

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ИЗ КОУРОВСКОЙ ТЕТРАДИ

В.А. Антонов, В.И. Осмоловский

Приведено решение вопроса 10.1 из Коуровской тетради.

С.Н. Адамов и А.Н. Фомин поставили задачу ([1], вопрос 10.1.) описания групп порядка p^9 и степени нильпотентности 2, содержащих такие подгруппы X и Y , что $|X| = |Y| = p^3$ и любые неединичные элементы $x \in X$ и $y \in Y$ неперестановочны. Решением этой задачи является следующая теорема.

Теорема. Пусть G – двуступенно нильпотентная группа порядка p^{3n} . Группа G в том и только том случае содержит такие подгруппы X и Y порядков p^n , что любые неединичные элементы $x \in X$ и $y \in Y$ неперестановочны, когда

$$G = (X \times Z)\lambda Y,$$

где

$$X = \prod_{i=1}^n \langle x_i \rangle, Y = \prod_{i=1}^n \langle y_i \rangle, Z = \prod_{i=1}^n \langle z_i \rangle -$$

элементарные абелевы группы порядка p^n , $[y_i, z_j] = 1$, $[x_i, y_j] = \sum_{k=1}^n z_k t_{ijk}$ для $i, j = 1, 2, \dots, n$, при-

чем матрицы $A_k = (t_{ijk})$ D -независимы, т.е. из $\det(\sum_{k=1}^n \beta_k A_k) \equiv 0(p)$ следует, что $\beta_k \equiv 0(p)$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Пусть G – группа из условия теоремы, $Z = Z(G)$. Так как $Z \cap X = Z \cap Y = 1$ и фактор-группа G/Z абелева, то подгруппы X и Y тоже абелевы и $X \times Z \triangleleft G$. Из $X \times Z \leq C(X)$ следует, что $(X \times Z) \cap Y = 1$. Если $x \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$ неединичные элементы, то из $[x, y_1] = [x, y_2]$ получим, что $y_1 y_2^{-1} \in C(x) \cap Y = 1$. Поэтому $Z = G'$ имеет порядок p^n , $G = (X \times Z)\lambda Y$ и для любых неединичных элементов $x_1 \in X$ и $y_1 \in Y$ выполняются равенства

$$Z = \{[x_1, y] \mid y \in Y\} = \{[x, y_1] \mid x \in X\}.$$

Пусть $x \in X$, $y \in Y$, $g = xy \neq 1$ и $y_1 \in Y$. Из предыдущего абзаца доказательства следует, что найдется такой элемент $x_1 \in X$, что $[x, y_1] = [x_1, y]$. Но тогда $x_1 y_1 \in C(g)$. Это означает, что $|C(g)| = p^{2n}$ для любого $g \in G \setminus Z$. Но тогда $C^2(g) = C(C(g))$ является минимальным централизатором в группе G . Поэтому подгруппы вида $C^2(g)$, где $g \in G$, индуцируют расщепление абелевой группы G/Z . Так как это расщепление содержит две компоненты порядка p^n (XZ/Z и YZ/Z), то G/Z – элементарная абелева группа. Но тогда каждая из подгрупп X , Y , а следовательно и Z , тоже является элементарной абелевой группой. Пусть

$$X = \prod_{i=1}^n \langle x_i \rangle, Y = \prod_{i=1}^n \langle y_i \rangle, Z = \prod_{i=1}^n \langle z_i \rangle.$$

Предположим, что $[x_i, y_j] = \prod_{k=1}^n z_k t_{ijk}$ и $A_k = (t_{ijk})$. Покажем, что матрицы A_k D – независи-

мы. Пусть $\det(\sum_{k=1}^n \beta_k A_k) = 0$ в поле $GF(p)$. Тогда система линейных уравнений

$$(\sum_{k=1}^n \beta_k A_k)[x] = [0]$$

имеет ненулевое решение $[a] = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$. Если положить $x = \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$ и $y = \prod_{i=1}^n y_i^{\alpha_i}$, то, как нетрудно видеть, будем иметь

$$[x, y] = \left[\prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}, \prod_{j=1}^n y_j^{\alpha_j} \right] = \prod_{i,j,k} z_k^{\beta_i \alpha_j t_{ijk}} = \prod_{k=1}^n z_k^{\sum \beta_i \alpha_j t_{ijk}} = 1.$$

Поэтому из $C(y) = Z \cdot Y$ получаем $x = 1$, т.е. $\beta_k = 0$ для $k = 1, 2, \dots, n$.

Достаточность утверждения теоремы очевидна.

Сделаем некоторые дополнительные замечания. Выберем образующие $x_1, x_2, \dots, x_n$ подгруппы X произвольным образом. И пусть $y_1 \in Y \setminus 1$, а y_i при $i > 1$ определяются равенствами $[x_1, y_i] = [x_i, y_1]$. Кроме того, положим $z_i = [x_1, x_i]$. Построенную таким образом систему образующих группы G назовем согласованным базисом. В случае согласованного базиса в матрицах A_k выполняются равенства

$$t_{lik} = t_{ljk} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Предположим, что в группе G существует отличная от $X \times Z$ и $Y \times Z$ абелева подгруппа B порядка p^{2n} . И пусть $B = C(ab)$, где $a \in X$ и $b \in Y$. Положим $x_1 = a$, $y_1 = b$. Если дополнить элементы x_1 и y_1 до согласованного базиса то из $C(x_1 y_1) = Z \cdot \prod_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle$ и $[x_i, y_i, x_j, y_j] = 1$ получим, что матрицы A_k являются симметрическими матрицами.

Если $n = 1$, то G – неабелева группа порядка p^3 . При $n = 2$ в группе G все собственные централизаторы абелевы, т.е. матрицы A_k симметричны в любом согласованном базисе. Рассмотрим случай $n = 3$. Если $p = 2$, то в группе G снова все собственные централизаторы абелевы. Если же $p > 2$, то могут реализоваться все перечисленные ниже возможности.

В группе G все собственные централизаторы абелевы, т.е. матрицы A_k симметрические при любом выборе согласованного базиса. Примером таких групп являются группы $UT(3, p^3)$.

В группе G более двух абелевых подгрупп порядка p^6 и есть неабелев собственный централизатор, т.е. в зависимости от выбора согласованного базиса матрицы A_k могут быть как симметрическими, так и несимметрическими. Такой является, например, группа указанного в теореме типа, имеющая порядок 3^9 и определяющие отношения

$$\begin{aligned} [x_1, y_1] &= z_1, [x_1, y_2] = [x_2, y_1] = z_2, [x_1, y_3] = [x_2, y_2] = [x_3, y_1] = z_3, \\ [x_2, y_3] &= z_1 z_3, [x_3, y_2] = z_1 z_2, [x_3, y_3] = z_2 z_3. \end{aligned}$$

В этой группе $C(x_1 y_1)$ неабелев, а $C(x_1 y_2^{-1})$ абелев.

В группе G ровно две абелевых подгруппы порядка p^6 . В этом случае в любом согласованном базисе хотя бы одна из матриц A_k не является симметрической матрицей. Такую группу получим, если в примере из предыдущего абзаца положить $[x_3, y_2] = z_1 z_2 z_3^2$ и $[x_3, y_3] = z_2$.

Литература

1. Нерешенные вопросы теории групп // *Коуровская тетрадь*. – 13-е изд. – Новосибирск, 1995. – 130 с.