УДК 512.64

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПОЛНОТЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ DL

М.Н. Шматков

В данной работе рассматриваются вопросы, относящиеся к теории вычислимости. Проводится подробное детальное доказательство теоремы о полноте исчисления динамической логики DL, приведенной Ю.Л. Ершовым в работе [6].

Введение

Проблема вычислимости является в настоящее время в математике объектом все более активного изучения и исследования. Наряду с потребностями развития теории, это в значительной степени обусловлено быстрым развитием и широким использованием электронной вычислительной техники в самых различных областях человеческой деятельности.

Одними из наиболее актуальных в настоящее время задач проблемы вычислимости являются задачи обобщенной теории вычислимости в произвольных допустимых множествах. К таким задачам относятся задачи динамической логики.

Целью настоящей работы является выполнение нигде ранее не опубликованного подробного детального доказательства теоремы о полноте исчисления динамической логики DL, сформулированной со схемой доказательства Ю.Л. Ершовым в работе [6].

Данная теорема имеет фундаментальное значение для установления доказуемости выражений в исчислении динамической логики DL, так как позволяет значительно повысить эффективность исследований доказуемости выражений в исчислении динамической логики DL путем сведения синтаксического анализа выражения к его семантическому анализу.

Автор благодарен всем, кто оказывал ему помощь и поддержку при выполнении настоящей работы. Отдельная благодарность академику Ю.Л. Ершову за постановку данной проблемы.

1. Предварительные сведения

В обозначениях и определениях, относящихся к теории допустимых множеств, теории вычислимости и исчислению динамической логики DL, будем следовать обозначениям и определениям, принятым в работе [6].

Пусть P входит позитивно в Φ, $\sigma_0 \rightleftharpoons \sigma \setminus \langle P^k \rangle$, $\mathfrak{A}_0$ — алгебраическая система сигнатуры σ_0, $Q \subseteq A_0^k$, $\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle$ есть обогащение $\mathfrak{A}_0$ до σ и $P^{\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle} = Q$.

Предложение 1.1. ([6], Предложение 1.3.2) Если предикат $R \subseteq A_0^k$ таков, что $Q \subseteq R$, то для любой интерпретации $\gamma : FV(\Phi) \to A_0$ имеет место импликация $\langle \mathfrak{A}_0, Q \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathfrak{A}_0, R \rangle \models \Phi[\gamma]$.

Теорема 1.1. ([6], Теорема 3.6.1) [Ганди] Пусть $\Phi(x_0, x_1, P_0, \ldots, P_{n-1}, P_n)$ — Σ^+-формула сигнатуры σ^{n+1}. Существует Σ^+-формула $\Psi(x_0, x_1, P_0, \ldots, P_{n-1})$ сигнатуры σ^n такая, что для любых KPU$^+$-модели $\mathbb{A}^+$ сигнатуры σ^n и элемента $a \in A$ множество $\Psi(x_0, a, \overline{P})^{\mathbb{A}^+}[x_0]$ является неподвижной точкой оператора $\Gamma : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, определенного по формуле Φ так:

$$\Gamma(Q) \rightleftharpoons \{b \in A \mid \langle \mathbb{A}, Q_0, \ldots, Q_{n-1}, Q \rangle \models \Phi(b, a, \overline{P}, P_n)\}, \qquad Q \subseteq A.$$

Замечание 1.1. ([6], Замечание 3.6.1) Можно утверждать существование формулы Ψ, определяющей наименьшую формульную неподвижную точку оператора Γ или даже наименьшее формульное подмножество среди всех таких M что $\Gamma(M) \subseteq M$.

Теорема 1.2. (Гёделя о полноте, [6]) Формула является доказуемой тогда и только тогда, когда она тождественно истинна.

Лемма 1.1. ([6], Лемма 3.7.1) Пусть $\Phi(x, \overline{x}, \overline{P}, P_n)$ — Σ^+-формула сигнатуры σ^{n+1} и $\Phi_G(x, \overline{x}, \overline{P})$ — Σ^+-формула сигнатуры σ^n, которая выражает следующее:

$$\exists f \exists \alpha (Ord(\alpha) \wedge f \text{ — функция}$$
$$\wedge \delta_f = \alpha \wedge f(0) = \varnothing \wedge \forall \beta \in \alpha \forall y \in f(\beta)$$
$$\Phi(y, \overline{x}, \overline{P}, \bigcup_{\gamma \in \beta} f(\gamma)) \wedge \exists \beta \in \alpha (x \in f(\beta))).$$

Тогда для любой KPU$^+$-модели $\langle \mathbb{A}, Q_0, \ldots, Q_{n-1} \rangle$ сигнатуры σ^n и любых $a_0, \ldots, a_{k-1} \in A$ множество $\Phi_G^{\langle \mathbb{A}, \overline{Q} \rangle}(x, \overline{a}, \overline{P})[x]$ есть наименьшая (среди Σ^+-подмножеств $\langle \mathbb{A}, \overline{Q} \rangle$) неподвижная точка оператора, определенного Σ^+-формулой $\Phi(x, \overline{a}, \overline{Q}, P_n^+)$.

Теорема 1.3. ([6], Теорема 3.7.1) Справедливы следующие утверждения:

(a) для любой Σ^+-формулы Φ языка DL существуют число $n \in \omega$ и такая Σ^+-формула Φ_* сигнатуры σ^n, что $FV_*(\Phi) = FV(\Phi_*)$, а для любой пары $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle$, где $\mathbb{A}$ — KPU-модель, $\mathcal{P}$ — Σ-допустимое семейство для $\mathbb{A}$, и для любой интерпретации $\gamma : X \to A \cup \mathcal{P}$ свободных переменных $\Phi(\Phi_*)$ имеет место эквивалентность

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_*[\gamma];$$

(b) для любой программы α существуют число $n \in \omega$, Σ^+-формула Φ_α сигнатуры σ^n и предметная переменная $x \notin FV_*(\alpha)$ такие, что $FV(\Phi_\alpha) = FV_*(\alpha) \cup \{x\}$, а для любой пары $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle$, где $\mathbb{A}$ — KPU-модель, $\mathcal{P}$ — Σ-допустимое семейство для $\mathbb{A}$, и для любой интерпретации $\gamma : X \to A \cup \mathcal{P}$ свободных переменных α имеет место равенство

$$\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = [\lambda x \Phi_\alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma].$$

Лемма 1.2. ([6], Лемма 3.7.2) Справедливы следующие утверждения:

(a) для любой Σ^+-формулы Φ языка DL, если Φ_* — Σ^+-формула сигнатуры σ^n, построенная по Φ в доказательстве теоремы 3.7.1, то в исчислении DL доказуемо выражение $\Phi \equiv \Phi_*$,

(b) для любой программы α, если Φ_α — Σ^+-формула сигнатуры σ^n, построенная по α в доказательстве теоремы 3.7.1, то в исчислении DL доказуемо выражение $\alpha \equiv [\lambda x \Phi_\alpha]$.

2. Теорема о полноте исчисления динамической логики DL

В данном разделе проводится подробное доказательство теоремы о полноте исчисления динамической логики DL, приведенной Ю.Л. Ершовым в работе [6].

Далее, если не оговорено особо, будем использовать следующие обозначения:

$$\gamma_a \rightleftharpoons (\gamma \setminus (\{x\} \times A)) \cup \{\langle x, a \rangle\}$$
$$\gamma_Q \rightleftharpoons (\gamma \setminus (\{P_n\} \times \mathcal{P})) \cup \{\langle P_n, Q \rangle\}$$

Теорема[о полноте]. Справедливы следующие утверждения:

(a) если Φ и Ψ — Σ^+-формулы языка DL, то выражение $\Phi \sqsubseteq \Psi$ доказуемо в исчислении DL тогда и только тогда, когда для любых KPU-модели $\mathbb{A}$, Σ-допустимого семейства $\mathcal{P}$ для $\mathbb{A}$ и интерпретации $\gamma : X \to A \cup \mathcal{P}$ свободных переменных формул Φ и Ψ имеет место импликация

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Psi[\gamma];$$

(b) если α и β — программы, то выражение $\alpha \sqsubseteq \beta$ доказуемо в исчислении DL тогда и только тогда, когда для любых KPU-модели $\mathbb{A}$, Σ-допустимого семейства $\mathcal{P}$ для $\mathbb{A}$ и интерпретации $\gamma : X \to A \cup \mathcal{P}$ свободных переменных программ α и β имеет место включение

$$\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma].$$

Доказательство.

$\Rightarrow$: Зафиксируем произвольно KPU-модель $\mathbb{A}$, Σ-допустимое семейство $\mathcal{P}$ для $\mathbb{A}$ и интерпретацию $\gamma : X \to A \cup \mathcal{P}$

1. Проверим заключение теоремы для аксиом.

$E \sqsubseteq E$:

(a) E — Σ^+-формула Φ. Тогда $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma]$.

(b) E — программа α. Тогда $\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$.

$E_i \sqsubseteq E_0 \vee E_1, i = 0, 1$:

(a) E_i — Σ^+-формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем: $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_i[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma]$ или $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_0 \vee \Phi_1)[\gamma]$.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Имеем:
$\alpha_i^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \cup \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = (\alpha_0 \vee \alpha_1)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$.

$E_0 \wedge E_1 \sqsubseteq E_i, i = 0, 1$:

(a) E_i — Σ^+-формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi_0 \wedge \Phi_1)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_0[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi_i[\gamma], i = 0, 1$.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Имеем:
$(\alpha_0 \wedge \alpha_1)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \cap \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_i^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma], i = 0, 1$.

$x = y \wedge (E)^z_x \sqsubseteq (E)^z_y$:

(a) E_i — Σ^+-формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (x = y \wedge (\Phi)^z_x)[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) = \gamma(y)$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_{\gamma(y)}] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)^z_y[\gamma]$
где $\gamma_a \rightleftharpoons (\gamma \setminus (\{z\} \times A)) \cup \{\langle z, a \rangle\}$.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Определим γ_a как в пункте (a). Имеем:

$$\begin{aligned}
(x = y \wedge (\alpha)^z_x)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] &= \begin{cases} (\alpha)^{z\,\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}_x[\gamma], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x = y[\gamma] \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_{\gamma(x)}], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x = y[\gamma] \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_{\gamma(y)}], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x = y[\gamma] \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} \\
&\subseteq ((\alpha)^z_y)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma].
\end{aligned}$$

$\Phi \sqsubseteq T$:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models x_0 = x_0[\gamma]$.

$\alpha \sqsubseteq \tau$:
$\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \subseteq A = \tau^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma]$.

II

$\forall x \in t_0 E \wedge t_1 \in t_0 \sqsubseteq (E)^x_{t_1}$:

(a) E — Σ^+-формула Φ. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\forall x \in t_0 \Phi \wedge t_1 \in t_0)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \forall x \in t_0 \Phi[\gamma]$ и$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models t_1 \in t_0[\gamma] \Rightarrow$ $(\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_a]$ для любого $a \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma])$ и $a_1 \rightleftharpoons t_1^{\mathbb{A}}[\gamma] \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_{a_1}] \Rightarrow$ $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)^x_{t_1}[\gamma]$.

(b) E — программа α. Имеем:
$([\forall x \in t_0 \alpha] \wedge t_1 \in t_0)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] =$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} [\forall x \in t_0 \alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models t_1 \in t_0[\gamma] \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \cap \left\{ \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \mid a \in A, a \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \right\}, & \text{если } a_1 \rightleftharpoons t_1^{\mathbb{A}}[\gamma] \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} \\
&\subseteq \begin{cases} \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_{a_1}], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models t_1 \in t_0[\gamma] \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} \\
&\subseteq \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_{a_1}] = \left((\alpha)^x_{t_1} \right)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma].
\end{aligned}
$$

$(E)^x_{t_1} \wedge t_1 \in t_0 \sqsubseteq \exists x \in t_0 E$:

(a) E — Σ^+-формула Φ. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models ((\Phi)^x_{t_1} \wedge t_1 \in t_0)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)^x_{t_1}[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models t_1 \in t_0[\gamma] \Rightarrow$ $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_a]$ $a \rightleftharpoons t_1^{\mathbb{A}}[\gamma] \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \exists x \in t_0 \Phi$.

(b) E — программа α. Имеем:

$$
\begin{aligned}
((\alpha)^x_{t_1} \wedge t_1 \in t_0)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] &= \begin{cases} ((\alpha)^x_{t_1})^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models t_1 \in t_0[\gamma] \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a], & \text{если } a \rightleftharpoons t_1^{\mathbb{A}}[\gamma] \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} \\
&\subseteq \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \subseteq \cup \{ \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_{a_1}] \mid a_1 \in A, a_1 \in t_0^{\mathbb{A}}[\gamma] \} \\
&= [\exists x \in t_0 \alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma].
\end{aligned}
$$

$(E)^x_t \wedge \alpha(t) \sqsubseteq \exists x \in \alpha E$:

(a) E — Σ^+-формула Φ. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models ((\Phi)^x_t \wedge \alpha(t))[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)^x_t[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(t)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models (\Phi)^x_t[\gamma]$ и $a \rightleftharpoons t^{\mathbb{A}}[\gamma] \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \Phi[\gamma_a]$ и $a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \exists x \in \alpha \Phi[\gamma]$.

(b) E — программа β. Имеем:

$$
\begin{aligned}
((\beta)^x_t \wedge \alpha(t))[\gamma] &= \begin{cases} ((\beta)^x_t)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma], & \text{если } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle \models \alpha(t)[\gamma] \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a], & \text{если } a \rightleftharpoons t^{\mathbb{A}}[\gamma] \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases} \\
&\subseteq \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_a] \\
&\subseteq \cup \{ \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma_{a_1}] \mid a_1 \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma] \} \\
&= [\exists x \in \alpha \beta]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P} \rangle}[\gamma].
\end{aligned}
$$

$\exists x \in \alpha E \sqsubseteq \exists y(\alpha(y) \wedge (E)^x_y)$ для $y \neq x$, не встречающегося в α и E:

(a) E — Σ^+-формула Φ. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \exists x \in \alpha\Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma_a]$ для некоторого $a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow$ $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \alpha(y)[\gamma'_a]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi)^x_y[\gamma'_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \left(\alpha(y) \wedge (\Phi)^x_y\right)[\gamma'_a] \Rightarrow$ $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \exists y\left(\alpha(y) \wedge (\Phi)^x_y\right)[\gamma]$, где $\gamma'_a \rightleftharpoons (\gamma \setminus (\{y\} \times A)) \cup \{\langle y, a\rangle\}$.

(b) E — программа β. Имеем:

$$\begin{aligned}(\exists x \in \alpha\beta)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] &= \cup\{\beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]\}\\ &= \cup\{\left((\beta)^x_y\right)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma'_a] \mid a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]\}\\ &= \cup\{\left(\alpha(y) \wedge (\beta)^x_y\right)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma'_a] \mid a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]\}\\ &\subseteq \cup\{\left(\alpha(y) \wedge (\beta)^x_y\right)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma'_a] \mid a \in A\}\\ &= \exists y\left(\alpha(y) \wedge (\beta)^x_y\right)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma],\end{aligned}$$

где γ'_a определено как в пункте (a).

$(E)^x_t \sqsubseteq \exists x E$:

(a) E — Σ^+-формула Φ. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi)^x_t[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma_{t^{\mathbb{A}}[\gamma]}] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \exists x\Phi[\gamma]$.

(b) E — программа α. Имеем:
$((\alpha)^x_t)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_{t^{\mathbb{A}}[\gamma]}] \subseteq \cup\left\{\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in A\right\} = \exists x\alpha$.

III

$[\lambda x\Phi](x) \equiv \Phi$:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models [\lambda x\Phi](x)[\gamma] \Leftrightarrow \gamma(x) \in [\lambda x\Phi]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Leftrightarrow$
$\gamma(x) \in \{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma_a]\} \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma]$.

$[\lambda x P_0(x)] \equiv P_0$:
$[\lambda x P_0(x)]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models P_0(x)[\gamma_a]\} = \{a \mid a \in A, a \in \gamma(P_0)\} = \gamma(P_0) = P_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$.

IV

$\alpha(x) \wedge \beta(x) \sqsubseteq [\alpha \wedge \beta](x)$:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \alpha(x) \wedge \beta(x)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \alpha(x)[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \beta(x)[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$ и
$\gamma(x) \in \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle} \cap \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) \in [\alpha \wedge \beta]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models [\alpha \wedge \beta](x)[\gamma]$.

$[\alpha \vee \beta](x) \sqsubseteq \alpha(x) \vee \beta(x)$:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models [\alpha \vee \beta](x)[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) \in [\alpha \vee \beta]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \cup \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow \gamma(x) \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$ или $\gamma(x) \in \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \alpha(x)[\gamma]$ или $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \beta(x)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \alpha(x) \vee \beta(x)[\gamma]$.

$[\alpha \wedge \Phi](x) \equiv [\Phi \wedge \alpha](x) \equiv \alpha(x) \wedge \Phi$:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models [\alpha \wedge \Phi](x)[\gamma] \Leftrightarrow \gamma(x) \in [\alpha \wedge \Phi]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Leftrightarrow \gamma(x) \in [\Phi \wedge \alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models [\Phi \wedge \alpha](x)[\gamma]$ $\Leftrightarrow \gamma(x) \in [\Phi \wedge \alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Leftrightarrow \gamma(x) \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \alpha(x)[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma]$ $\Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \alpha(x) \wedge \Phi[\gamma]$.

$[\alpha \vee \Phi](x) \equiv [\Phi \vee \alpha](x) \equiv \alpha(x) \vee \Phi$:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models [\alpha \vee \Phi](x)[\gamma] \Leftrightarrow \gamma(x) \in [\alpha \vee \Phi]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Leftrightarrow \gamma(x) \in [\Phi \vee \alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models [\Phi \vee \alpha](x)[\gamma] \Leftrightarrow$
$\gamma(x) \in [\Phi \vee \alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Leftrightarrow \gamma(x) \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$ или $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \alpha(x)[\gamma]$ или $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma] \Leftrightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \alpha(x) \vee \Phi[\gamma]$.

V

$\Phi \sqsubseteq \Psi$, если Φ и Ψ — Σ^{+}-формулы сигнатуры σ^{n} и $\Phi \to \Psi$ есть теорема теории KPU^{+} сигнатуры σ^{n}.

По теореме Гёделя 1.2 о полноте, формула доказуема тогда и только тогда, когда она тождественно истинна. Поэтому, формула $\Phi \to \Psi$ тождественно истинна. Далее:

$$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi \to \Psi)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \not\models \Phi[\gamma] \text{ или } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Psi[\gamma] \Rightarrow$$
$$\Big(\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma] \text{ следует } \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Psi[\gamma]\Big).$$

VI

$\langle P_n\rangle[\lambda x\Phi(x,\overline{x},\overline{P},P_n)] \equiv [\lambda x\Phi_G(x,\overline{x},\overline{P})]$, где Φ и Φ_G — те же, что и в лемме 1.1([6], 3.7.1). $(\langle P_n\rangle[\lambda x\Phi(x,\overline{x},\overline{P},P_n)])^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$ — наименьшая неподвижная точка оператора Γ, определенного равенством:

$$\Gamma(Q) = [\lambda x\Phi(x,\overline{x},\overline{P},P_n)]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_Q] = \big\{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi(a,\overline{x},\overline{P},P_n)[\gamma_Q]\big\}$$

Это в точности есть оператор из теоремы Ганди(1.1([6], 3.6.1)). По замечанию 1.1([6], 3.6.1) $[\lambda x\Phi_G(x,\overline{x},\overline{P})]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$ — наименьшая неподвижная точка того же оператора, следовательно

$$(\langle P_n\rangle[\lambda x\Phi(x,\overline{x},\overline{P},P_n)])^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = [\lambda x\Phi_G(x,\overline{x},\overline{P})]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma].$$

VII

$(\alpha)^{P_n}_{\langle P_n\rangle\alpha} \equiv \langle P_n\rangle\alpha$:
$\left((\alpha)^{P_n}_{\langle P_n\rangle\alpha}\right)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_{(\langle P_n\rangle\alpha)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]}] = \Gamma\left((\langle P_n\rangle\alpha)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]\right) = (\langle P_n\rangle\alpha)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma].$

2. Проверим для каждого правила вывода, что если выражение над чертой удовлетворяет заключению теоремы, то и выражение под чертой удовлетворяет заключению теоремы.

I

$\dfrac{E_0 \sqsubseteq E_1}{(E_0)^x_t \sqsubseteq (E_1)^x_t}$:

(a) E_i — Σ^{+}-формула $\Phi_i, i = 0,1$. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi_0)^x_t[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma_{t^{\mathbb{A}}[\gamma]}] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma_{t^{\mathbb{A}}[\gamma]}] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi_1)^x_t[\gamma]$.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0,1$. Имеем:
$(\alpha_0)^{x\,\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}_t[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_{t^{\mathbb{A}}[\gamma]}] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_{t^{\mathbb{A}}[\gamma]}] = (\alpha_1)^{x\,\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}_t[\gamma]$.

$\dfrac{E_0 \sqsubseteq E_1}{(E_0)^{P_n}_\alpha \sqsubseteq (E_1)^{P_n}_\alpha}$:

(a) E_i — Σ^{+}-формула $\Phi_i, i = 0,1$. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi_0)^{P_n}_\alpha[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma'] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma'] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi_1)^{P_n}_\alpha[\gamma]$, где $\gamma' \rightleftharpoons (\gamma \setminus (\{P_n\} \times \mathcal{P}) \cup \{\langle P_n, \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]\rangle\}$.

(b) E_i – программа $\alpha_i, i = 0,1$. Имеем:
$(\alpha_0)^{P_n\,\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}_\alpha[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma'] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma'] = (\alpha_1)^{P_n\,\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}_\alpha[\gamma]$, где γ' определено в пункте (a).

II

$$\frac{E_0 \sqsubseteq E_1, E_1 \sqsubseteq E_2}{E_0 \sqsubseteq E_2}:$$

(a) E_i — Σ^+-формула $\Phi_i, i = 0,1,2$. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_2[\gamma]$.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0,1,2$. Имеем:
$\alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_2^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$.

$$\frac{E_0 \sqsubseteq E, E_1 \sqsubseteq E}{E_0 \vee E_1 \sqsubseteq E}:$$

(a) E, E_0, E_1 — Σ^+-формулы Φ, Φ_0, Φ_1 соответственно. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi_0 \vee \Phi_1)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma]$ или $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma]$ или $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma]$.

(b) E, E_0, E_1 — программы $\alpha, \alpha_0, \alpha_1$ соответственно. Имеем:
$(\alpha_0 \vee \alpha_1)^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \cup \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \cup \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$.

$$\frac{E \sqsubseteq E_0, E \sqsubseteq E_1}{E \sqsubseteq E_0 \wedge E_1}:$$

(a) E, E_0, E_1 — Σ^+-формулы Φ, Φ_0, Φ_1 соответственно. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi_0 \wedge \Phi_1)[\gamma]$.

(b) E, E_0, E_1 — программы $\alpha, \alpha_0, \alpha_1$ соответственно. Имеем:
$\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma], \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \cap \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$
$= [\alpha_0 \wedge \alpha_1]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$.

$$\frac{E_0 \sqsubseteq E_1}{E_0 \sqsubseteq E_1 \wedge T}:$$

(a) E_i — Σ^+-формула $\Phi_i, i = 0,1, T = (x_0 = x_0)$. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0(\gamma) \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models x_0 = x_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi_1 \wedge T)[\gamma]$.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0,1, T = \lambda x_0[x_0 = x_0]$. Имеем:
$\alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \cap A = \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \cap T^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = [\alpha_1 \wedge T]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$.

$$\frac{E_0 \sqsubseteq E_1}{E_0 \wedge T \sqsubseteq E_1}:$$

(a) E_i — Σ^+-формула $\Phi_i, i = 0,1, T = (x_0 = x_0)$. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\Phi_0 \wedge x_0 = x_0)[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models x_0 = x_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma]$.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0,1, T = \lambda x_0[x_0 = x_0]$. Имеем:
$[\alpha_0 \wedge T]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \cap T^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \cap A = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$.

III

$$\frac{(x \in t \wedge E_0) \sqsubseteq E_1}{E_0 \sqsubseteq \forall x \in t E_1},$$ если x не входит свободно в E_0:

(a) E_i — Σ^+-формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Зафиксируем $a \in t^{\mathbb{A}}[\gamma]$. Поскольку x не входит свободно в Φ_0 имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \gamma_a(x) \in t^{\mathbb{A}}[\gamma]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (x \in t \wedge \Phi_0)[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma_a]$
Отсюда $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma_a]$ для любого $a \in t^{\mathbb{A}}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \forall x \in t\Phi_1[\gamma]$.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Зафиксируем $a \in t^{\mathbb{A}}[\gamma]$. Поскольку x не входит свободно в α_0 имеем:
$$\alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] = [x \in t \wedge \alpha_0]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \subseteq \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a].$$
Следовательно, $\alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \cap\{\alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in t^{\mathbb{A}}[\gamma]\} = [\forall x \in t\alpha_1]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$.

$\dfrac{(x \in t \wedge E_0) \sqsubseteq E_1}{\exists x \in tE_0 \sqsubseteq E_1}$, если x не входит свободно в E_1:

(a) E_i — Σ^+-формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \exists x \in t\Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma_a]$ для некоторого $a \in t^{\mathbb{A}}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models x \in t[\gamma_a]$ и $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (x \in t \wedge \Phi_0)[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma]$ так как x не входит свободно в Φ_1.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Поскольку x не входит свободно в α_1 имеем:
$$\begin{aligned}[][\exists x \in t\alpha_0]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] &= \cup\{\alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in A, a \in t^{\mathbb{A}}[\gamma]\}\\ &= \cup\{[x \in t \wedge \alpha_0]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in A, a \in t^{\mathbb{A}}[\gamma]\}\\ &\subseteq \cup\{\alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in A, a \in t^{\mathbb{A}}[\gamma]\}\\ &= \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma].\end{aligned}$$

$\dfrac{\alpha(x) \wedge E_0 \sqsubseteq E_1}{\exists x \in \alpha E_0 \sqsubseteq E_1}$, если x не входит свободно в E_1:

(a) E_i — Σ^+-формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \exists x \in \alpha\Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma_a]$ для некоторого $a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models (\alpha(x) \wedge \Phi_0)[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma]$ так как x не входит свободно в Φ_1.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Поскольку x не входит свободно в α_1 имеем:
$$\begin{aligned}[][\exists x \in \alpha\alpha_0]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] &= \cup\{\alpha_0^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]\}\\ &= \cup\{[\alpha(x) \wedge \alpha_0]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]\}\\ &\subseteq \cup\{\alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]\}\\ &= \alpha_1^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma].\end{aligned}$$

$\dfrac{E_0 \sqsubseteq E_1}{\exists x E_0 \sqsubseteq E_1}$, если x не входит свободно в E_1:

(a) E_i — Σ^+-формула $\Phi_i, i = 0, 1$. Имеем:
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \exists x\Phi_0[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_0[\gamma_a]$ для некоторого $a \in A \Rightarrow$
$\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma_a] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_1[\gamma]$ так как x не входит свободно в Φ_1.

(b) E_i — программа $\alpha_i, i = 0, 1$. Поскольку x не входит свободно в α_1 имеем:

$$\begin{array}{rcl}[\exists x\alpha_0]^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] & = & \cup\{\alpha_0^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in \alpha^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]\} \\ & \subseteq & \cup\{\alpha_0^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in A\} \\ & \subseteq & \cup\{\alpha_1^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma_a] \mid a \in A\} \\ & = & \cup\{\alpha_1^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] \mid a \in A\} \\ & = & \alpha_1^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma].\end{array}$$

IV

$\dfrac{\alpha \sqsubseteq \beta}{\alpha(t) \sqsubseteq \beta(t)}$:

$\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \alpha(t)[\gamma] \Rightarrow t^{\mathbb{A}}[\gamma] \in \alpha^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow t^{\mathbb{A}}[\gamma] \in \beta^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] \Rightarrow \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \beta(t)[\gamma]$.

$\dfrac{\alpha \sqsubseteq \beta}{(E)_\alpha^{P_n} \sqsubseteq (E)_\beta^{P_n}}$:

(a) E — Σ^+-формула Φ. По теореме 1.3 ([6], 3.7.1) существуют $n \in \omega$, Σ^+-формула Φ_* сигнатуры σ^n такие, что для любых подходящих $\mathbb{A}'$, $\mathcal{P}'$, γ' выполняется $\langle\mathbb{A}',\mathcal{P}'\rangle \models \Phi[\gamma'] \Leftrightarrow \langle\mathbb{A}',\mathcal{P}'\rangle \models \Phi_*[\gamma']$. Определим

$$\begin{array}{rcl}\gamma^\alpha & \rightleftharpoons & (\gamma \setminus (\{P_n\} \times \mathcal{P})) \cup \{\langle P_n, \alpha^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]\rangle\} \\ \gamma^\beta & \rightleftharpoons & (\gamma \setminus (\{P_n\} \times \mathcal{P})) \cup \{\langle P_n, \beta^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]\rangle\}\end{array}$$

Имеем:
$\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models (\Phi)_\alpha^{P_n}[\gamma] \Rightarrow \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma^\alpha] \Rightarrow \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi_*[\gamma^\alpha]$
Поскольку P_n входит в Φ_* положительно, $\alpha^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \beta^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]$, по предложению 1.1 ([6], 1.3.2) цепочку импликаций можно продолжить следующим образом:
$\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi_*[\gamma^\alpha] \Rightarrow \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi_*[\gamma^\beta] \Rightarrow \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma^\beta] \Rightarrow \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models (\Phi)_\beta^{P_n}[\gamma]$.

(b) E — программа α_0. По теореме 1.3 ([6], 3.7.1) существуют $n \in \omega$, Σ^+-формула Φ_* сигнатуры σ^n такие, что для любых подходящих $\mathbb{A}'$, $\mathcal{P}'$, γ' выполняется $\alpha_0^{\langle\mathbb{A}',\mathcal{P}'\rangle}[\gamma'] = [\lambda x\Phi_*]^{\langle\mathbb{A}',\mathcal{P}'\rangle}[\gamma']$. Определим γ^α и γ^β как в пункте (a). Имеем:
$(\alpha_0)_\alpha^{P_n\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \alpha_0^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma^\alpha] = [\lambda x\Phi_*]^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma^\alpha] = \{a \mid a \in A, \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi_*[\gamma_a^\alpha]\}$
Поскольку P_n входит в Φ_* положительно, $\alpha^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \beta^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]$, по предложению 1.1([6], 1.3.2) цепочку равенств можно продолжить следующим образом:

$$\begin{array}{rcl}\{a \mid a \in A, \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi_*[\gamma_a^\alpha]\} & \subseteq & \left\{a \mid a \in A, \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi_*[\gamma_a^\beta]\right\} \\ & = & [\lambda x\Phi_*]^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma^\beta] \\ & = & \alpha_0^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma^\beta] \\ & = & (\alpha_0)_\beta^{P_n\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma].\end{array}$$

$\dfrac{\Phi \sqsubseteq \Psi}{[\lambda x\Phi] \sqsubseteq [\lambda x\Psi]}$:

$[\lambda x\Phi]^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \{a \mid a \in A, \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma_a]\} \subseteq \{a \mid a \in A, \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Psi[\gamma_a]\} = [\lambda x\Psi]^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]$.

V

$\dfrac{(\alpha)_\beta^{P_n} \sqsubseteq \beta}{\langle P_n\rangle\alpha \sqsubseteq \beta}$:

По условию имеет место включение: $\Gamma(\beta^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]) = ((\alpha)_\beta^{P_n})^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \beta^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]$, где Γ — оператор, определенный следующим равенством:

$$\Gamma(Q) \rightleftharpoons \alpha^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma_Q], \qquad \gamma_Q \rightleftharpoons \gamma \cup \{\langle P_n, Q\rangle\}$$

По замечанию 1.1 ([6], 3.6.1) к теореме Ганди 1.1 ([6], 3.6.1) наименьшая неподвижная точка Δ оператора Γ удовлетворяет условию: $\Delta \subseteq \beta^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]$, но $\Delta = (\langle P_n\rangle\alpha)^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]$.

$\dfrac{\beta \sqsubseteq \langle P_n\rangle\alpha}{(\alpha)_\beta^{P_n} \sqsubseteq \langle P_n\rangle\alpha}$:

Имеет место включение: $\beta^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq (\langle P_n\rangle\alpha)^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]$. В силу мотонности оператора Γ, определенного выше, и определения $\langle P_n\rangle\alpha$ имеем:
$(\alpha)_\beta^{P_n\,\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \Gamma(\beta^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]) \subseteq \Gamma\big((\langle P_n\rangle\alpha)^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]\big) = (\langle P_n\rangle\alpha)^{\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle}[\gamma]$.

Пусть E_i — Σ^+-формула Φ_i или программа $\alpha_i, i = 0, 1$, и выражение $E_0 \sqsubseteq E_1$ доказуемо в исчислении DL. Пусть

$$\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n = (E_0 \sqsubseteq E_1)$$

доказательсто выражения $E_0 \sqsubseteq E_1$ в DL.

Индукцией по длине доказательства докажем, что для выражения $E_0 \sqsubseteq E_1$ выполнено заключение теоремы.

База индукции. По определению вывода $\mathfrak{S}_0$ может быть только аксиомой DL, следовательно, по доказанному выше, для $\mathfrak{S}_0$ выполнено заключение теоремы.

Шаг индукции. Пусть $0 < k \leqslant n$ и для всех $l < k$ доказано, что для $\mathfrak{S}_l$ выполнено заключение теоремы. Тогда имеет место один из двух случаев.

(1) $\mathfrak{S}_k$ — аксиома DL. Тогда по доказанному выше для $\mathfrak{S}_k$ выполнено заключение теоремы.

(2) $\mathfrak{S}_k$ — результат применения одного из правил вывода исчисления DL к выражению $\mathfrak{S}_l, l < k$ (к выражениям $\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_m, l, m < k$). Но по предположению индукции для выражения $\mathfrak{S}_l$ (для выражений $\mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_m$) заключение теоремы выполнено, следовательно, по доказанному выше, заключение теоремы выполнено и для $\mathfrak{S}_k$.

Поэтому, в силу принципа математической индукции, для $\mathfrak{S}_n = (E_0 \sqsubseteq E_1)$ выполнено заключение теоремы.

$\Leftarrow$: Докажем теорему в обратную сторону.

Случай (а).

Пусть Φ, Ψ — Σ^+-формулы такие, что

$$\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Psi[\gamma]$$

при всех подходящих $\mathbb{A}$, $\mathcal{P}$, γ.

По лемме 1.2([6], 3.7.2) существуют Σ^+-формулы Φ_*, Ψ_* сигнатуры σ^n такие, что выражения $\Phi \equiv \Phi_*$, $\Psi \equiv \Psi_*$ доказуемы в DL. Тогда по уже доказанной первой части теоремы имеем:
$\langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi_*[\gamma] \Rightarrow \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Phi[\gamma] \Rightarrow \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Psi[\gamma] \Rightarrow \langle\mathbb{A},\mathcal{P}\rangle \models \Psi_*[\gamma]$ для всех подходящих $\mathbb{A}$, $\mathcal{P}$, γ.

Но тогда по теореме Гёделя 1.2 о полноте $\Phi_* \to \Psi_*$ — теорема теории KPU^+ сигнатуры σ^n, следовательно, $\Phi_* \sqsubseteq \Psi_*$ — аксиома DL. Отсюда выражения $\Phi \sqsubseteq \Phi_*$, $\Phi_* \sqsubseteq \Psi_*$, $\Psi_* \sqsubseteq \Psi$ доказуемы в DL. Поэтому выражение $\Phi \sqsubseteq \Psi$ доказуемо в DL, что и требовалось доказать.

Случай (b).

Пусть α, β — программы такие, что

$$\alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \subseteq \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma]$$

при всех подходящих $\mathbb{A}$, $\mathcal{P}$, γ.

По лемме 1.2([6], 3.7.2) существуют Σ^+-формулы Φ_α, Φ_β сигнатуры σ^n такие, что выражения $\alpha \equiv [\lambda x \Phi_\alpha]$, $\beta \equiv [\lambda x \Phi_\beta]$ доказуемы в DL. Тогда по уже доказанной первой части теоремы имеем:

$$\begin{aligned}\{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_\alpha[\gamma_a]\} &= [\lambda x \Phi_\alpha]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = \alpha^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \\ &\subseteq \beta^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] = [\lambda x \Phi_\beta]^{\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle}[\gamma] \\ &= \{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_\beta[\gamma_a]\},\end{aligned}$$

то есть

$$\{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_\alpha[\gamma_a]\} \subseteq \{a \mid a \in A, \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_\beta[\gamma_a]\}.$$

Отсюда $\langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_\alpha[\gamma] \Rightarrow \langle \mathbb{A}, \mathcal{P}\rangle \models \Phi_\beta[\gamma]$ при всех подходящих $\mathbb{A}$, $\mathcal{P}$, γ. Тогда по теореме Гёделя 1.2 о полноте $\Phi_\alpha \to \Phi_\beta$ — теорема теории KPU^+ сигнатуры σ^n, следовательно, $\Phi_\alpha \sqsubseteq \Phi_\beta$ — аксиома DL. Поэтому выражение $[\lambda x \Phi_\alpha] \sqsubseteq [\lambda x \Phi_\beta]$ доказуемо в DL.

Таким образом, в DL доказуемы выражения

$$\alpha \sqsubseteq [\lambda x \Phi_\alpha], \quad [\lambda x \Phi_\alpha] \sqsubseteq [\lambda x \Phi_\beta], \quad [\lambda x \Phi_\beta] \sqsubseteq \beta$$

отсюда выражение $\alpha \sqsubseteq \beta$ доказуемо в DL, что и требовалось доказать.

Литература

1. Ершов Ю.Л., Теория нумераций.–М., 1977.
2. Ершов Ю.Л., Проблемы разрешимости и конструктивные модели.–М., 1980.
3. Ершов Ю.Л., Динамическая логика над допустимыми множествами // *ДАН СССР.– 1983. –273:5. –С. 1045–1048.*
4. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика.–М., 1987.
5. Ершов Ю.Л., Σ-определимость и теорема Гёделя о неполноте.–Новосибирск, 1995.
6. Ершов Ю.Л., Определимость и вычислимость.–Новосибирск, 1996.