

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ФИРМЫ

В.И. Ширяев, В.В. Смолин

Рассматривается динамическая модель производственно-сбытовой фирмы. Для описанной модели формулируется и решается задача оценивания состояния и неизвестных параметров фирмы по неполным и неточным измерениям в условиях неопределенности методами калмановской фильтрации. Показана целесообразность декомпозиции модели на ряд подсистем меньшей размерности и дальнейшего решения задачи оценивания в каждой из них.

Введение

Для производственно-сбытовой деятельности фирмы характерно наличие неполных и неточных данных. Например, невозможно заранее точно предсказать, сколько рабочих завтра выйдет на работу, сколько станков будет в рабочем состоянии и каким в будущем будет спрос на продукцию. Тем не менее, необходимо принимать решения по управлению фирмой с учетом изменяющейся ситуации на рынке и внутри самой фирмы.

Решению задачи оптимального управления и непосредственно принятию решения предшествует этап определения ее текущего состояния. В модели производственно-сбытовой системы состояние фирмы и динамика протекающих в ней процессов характеризуются векторами параметров и состояния. Переменные, входящие в вектор состояния, отражают состояние элементов системы в данный момент времени (например, $x_2(k)$ – фактический запас товара в сбытовой части), а параметры фирмы являются постоянными (p_1 – число недель, в течение которых средний темп продажи товара может быть обеспечен за счет запаса в сбытовой части), определяющими ее функционирование.

Для решения задачи оценивания состояния и неизвестных параметров фирмы в работе рассматривается математическая модель фирмы, описанная в [1], в основе которой лежит подход Дж. Форрестера для моделирования производственно-сбытовой деятельности фирм. В модели воспроизводится структура взаимодействия подразделений фирмы, ее информационные и материальные потоки; а также учитываются параметры подразделений фирмы. Другой подход к построению динамических моделей фирмы можно найти, например, в [2].

Динамика состояния фирмы не является предопределенной. Поэтому часто при построении математической модели неопределенные величины, с которыми приходится иметь дело на практике, представляются через детерминированные (известные) и случайные составляющие. Наблюдение фирмы осуществляется в условиях ошибок, неполной информации. В такой ситуации возможно представление экономико-математической модели фирмы в терминах пространства состояний и, при переходе к линейной модели, применение фильтра Калмана [3], обеспечивающего несмещенную оценку состояния с минимальной дисперсией ошибки этой оценки. Кроме того, возможны иные подходы к решению задачи оценивания состояния фирмы, не предполагающие наличие в модели случайных составляющих [4, 5].

Решение задачи оценивания

Экономико-математическая модель фирмы имеет вид

$$x_{k+1} = A(p)x_k + \Phi(x_k, p, u_k) + Bu_k + \Gamma\xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $A(p)$ – матрица, зависящая от вектора p параметров модели; $\Phi(x_k, p, u_k)$ – нелинейная вектор-функция; B и Γ – постоянные матрицы; x_k, u_k, ξ_k – соответственно векторы состояния, управления и возмущений.

Вектор возмущения ξ_k характеризует неточное знание уравнений фирмы. Относительно вектора ξ_k могут делаться различные предположения в зависимости от используемого подхода к оцениванию. Например, при использовании фильтра Калмана делается предположение об его

случайном характере. Подробное описание процесса построения математической модели фирмы можно найти в [6]. Вектор параметров фирмы p предполагается постоянным, но неизвестным.

Считается, что информационной системе (ИС) доступны для измерения только часть переменных и, возможно, параметров фирмы. Например, такие переменные состояния как $x_1(k)$ – количество заказов, не выполненных сбытовой фирмой, $x_2(k)$ – запас продукции на складе сбытовой фирмы. Следует отметить, что для фирм, у которых вектор параметров p не является постоянным и, если его нестабильность оказывает существенное влияние на функционирование, знание величин всех координат вектора p может оправдать затраты на создание ИС фирмы, осуществляющей как измерение, так и оценивание значения параметров. Измерения могут производиться с ошибками. Так, например, запас продукции $x_2(k)$ измеряется с ошибкой η_k , и на выходе имеем величину

$$y_2(k) = x_2(k) + \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Измерению доступна лишь часть переменных (координат вектора состояния фирмы x_k). Далее будем полагать, что параметры не измеряемы.

В общем случае уравнения фирмы и измерительной системы можно представить в следующем виде

$$x_{k+1} = f(x_k, p, u_k) + \Gamma \xi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

$$y_{k+1} = Gx_{k+1} + \eta_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где $f(x_k, p, u_k)$ и $g(x_{k+1})$ – нелинейные вектор-функции, y_k – вектор измерения, w_k, η_k – гауссовские последовательности с нулевым средним и заданными ковариационными матрицами Q_k и R_k соответственно. Выбор значений параметров шумов обосновывается в [1].

Состояние фирмы x_k наблюдается измерительной системой. Измерения y_k , выполняемые с ошибкой η_k , поступают далее в блок оценивания, где на основе априорной информации об экономико-математической модели, известной с ошибкой ξ_k , уточняются априорно неопределенные параметры и выполняется оценивание текущего состояния x_k фирмы с использованием, например, фильтра Калмана. В качестве процесса измерения может выступать, например, получение необходимой информации из плана счетов фирмы, комплексных систем управления фирмой [2] и т.п. На основе апостериорной информации о состоянии фирмы может приниматься решение, выраженное в управляющем воздействии u_{k+1} на фирму.

Матрица G в (4) фактически определяет, какая информация о фирме из всех переменных состояния x_k и, возможно, параметров p , определяющих ее работу, доступна для наблюдения. Ее объем будет сильно отличаться в случаях, если в получении информации о состоянии фирмы заинтересовано, к примеру, ее руководство и, с другой стороны, какой-то внешний наблюдатель, желающий получить более полную, чем общедоступная, информацию о состоянии данной фирмы. Очевидно, что наблюдатель, оценивающий состояние изнутри фирмы и для самой фирмы располагает более полной информацией о ее текущем состоянии. В модели это выражается в увеличении размерности вектора y_k в (4) по сравнению с наблюдением извне и, как следствие, в улучшении качества оценивания.

Уравнение фильтра Калмана [3] имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k + K_{k+1}[y_{k+1} - G_k x_k], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где K_k – оптимальный коэффициент фильтра, x_k – оценка вектора состояния фирмы x_k на шаге k фильтра.

Коэффициент K_k определяется как

$$K_k = [A_{k-1}P_{k-1}A'_{k-1} + \Gamma Q_{k-1} \Gamma'] G'_k [G_k(A_{k-1}P_{k-1}A'_{k-1} + \Gamma Q_{k-1} \Gamma') G'_k + R_k]^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$P_k = [I - K_k G_k] [A_{k-1}P_{k-1}A'_{k-1} + \Gamma Q_{k-1} \Gamma'], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где ' – знак транспонирования.

Матрица A_k вычисляется следующим образом

$$A_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_k}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

Каждый элемент этой матрицы представляет собой значение частной производной i -го элемента соответствующей вектор-функции по j -му элементу вектора состояния, вычисленное при $x = x_k$.

Для того чтобы помимо переменных состояния вычислялись оценки неизвестных параметров, вектор состояния необходимо дополнить элементами вектора параметров. Полученный (расширенный) вектор имеет вид

$$X_k = [x_k, p]'. \quad (9)$$

Соответственно модель (3) дополнится следующими уравнениями: $p'_{k+1} = p'_k + \xi'_k$, $i = 1, 2, \dots, m$, где ξ'_k – дрейф значения i -го параметра. А фильтр (5)–(8) запишется уже относительно расширенного вектора (9). Ошибка ξ'_k определяется степенью стабильности данного параметра и в случае неизменных параметров ее можно опустить.

Оценивание вектора состояния модели (3) фирмы происходит следующим образом. Задается начальная оценка вектора состояния фирмы x_0 и матрица P_0 . Затем вычисляется оптимальный коэффициент фильтра K_1 и на основе измерения y_1 рассчитывается оценка вектора состояния x_1 . Ошибки оценивания на данном шаге алгоритма определяются соответствующими диагональными элементами матрицы P_1 . Далее итерации алгоритма повторяются, пока ошибки оценивания не станут достаточно малыми.

Недостатком алгоритма фильтра Калмана для оценивания состояния фирмы является то, что фильтр должен быть построен на основании априорных данных о статистиках рассматриваемого процесса, что в данном случае соответствует наличию априорной информации о статистических характеристиках векторов состояния ξ_k и измерения η_k , а также ее начального состояния. Гарантированный подход [4] избавлен от данного недостатка.

При оценивании состояния фирмы большое значение имеет максимально возможное использование априорной информации об ее начальном состоянии. Как правило, на практике фактическое значение ковариационной матрицы ошибки оценивания начального состояния P_0 точно не известно. Поэтому, чтобы обеспечить монотонность ошибок оценивания в переходном режиме работы фильтра Калмана, выбирают начальную ковариацию в виде диагональной матрицы с очень большими, практически неопределенными элементами. В [7] предложена иная методика выбора минимального значения матрицы P_0 в условиях, когда его фактическое значение не определено и задается областью, которой оно принадлежит.

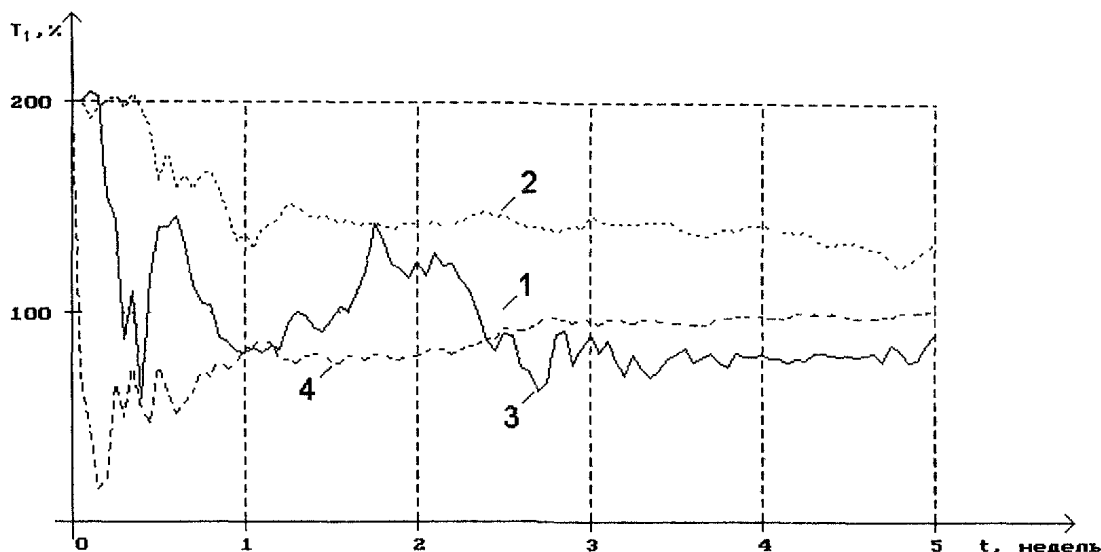
Как показывают эксперименты, для нелинейной системы (3) процедура линеаризации (8), не всегда обеспечивает хорошее приближение исходной модели. Другими словами, значения векторов состояния исходной и линеаризованной систем со временем отличаются все больше. Это зависит не только от вида уравнений (3), но и определяется размерностью системы (в данном случае 99). Отсюда не очень эффективная работа фильтра Калмана при оценивании неизвестных параметров (см. рисунок, кривая 2). Поэтому имеет смысл осуществлять декомпозицию данной системы на относительно независимые подсистемы меньшей размерности и решать задачу оценивания уже в каждой из них. Кроме того, подразделения фирмы относительно независимы и не имеет смысла ставить решение задачи оценивания в одном подразделении в зависимость от решения аналогичной задачи в остальных. В отдельные подсистемы могут быть выделены как подразделения фирмы, так и потоки (информации, заказов, материальные и т.д.). Тогда уравнения каждой i -й подсистемы и соответствующей измерительной подсистемы запишутся в виде

$$x'_{k+1} = f_i(x'_k, z'_k, p', u'_k) + \Gamma'_i \xi'_k, \quad y'_{k+1} = g_i(x'_{k+1}) + \eta'_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

где z'_k – вектор (известный) переменных от других подразделений.

В результате ошибки линеаризации существенно уменьшаются, что приводит к получению более точных оценок параметров фирмы (кривая 3). Кроме того, данный подход существенно облегчает возможные изменение и дополнение модели, а также уменьшает требования к вычислительным ресурсам. В случае если необходимо оценивать параметры только части подсистем, можно не тратить время и ресурсы на оценивание параметров всей системы. Но, очевидно, что

наилучшие результаты в оценивании определенного параметра достигаются, если его значение доступно для измерения ИС фирмы (кривая 4).



Оценка параметра T_1 – число недель, в течение которых продажа товара может осуществляться за счет запаса в сбытовом подразделении (1 – реальное значение параметра; 2 – случай оценивания состояния и параметров всей системы; 3 – оценивание методом декомпозиции; 4 – оценка измеряемого параметра)

Заключение

Таким образом, фильтр Калмана вполне может быть использован для оценивания состояния и неизвестных параметров фирмы, на основе построенной динамической модели. В случае системы большой размерности и плохо приближаемой линейной системой имеет смысл осуществлять декомпозицию системы на ряд подсистем меньшей размерности. Это позволяет существенно улучшить точность оценивания и, кроме того, уменьшить требовательность метода оценивания к вычислительным ресурсам. В качестве недостатка предложенного подхода следует отметить необходимость предположения случайного характера ошибок ξ_k и η_k . Здесь в качестве альтернативы может рассматриваться гарантированный подход [4] к оцениванию состояния и параметров фирмы. Этот подход состоит в том, что в процессе идентификации и оценивания состояния системы получаются и в дальнейшем используются гарантированные множественные оценки ее параметров и вектора состояния.

Результаты данной работы могут быть использованы для построения автоматизированной системы адаптивного управления фирмой, предпринимателями для анализа и выбора принимаемых решений и составлять основу экспертных систем поддержки принятия решений в бизнесе. Вообще говоря, решение задачи, сформулированной в [6], невозможно без решения рассмотренной задачи, что подчеркивает важность разработки эффективных методов оценивания состояния и неизвестных параметров фирмы.

Литература

1. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. – М.: Прогресс, 1971. – 340 с.
2. Одинцов А.В., Норенков Ю.И., Горин О.Д. Динамическое моделирование предприятия // *Информационные технологии*. – 1997. – № 2. – С. 20–24.
3. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под. ред. К.Т. Леондеса. – М.: Мир, 1980. – 404 с.
4. Лычак М.М. Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода // *Проблемы управления и информатики*. – 1999. – № 5. – С. 34–41.
5. Ширяев В.И. Синтез управления линейными системами при неполной информации // *Изв. РАН. Техн. киберн.* – 1994. – № 3. – С. 229–237.
6. Ширяев В.И. Головин И.Я. Оптимальное управление производственно-сбытовой системой // *Информационные технологии*. – 2001. – № 2. – С. 37–43.
7. Згуровский М.З., Подладчиков В.Н. Анализ и прогнозирование экономических процессов на основе теории калмановской фильтрации // *Обзорные прикладной и промышленной математики*. – 1995. – Т. 2. – С. 31–42.