

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В УПРУГОМ КЛИНЕ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН В ОБЪЕМНЫЕ

С.Ю. Гуревич, Х.Б. Толипов, К.Б. Хабиров

Рассмотрена задача дифракции рэлеевских волн на кромке клина. Показано, что при этом возникают объемные и поверхностные волны. Теоретические кривые угловых зависимостей амплитуд объемных волн совпадают с известными экспериментальными фактами.

## Введение

Вопросы трансформации рэлеевских волн на клине неизменно привлекают внимание исследователей. Это объясняется тем, что рассматриваемая задача имеет широкий спектр практических приложений: от решения проблем борьбы с ложными сигналами в ультразвуковых преобразователях, в линиях задержки, до определения пространственных координат дефекта типа «трещина», выходящих на поверхность изделия.

Механизм преобразования поверхностных волн в объемные качественно может быть описан достаточно просто. Волна, распространяясь по одной грани клина, вызовет неоднородное возмущение другой поверхности на длине  $\ell$ , величина и форма которого зависит от угла клина и глубины рэлеевской волны (рис. 1). Это возмущение будет являться источником вторичных волн, которое можно представить на границе плоскости в виде набора спектра пространственных гармоник Фурье. Гармоники с  $k = k_r$  создадут поле рэлеевских волн, а с  $k < k_r$  – поле объемных волн (здесь  $k_r$  и  $k_t$  соответственно волновые числа рэлеевской и сдвиговой волн).

В связи с этим, представляет интерес теоретическое исследование рассеянного поля, отраженного от второй границы клина.

Обсудим некоторые подходы к решению поставленной задачи.

Генерация вторичной волны происходит от поверхности, имеющую особую точку  $A$  (ребро клина), которая может рассеивать упругие волны в ограниченном диапазоне углов  $\theta$ . Однако, учитывая, что возмущения создаваемые сдвиговой и продольной составляющими падающей рэлеевской волны на поверхности первой грани взаимно компенсируются,

ребро клина, являющееся общей границей поверхностей клина, не испытывает возмущения и, следовательно, не оказывает существенной роли на формирование поля.

Объемная волна формируется в том случае, когда проекция волнового вектора падающей волны на границу второй грани клина меньше вектора пространственной волны. В противном случае вторичная волна является неоднородной (неуходящей), энергия которой сосредоточена только в приповерхностном слое.

Вследствие появления на второй грани поверхностных волн разных направлений, возникают их многократные отражения от угла клина.

## Решение

Итак, предположим, что по первой грани клина распространяется рэлеевская волна, представляющая собой совокупность двух волн – продольной и сдвиговой с потенциалами:

$$\varphi = 1 \exp i [(k_r \varepsilon - \omega t) - \sqrt{k_r^2 - k_t^2} \eta], \quad (1)$$

$$\psi = p \exp i [(k_r \varepsilon - \omega t) - \sqrt{k_r^2 - k_t^2} \eta], \quad (2)$$

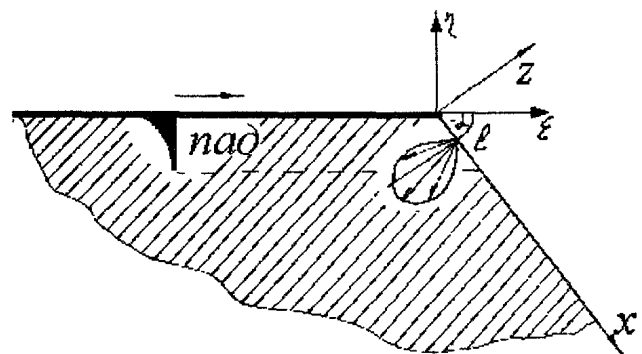


Рис. 1. Система координат

где  $p = -\sqrt{\frac{q_r}{s_r}} i$ ,  $q_r = \sqrt{k_l^2 - k_r^2}$ ,  $s_r = \sqrt{k_l^2 - k_r^2}$ ,  $k_h = \frac{\omega}{C_h}$ .

Здесь  $C_l$  ( $C_t$ ) – скорости распространения продольных (поперечных) волн,  $\omega$  – круговая частота, а амплитуда продольного потенциала принята за единицу. (Зависимость от времени  $\exp(-i\omega t)$  в дальнейшем опускаем).

На поверхности второй грани клина компоненты тензора напряжений, обуславливаемые как падающей, так порождаемыми ею волнами, должны быть равны нулю. Если  $\sigma_{xz}^0$  и  $\sigma_{zz}^0$  – напряжения, вызываемые смещениями падающей рэлеевской волны, то граничные условия при  $z = 0$  приобретают вид:

$$\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^0 = 0, \quad \sigma_{xz} + \sigma_{xz}^0 = 0 \quad (3)$$

Определим напряжения на противоположной грани клина, создаваемые смещениями падающей рэлеевской волны.

Как известно [1], компоненты тензора напряжений в терминах волновых потенциалов выражаются в виде:

$$\sigma_{\varepsilon\eta} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \mu \left( -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} - k_l^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon \partial \eta} \right). \quad (5)$$

Подставляя в соотношение (3) функции (1) и (2), приходим к следующему выражению для смещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon\eta} &= \mu \{ P(k_r) \exp(i \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \eta) + Q(k_r) \exp(i \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \eta) \} \exp(ik_r \varepsilon), \\ \sigma_{\eta\eta} &= \mu \{ R(k_r) \exp(i \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \eta) + S(k_r) \exp(i \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \eta) \} \exp(ik_r \varepsilon), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} P(k_r) &= 2k_r \sqrt{k_l^2 - k_r^2}, \quad Q(k_r) = (2k_r^2 - k_l^2), \\ R(k_r) &= (2k_r^2 - k_l^2), \quad S(k_r) = 2k_r \sqrt{k_l^2 - k_r^2}. \end{aligned}$$

Отметим также, что на противоположной грани клина эти компоненты в зависимости от угла клина изменяются как по величине, так и по направлению.

Следовательно, для случая однократного отражения поверхностной волны, выражение (3) с учетом (1) и (2) на второй грани клина ( $z = 0$ ) принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= [P(a) \exp(iax) - Q(b) \exp(ibx)] \cos(\alpha), \\ \sigma_2 &= [R(a) \exp(iax) - S(b) \exp(ibx)] \cos(\alpha); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \sin \alpha + k_r \cos \alpha, \\ b &= \sqrt{k_l^2 - k_r^2} \cos \alpha + k_r \sin \alpha. \end{aligned}$$

В дальнейшем нас будут интересовать только зависящие от времени части упругих полей, создаваемые на поверхности другой грани клина падающей рэлеевской волной; они определяются системой уравнений, которые имеют вид:

$$\varphi + k_l^2 \varphi = 0, \quad \Delta \psi + k_l^2 \psi = 0. \quad (8)$$

Полная задача в ограниченной упругой среде включает в себя также полученные граничные условия, которые запишем в виде:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= -\sigma_1, \\ -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} - k_l^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon \partial \eta} &= -\sigma_2, \quad \text{при } z = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

где правая часть уравнений определяется выражениями (7).

Перейдем к построению рассеянного поля.

Потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  представим в виде разложений Фурье по волновым векторам  $k$ .

$$\varphi = \int_0^{\infty} \varphi(k) \exp(ikx) dk; \quad \psi = \int_0^{\infty} \psi(k) \exp(ikx) dk.$$

Тогда система уравнений (2) и (7) упрощаются и приобретают соответственно вид:

$$\frac{d^2 \varphi^*}{dz^2} + (k_l^2 - k^2) \varphi^* = 0; \quad \frac{d^2 \psi^*}{dz^2} + (k_t^2 - k^2) \psi^* = 0; \tag{10}$$

$$2ik \frac{d\varphi^*}{dz} - k^2 \varphi^* - \frac{d^2 \varphi^*}{dz^2} = - \left( \frac{P(a)}{k-a} - p \frac{Q(b)}{k-b} \right) \cos \alpha. \tag{11}$$

Решение уравнений (8), удовлетворяющее условию излучения, представим в виде:

$$\varphi^* = D \exp \sqrt{k^2 - k_l^2}, \quad \psi^* = E \exp \sqrt{k^2 - k_t^2}.$$

Учитывая (9), получим:

$$D = \frac{A(\alpha)S(k_r) - B(\alpha)Q(k_r)}{\text{Det}(k)}, \quad E = \frac{B(\alpha)P(k_r) - A(\alpha)R(k_r)}{\text{Det}(k)}, \tag{12}$$

где  $\text{Det}(k) = 4k^2 \sqrt{(k^2 - k_l^2)(k^2 - k_t^2)} - (2k^2 - k_l^2)^2$ ,

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{P(a)}{k-a} - p \frac{Q(b)}{k-b}; & B(\alpha) &= \frac{R(a)}{k-a} - p \frac{S(b)}{k-b}; \\ C(\alpha) &= \frac{P(c)}{k-c} - p \frac{Q(d)}{k-d}; & D(\alpha) &= \frac{R(c)}{k-c} - p \frac{S(d)}{k-d}. \end{aligned}$$

С учетом обратного преобразования Фурье, получим:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{[A(\alpha)S(k_r) - B(\alpha)Q(k_r)] \cos(\alpha) + [A(\alpha)S(k_r) - B(\alpha)Q(k_r)] \sin(\alpha)}{\text{Det}(k)}; \\ \psi &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{[B(\alpha)S(k_r) - A(\alpha)Q(k_r)] \cos(\alpha) + [B(\alpha)S(k_r) - A(\alpha)Q(k_r)] \sin(\alpha)}{\text{Det}(k)}. \end{aligned} \tag{13}$$

С целью интегрирования этих выражений перейдем к симметричным пределам и аналитически продолжим подынтегральное выражение в плоскость комплексного переменного  $k$ . В этой плоскости подынтегральная функция имеет точки ветвления  $k = \pm k_l$  и  $k = \pm k_t$ , и полюса, определяемые равенством:  $\text{Det}(k) = 0$ . Из точек ветвления проведем разрезы по линиям  $\text{Re}(q, s) = 0$ .

Для того, чтобы сместить особые точки с вещественной оси ( $-\infty < k < \infty$ ), введем предположение о наличии малого затухания в среде, т.е. предположим, что  $k_l$  и  $k_t$  комплексные. Интегралы по действительной оси ( $-\infty < k < \infty$ ), заменим интегралом по пути  $\Gamma$ , проходящему по действительной оси, дугам окружности бесконечного радиуса в верхней полуплоскости, опирающейся на действительную ось и по берегам разрезов, проходящих через точки ветвления (рис. 2).

Выбор такого контура интегрирования обусловлен тем, что подынтегральная функция удовлетворяет лемме Жордана. Тогда интеграл по пути  $\Gamma$  равен сумме вычетов, взятых по полюсам, оказавшиеся внутри контура. Таким образом, можно записать:

$$\int_{\Gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) + \int_L F(k) + \int_{L_1} F(k) + \int_{L_2} F(k) + \int_{\gamma_1} F(k) + \int_{\gamma_2} F(k). \tag{14}$$

Отсюда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k) = \int_{\Gamma} F(k) - \int_L F(k) - \int_{L_1} F(k) - \int_{L_2} F(k) - \int_{\gamma_1} F(k) - \int_{\gamma_2} F(k). \tag{15}$$

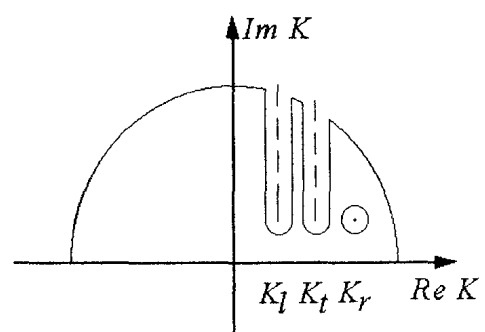


Рис. 2. Комплексная плоскость

Если контуры  $\gamma_l$  и  $\gamma_r$  проведены через точки перевала и направление обхода по контуру интегрирования совпадает с направлением наибоыстрейшего спуска, то основной вклад определяется последними слагаемыми в формуле (15).

Для нахождения решения задачи, удовлетворяющего условию погашаемости на бесконечности, применим преобразование Фурье по координате  $x$  к системе уравнений (8) и краевому условию (11). В результате для фурье-трансформанты получаем двумерную обобщенную неоднородную краевую задачу для однородных уравнений Гельмгольца, с краевыми условиями, выраженными в виде системы алгебраических уравнений, связывающих трансформанты Фурье компонент потенциалов со значениями угла клина на границе поверхности, из которых определяются неизвестные коэффициенты  $D, E$ .

Необходимые нам асимптотики строятся с помощью соответствующего обхода полюсов и точек ветвления в комплексной  $k$ -плоскости. При этом учет вклада полюсов дает поле излучения, сформированного из волн Рэлея, а точек ветвления – поле излучения, формируемые из объемных волн. Используя метод перевала, который детально разработан в математической физике, для поля смещений объемных волн получим:

$$U_l = \sqrt{\frac{2\pi}{k_l \rho}} \frac{\cos^2 \omega}{k_l^3 D_l} \left[ \left( p \frac{2b^2 - k_l^2}{k_l \sin \omega - b} - \frac{2a\sqrt{k_l^2 - a^2}}{k_l \sin \omega - a} \right) 2k_r \sqrt{k_r^2 - k_l^2} + \left( p \frac{2b\sqrt{k_l^2 - b^2}}{k_l \sin \omega - b} + \frac{2a^2 - k_l^2}{k_l \sin \omega - a} \right) (2k_r^2 - k_l^2) \right] \exp(ik_l \rho - i\frac{\pi}{4}); \quad (16)$$

$$U_r = \sqrt{\frac{2\pi}{k_r \rho}} \frac{\cos^2 \omega}{k_r^3 D_r} \left[ \left( p \frac{2b^2 - k_r^2}{k_r \sin \omega - b} - \frac{2a\sqrt{k_r^2 - a^2}}{k_r \sin \omega - a} \right) 2k_l \sqrt{k_l^2 - k_r^2} + \left( p \frac{2b\sqrt{k_r^2 - b^2}}{k_r \sin \omega - b} + \frac{2a^2 - k_r^2}{k_r \sin \omega - a} \right) (2k_l^2 - k_r^2) \right] \exp(ik_r \rho - i\frac{\pi}{4}). \quad (17)$$

где

$$D_l = 4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \sqrt{\sin^2 \omega - \varepsilon^2} - (2 \sin^2 \omega - 1)^2; \\ D_r = 4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \sqrt{\sin^2 \omega - \varepsilon^2} - (2 \sin^2 \omega - \varepsilon^2)^2; \quad \varepsilon = \frac{C_l}{C_r}.$$

Здесь  $\omega$  – азимутальный угол, отсчитываемый от оси  $z$ .

Проанализируем полученные результаты. Прежде всего обратимся к рис. 3, где приведены нормированные по отношению к сдвиговой волне амплитуды смещений объемных волн. Изменение амплитуды пространственных волн носит экстремальный характер, где максимум амплитуды достигается при углах клина  $120^\circ$ . Если рассматривать процесс рассеяния как переход энергии падающей рэлеевской волны к поверхностным и пространственным волнам, то, согласно закону сохранения энергии, с уменьшением энергии дифрагированных поверхностных волн должен возрастать вклад объемных волн.

Этот факт согласуется с опытными данными. Как известно из экспериментальных данных [1], при этих углах наблюдается минимум коэффициента преломления.

В дополнение к выполненному количественному анализу амплитуд объемных волн целесообразно привести угловые зависимости амплитуд этих волн, которые могут пред-

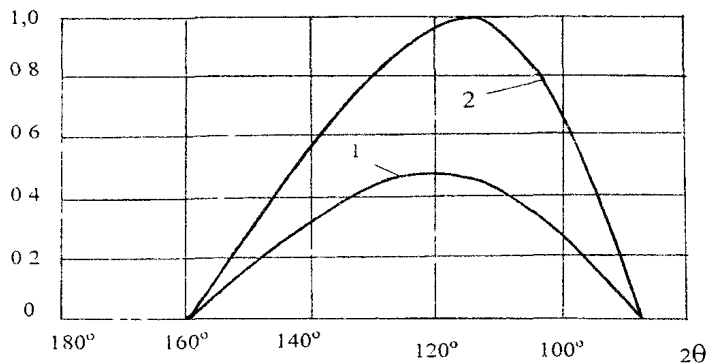


Рис. 3. Зависимость амплитуд продольной (1) и поперечных (2) волн от угла клина

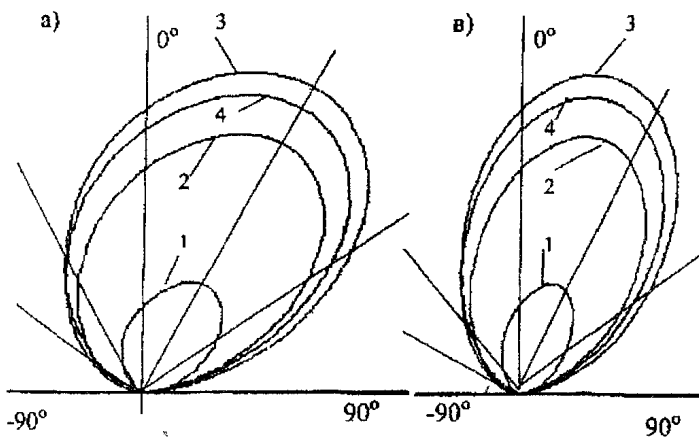


Рис. 4. Угловое распределение амплитуд продольной (а) и поперечных (в) волн

ставить интерес для практики Сравнительный анализ этих кривых (рис. 4) показывает, что диаграммы направленности характеризуются высоким уровнем в зоне углов  $\omega$ , близким к  $30^\circ$ . Также при уменьшении угла клина происходит как изменение амплитуды волны, так небольшое смещение максимума диаграммы направленности.

Вывод на основе этого краткого анализа можно сформулировать следующим образом. Для подавления ложных сигналов необходимо стремиться к значению углов клина близкому к  $90^\circ$ , а для эффективного преобразования – к  $120^\circ$ .

#### Литература

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981.