УДК 512.54

ГРУППЫ С ОТНОСИТЕЛЬНО БОЛЬШИМИ ЦЕНТРАЛИЗАТОРАМИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУПП

Н.Н. Аминева

Исследуются конечные группы, в которых для любой инвариантной подгруппы H выполняется неравенство $|N(H):H\cdot C(H)| \le 2$.

Автором совместно с В.А. Антоновым было начато исследование конечных групп, в которых для любой подгруппы H из выделенного множества подгрупп группы G выполняется неравенство $|N(H):H\cdot C(H)| < 2$.

В качестве выделенного множества подгрупп рассматривались: множество всех подгрупп группы G; множество всех абелевых или всех неабелевых подгрупп группы G [1]; всех примарных или всех непримарных подгрупп группы G [2].

В предлагаемой заметке исследуются конечные группы, в которых указанное неравенство выполняется для любой инвариантной подгруппы группы G.

Теорема. *Пусть G – конечная группа, в которой условие $|G:H\cdot C(H)| \le 2$ выполняется для любой инвариантной подгруппы H. Тогда $|G:F^*(G)| \le 2$, и если L – слой группы G, то $G/L \cong K \not\subset S$, $|S:C_S(K)| \le 2$, подгруппа K абелева, а силовская 2-подгруппа S либо абелева, либо фактор-группа $S/Z(S)$ является четверной или диэдральной группой.*

Доказательство. Пусть G – группа из условия теоремы. Отметим, что любая фактор-группа группы G тоже удовлетворяет этому условию. Если слой группы G тривиален, то обобщенная подгруппа Фитинга $F^*(G)$ совпадает с подгруппой Фитинга $F = F(G)$ группы G, и из $C(F) \le F$ следует, что $|G:F| \le 2$, т.е. в этом случае группа G разрешима.

Предположим сначала, что группа G нильпотентна. Если A – максимальный абелев нормальный делитель из G, то из $|G:A| \le 2$ следует, что все силовские p-подгруппы для нечетного p абелевы, а силовская 2-подгруппа либо абелева, либо обладает абелевым нормальным делителем индекса 2. Рассмотрим второй случай.

Пусть $G = A\langle\tau\rangle, \tau^2 \in$ A. Тогда $C(\tau) = \langle\tau\rangle Z(G)$ и $G' = [A, \tau]$. Если ступень нильпотентности c группы G равна 2, то $C(\tau) < G$ и, следовательно, $|G:C(\tau)| \le 2$. Но тогда $|G:Z(G)| = 4$ и $G/Z(G)$ – четверная группа.

Предположим, что $c > 2$. В этом случае $C(G') < G$, т.е. $C(G') = A$. Так как $G'\langle\tau\rangle < G$, то

$$|G:G'\langle\tau\rangle(A \cap C(\tau))| = |G : G'Z(G)\langle\tau\rangle| \le 2 .$$

Учитывая, что коммутант нильпотентной группы содержится в ее подгруппе Фраттини, получаем $|G:G'Z(G)\langle\tau\rangle| = 2$ и $|A:G'Z(G)| = 2$. Из

$$|G'| = |G:C(\tau)| = \frac{|G|}{|<\tau> Z(G)|}$$

следует, что $|G| = |G'|\cdot|\langle\tau\rangle Z(G)|$. Поэтому $|G'\cap\langle\tau\rangle Z(G)| = 2$. Но тогда $\gamma_3(G) = [G', \tau]$ имеет индекс 2 в G'. Аналогично из $|\gamma_3(G) \cap \langle\tau\rangle Z(G)| = 2$ получим $|\gamma_3(G):\gamma_4(G)| = 2$ и т.д. Таким образом,

$$|\gamma_2(G):\gamma_3(G)| = |\gamma_3(G):\gamma_4(G)| = \ldots = |\gamma_c(G):\gamma_{c+1}(G)| = 2.$$

В силу основного результата из [1] группа G изоклинна диэдральной группе. Но тогда и фактор-группа $G/Z(G)$ диэдральна.

Предположим теперь, что G – разрешимая не нильпотентная группа. Тогда из $|G:F| = 2$ следует, что $G = K < S$, где K – холлова $2'$-подгруппа. Так как $G/K \cong S$, то по уже доказанному либо группа S абелева, либо фактор-группа $S/Z(S)$ является четверной или диэдральной группой. Покажем, что группа K абелева.

В самом деле, так как фактор-группа K/K' абелева, то и $C_K(K')/(K' \cap C_K(K'))$ тоже абелева. Но тогда $C_K(K')$ нильпотентен ступени не выше двух. Из $|G:K'C(K')| \le 2$ следует, что $K = K'C_K(K')$. Отсюда $K' = K''(C_K(K'))'$ и $K''' = K''$. Это означает, что $K'' = 1$, подгруппа K' абелева и группа $K = C(K')$ нильпотентна ступени не выше двух.

Пусть a – произвольный элемент из K. Если $H = \langle a \rangle Z(K) < G$, то из $|G:H \cdot C(H)| \le 2$ следует, что $a \in Z(K)$. Если же H не инвариантна в G, $G = F\langle \tau \rangle$ и $a^\tau = b$, то $\langle ab \rangle Z(K) < G$ и из $ab \in Z(K)$ получаем $H < G$, что противоречит предположению. Таким образом, $a \in Z(K)$ и группа K абелева.

Предположим, наконец, что группа G не разрешима. Так как $C(F^*(G)) \le F^*(G)$, то $|G:F^*(G)| \le 2$. Поэтому слой L группы G нетривиален. Из $F^*(G) = F \cdot L$ следует, что фактор-группа G/L разрешима и, следовательно, G удовлетворяет заключению теоремы.

Литература

1. Антонов В.А., Аминева Н.Н. О группах с относительно большими централизаторами // *Изв. вузов. Сер. Математика.* – 2002 (принята в печать).

2. Аминева Н.Н., Антонов В.А. О группах с относительно большими централизаторами // *Труды инст. Мат. и мех. УрО РАН.* – Т. 8. – 2001. – С. 1–8.

3. Hall P. The classification of prime-power groups // *J. Reine angew. Math.* – 1940. – V. 182. – P. 130–141.