} R_j, t^{k_j-2}(t+1)^2 R_j, \ldots, t(t+1)^{2(k_j-2)} R_j, (t+1)^{2(k_j-1)} R_j\right\}_{j=1}^{i}.$$

Тогда $t\mathcal{N}^R_{l-2}$ порождается

$$\left\{t^{k_j} R_j, t^{k_j-1}(t+1)^2 R_j, \ldots, t^2(t+1)^{2(k_j-2)} R_j, t(t+1)^{2(k_j-1)} R_j\right\}_{j=1}^{i},$$

и $(t+1)^2\mathcal{N}^R_{l-2}$ порождается

$$\left\{t^{k_j-1}(t+1)^2R_j, t^{k_j-2}(t+1)^4R_j, \dots, t(t+1)^{2(k_j-1)}R_j, (t+1)^{2k_j}R_j\right\}_{j=1}^{i}.$$

Тогда пространство $\mathcal{N}^R_l = t\mathcal{N}^R_{l-2} + (t+1)^2\mathcal{N}^R_{l-2}$ порождается

$$\left\{t^{k_j}R_j, t^{k_j-1}(t+1)^2R_j, \dots, t(t+1)^{2(k_j-1)}R_j, (t+1)^{2k_j}R_j\right\}_{j=1}^{i}. \tag{3.1}$$

Осталось показать, что эти многочлены могут быть выбраны в качестве базисных. Количество многочленов в (3.1) есть

$$\sum_{j=1}^{i}(k_j+1) = \sum_{j=1}^{i}(\frac{l-\mu_j}{2}) = \frac{l}{2}i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\mu_j.$$

С другой стороны,

$$d_l^R = \sum_{j=M}^{l}{}' \Delta_j^R = \alpha_0\left(\frac{-M+\mu_{\alpha_0+1}}{2}+1\right) + (\alpha_0+1)\left(\frac{\mu_{\alpha_0+2}-\mu_{\alpha_0+1}}{2}\right) + \dots$$

$$+(i-1)\left(\frac{\mu_i-\mu_{i-1}}{2}\right) + i\left(\frac{l-\mu_i}{2}\right) = \frac{l}{2}i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\mu_j.$$

Так как количество многочленов в (3.1) совпадает с размерностью d_l^R и эти многочлены порождают $\mathcal{N}_l^R$, то система (3.1) — базис $\mathcal{N}_l^R$. Аналогично можно рассмотреть случаи $l=\mu_i+2$, $l=\mu_{i+1}$.

Теорема доказана. ∎

Аналогичная теорема справедлива и для левых ядер.

Теорема 3.2. *Пусть $\mu_1^\nu, \dots, \mu_{2(p+q)}^\nu$, $\nu = 0,1$, – индексы, а $(L^\nu_{\alpha_\nu+1}(t), \dots, L^\nu_{2(p+q)})$ – левые существенные многочлены $T+H$-последовательности.*

Тогда, если $l \in [\mu_{i-1}^\nu, \mu_i^\nu-2]$, то производящие многочлены для элементов базиса $\ker_L S_l$ есть:

$$\left\{t^{k_j}L_j^\nu(t), t^{k_j+1}(t+1)^2L_j^\nu(t), \dots t(t+1)^{2(k_j-1)}L_j^\nu(t), (t+1)^{2k_j}L_j^\nu(t)\right\}_{j=i}^{2(p+q)}.$$

Здесь $k_j = \dfrac{\mu_j^\nu - l}{2} - 1$.

Для удобства в случае $\alpha_0 = 0$ положено $\mu_0^\nu = M-2$ и, если $\alpha_1 = 0, \mu_0^\nu = M-1$.

4. Обращение $T+H$-матриц

В заключение приведем формулу для производящей функции для обратной к $T+H$-матрице.

Положим $M=-m$, $N=n$. Пусть $S_0 = \|a_{i-j}+b_{i+j}\|$ – обратимая блочная теплиц–плюс–ганкелевая матрица блочных размеров $n\times m$ с блоками из $\mathbb{C}^{p\times q}$ и $B = \|b_{ij}\|_{\substack{i=0,1,\ \ ,m\\ j=0,1,\ \ ,n}}$ $(b_{ij} \in \mathbb{C}^{q\times p})$ – обратная к ней матрица.

Введем для матрицы B производящий многочлен от двух переменных t и s:

$$\mathcal{B}(t,s) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} b_{ij} t^i s^j.$$

Теорема 4.1. *Пусть матрица S_0 обратима и $M \equiv \nu (\mathrm{mod}\, 2)$, $R_1(t), \dots, R_{2(p+q)}(t)$ - правые, а $L_1(t), \dots, L_{2(p+q)}(t)$ - левые существенные многочлены порядка ν данной $T+H$-последовательности.*

Тогда производящий многочлен для обратной матрицы строится по формуле:

$$\mathcal{B}(t,s) = \frac{\mathcal{R}(t)\Lambda^{-1}\mathcal{L}(s)}{(t-s)(1-ts)},$$

где $\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & \dots & R_{2(p+q)}(t) \end{pmatrix}$, $\mathcal{L}(s) = \begin{pmatrix} L_1(s) \\ \vdots \\ L_{2(p+q)}(s) \end{pmatrix}$, $\Lambda = \Lambda_L \Lambda_0 \Lambda_R$,

$$\Lambda_L = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 & \sigma_L^T\left\{s^{m+1}\mathcal{L}(s^{-1})\right\} + \sigma_L^H\left\{s^{m-1}\mathcal{L}(s)\right\} & \mathcal{L}_{n+2} & \sigma_L^T\left\{s\mathcal{L}(s^{-1})\right\} + \sigma_L^H\left\{s^{-1}\mathcal{L}(s)\right\} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_q \end{pmatrix}, \quad \Lambda_R = \begin{pmatrix} \sigma_R^T\left\{t^{-1}\mathcal{R}(t)\right\} + \sigma_R^H\left\{t^{-1}\mathcal{R}(t)\right\} \\ \mathcal{R}_{m+2} \\ \sigma_R^T\left\{t^{-n-1}\mathcal{R}(t)\right\} + \sigma_R^H\left\{t^{n-1}\mathcal{R}(t)\right\} \\ \mathcal{R}_0 \end{pmatrix},$$

I_p — единичная матрица порядка p.

Здесь $\mathcal{R}_{m+2}$ и $\mathcal{L}_{n+2}$— старшие коэффициенты правых и левых существенных многочленов, $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{L}_0$— их свободные члены. Неявно присутствующие в Λ_R, Λ_L матрицы $a_{-m-1}, a_{n+1}, b_{-1}, b_{m+n+1}$ - любые матрицы размеров $p \times q$.

Доказательство. Всюду далее в этом доказательстве запись $[\mathcal{B}(t,s)]^j$ ($[\mathcal{B}(t,s)]_j$) будет означать j-й столбец (строку) матрицы $\mathcal{B}(t,s)$.

Докажем вначале, что $(t-s)(1-ts)[\mathcal{B}(t,s)]^j \in \mathcal{N}_2^R$. Заметим , что для $l = 0, \dots n$

$$\sigma_R^{T,t}\left\{t^{-l}\mathcal{B}(t,s)\right\} + \sigma_R^{H,t}\left\{t^{l}\mathcal{B}(t,s)\right\} = \sum_{j=0}^{n} \delta_{lj} I_p s^j = s^l I_p. \qquad \textbf{(4.1)}$$

Здесь верхний индекс t у оператора означает, что он действует только на эту переменную.

Из условий (4.1) следует, что для $i = 2, \dots, n$

$$\sigma_R^{T,t}\left\{t^{-i}(t-s)(1-ts)\mathcal{B}(t,s)\right\} + \sigma_R^{H,t}\left\{t^{i-2}(t-s)(1-ts)\mathcal{B}(t,s)\right\} = 0.$$

По определению (2.1) это означает, что $(t-s)(1-ts)[\mathcal{B}(t,s)]^j \in \mathcal{N}_2^R$. Аналогично, с использованием условия

$$\sigma_L^{T,s}\left\{s^{-l}\mathcal{B}(t,s^{-1})\right\} + \sigma_L^{H,s}\left\{s^{-l}\mathcal{B}(t,s)\right\} = t^{-l} I_q, \qquad l = 0, -1, \dots, -m$$

можно показать, что для $i = -2, -3, \dots, -m$ выполняется

$$\sigma_L^{T,s}\left\{s^{-i}(t-s^{-1})(1-ts^{-1})\mathcal{B}(t,s^{-1})\right\} + \sigma_L^{H,s}\left\{s^{-2-i}(t-s)(1-ts)\mathcal{B}(t,s)\right\} = 0, \qquad \textbf{(4.2)}$$

что по определению (2.1) означает, что $(t-s)(1-ts)[\mathcal{B}(t,s)]_j \in \mathcal{N}^L_{-2}$.

Так как $R_1(t),\dots,R_{2(p+q)}(t)$ базис для $\mathcal{N}^R_2$, мы имеем

$$(t-s)(1-ts)[\mathcal{B}(t,s)]^j = \sum_{k=1}^{2(p+q)} R_k(t)V_{kj}(s), \qquad j=1,\dots p.$$

В матричной форме $(t-s)(1-ts)\mathcal{B}(t,s) = \mathcal{R}(t)\mathcal{V}(s)$, где

$$\mathcal{R}(t) = \left(R_1(t),\dots,R_{2(p+q)}(t)\right), \quad \mathcal{V}(s) = \begin{pmatrix} V_{11}(s) & \dots & V_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{2(p+q)1}(s) & \dots & V_{2(p+q)p}(s) \end{pmatrix}.$$

Из соотношений (4.2) следует, что

$$\sigma_L^{T,s}\left\{s^{-i}\mathcal{R}(t)\mathcal{V}(s^{-1})\right\} + \sigma_L^{H,s}\left\{s^{-2-i}\mathcal{R}(t)\mathcal{V}(s)\right\} =$$

$$= \mathcal{R}(t)\begin{pmatrix} \sigma_L^{T,s}\left\{s^{-i}\left[\mathcal{V}(s^{-1})\right]_1\right\} + \sigma_L^{H,s}\left\{s^{-2-i}\left[\mathcal{V}(s)\right]_1\right\} \\ \dots \\ \sigma_L^{T,s}\left\{s^{-i}\left[\mathcal{V}(s^{-1})\right]_{2(p+q)}\right\} + \sigma_L^{H,s}\left\{s^{-2-i}\left[\mathcal{V}(s)\right]_{2(p+q)}\right\} \end{pmatrix} = 0$$

для $i=-2,\dots,-m$. Так как многочлены $R_1(t),\dots,R_{2(p+q)}(t)$ линейно независимы, мы имеем $\sigma_L^{T,s}\left\{s^{-i}\left[\mathcal{V}(s^{-1})\right]_j\right\} + \sigma_L^{H,s}\left\{s^{-2-i}\left[\mathcal{V}(s)\right]_j\right\} = 0$ для $j=1,\dots,2(p+q)$. По определению (2.1) это означает, что $[\mathcal{V}(s)]_j \in \mathcal{N}^L_{-2}$.

Так как $L_1(s),\dots,L_{2(p+q)}(s)$– базис $\mathcal{N}^L_{-2}$, мы получаем

$$[\mathcal{V}(s)]_j = \sum_{k=1}^{2(p+q)} v_{jk}L_k(s), \; j=1,\dots,2(p+q), \; v_{jk}\in\mathbb{C}.$$

Представим эти уравнения в матричной форме $\mathcal{V}(s) = V\mathcal{L}(s)$, где

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1\,2(p+q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{2(p+q)\,1} & \dots & v_{2(p+q)\,2(p+q)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}(s) = \begin{pmatrix} L_1(s) \\ \vdots \\ L_{2(p+q)}(s) \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$(t-s)(1-ts)\mathcal{B}(t,s) = \mathcal{R}(t)V\mathcal{L}(s). \tag{4.3}$$

Осталось найти матрицу V. Докажем, что $\Lambda_R V \Lambda_L = \Lambda_0$. Для этого нужно вычислить 16 элементов матрицы $\Lambda_R V \Lambda_L$.

Сравним в (4.3) коэффициенты при s^0 :

$$t\mathcal{B}(t,0) = \mathcal{R}(t)V\mathcal{L}_0. \tag{4.4}$$

Заметим, что $t\mathcal{B}(t,0)$ многочлен по t степени не большей $m+1$, а $\mathcal{R}(t)$ не большей $m+2$. Тогда получаем следующее условие: $\mathcal{R}_{m+2}V\mathcal{L}_0 = 0$. Фактически мы нашли элемент λ_{21} матрицы Λ_0. Если сравнить в (4.4) коэффициенты при t^0, то мы получим элемент $\lambda_{41} = \mathcal{R}_0 V\mathcal{L}_0 = 0$.

Далее заметим, что $\sigma_R^T\{\mathcal{B}(t,0)\} + \sigma_R^H\{\mathcal{B}(t,0)\} = I_p$. (Мы не указываем явно на какую переменную действует оператор, если это не вызывает сомнений.) Это приводит к результату $\lambda_{11} = \left(\sigma_R^T\left\{t^{-1}\mathcal{R}(t)\right\} + \sigma_R^H\left\{t^{-1}\mathcal{R}(t)\right\}\right) V\mathcal{L}_0 = I_p$. Аналогично, замечая,

$$\sigma_R^T\left\{t^{-n}\mathcal{B}(t,0)\right\} + \sigma_R^H\left\{t^{n}\mathcal{B}(t,0)\right\} = 0,$$

получаем $\lambda_{31} = \left(\sigma_R^T\left\{t^{-n-1}\mathcal{R}(t)\right\} + \sigma_R^H\left\{t^{n-1}\mathcal{R}(t)\right\}\right) V\mathcal{L}_0 = 0$. Аналогично могут быть найдены и оставшиеся элементы. Ввиду ограниченности места мы не приводим полного доказательства.

Итак, $\Lambda_R V \Lambda_L = \Lambda_0$. Все матрицы в этом выражении квадратные и, очевидно, $(\Lambda_0)^{-1} = \Lambda_0$. Тогда каждая из Λ_R, V, Λ_L обратима и

$$V = \Lambda_R^{-1}\Lambda_0\Lambda_L^{-1} = (\Lambda_L\Lambda_0\Lambda_R)^{-1} = \Lambda^{-1}.$$

Теорема доказана. ■

Отметим, что уже созданная теория для теплицевых матриц (см. [2]) не является частным случаем этой теории при нулевой H-последовательности, так как в данном случае мы иначе определяем разности Δ_k^R. Этим обьясняются некоторые расхождения с результатами для теплицевых матриц.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект N 01-01-96422. Один из авторов (Ибряева О.Л.) благодарит за финансовую поддержку программу молодежных грантов для студентов, аспирантов и молодых ученых Челябинской области.

Литература

1. Адуков В.М. Структура ядра и обращение блочных теплицевых матриц / Ред. Сиб. мат. журн. – Новосибирск, 1985. – 20 с. Деп. в ВИНИТИ 29.12.85, N 9030-В.

2. Adukov V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices// *Linear Algebra Appl.* – 1998. – V. 274. – P. 85-124.

3. Heinig G., Jankowski P. Kernel structure of block Hankel and Toeplitz matrices and partial realization// *Linear Algebra Appl.* – 1992. – V. 175. – P. 1–30.

4. Адуков В.М. Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций// *Алгебра и анализ.* – 1992. – Т. 4, Вып. 1. – С. 54–74.

5. Адуков В.М. О равномерной сходимости подпоследовательностей $(\lambda-1)$-й строки таблицы Паде// *Известия Челябинского научного центра.* – 2001. – Вып. 1. – С. 3–7.

6. Адуков В.М. О геометрии множества предельных точек полюсов $(\lambda-1)$-й строки таблицы Паде// *Известия Челябинского научного центра.* – 2001. – Вып. 1. – С. 8–11.

7. Adukov V.M. The essential polynomial approach to convergence of matrix Padé approximants// *Contemporary Math.* – 2001. – V. 280. – P. 71–87.