

# ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН РЭЛЕЯ В УПРУГОМ КЛИНЕ

*Х.Б. Толипов*

Методом интегральных преобразований исследовано преломление волн Рэлея на ребре клина. Показано, при больших углах клина основной вклад в рассеянное акустическое поле вносят касательные составляющие возмущающих сил. С уменьшением угла клина вклад этих сил падает, но зато увеличивается влияние нормальной составляющей, монотонно достигая максимума. Полученная зависимость коэффициента преломления хорошо согласуется с известными экспериментальными данными.

## Введение

Дифракция поверхностных (рэлеевских) волн на клине имеет широкий спектр практических приложений: от использования в качестве преобразователей поверхностных волн в объемные до решения проблем борьбы с ложными сигналами в линиях задержки.

Следует заметить, что, кроме дефектоскопии, решение данной задачи имеет важное значение и для других областей науки и техники: сейсмологии (распространение сейсмических волн по резким изломам); акустоэлектроники (использование ребра клина в качестве отражателей поверхностных волн, взаимных преобразователей поверхностных волн в объемные, линий задержки, фильтров); в механике разрушения и физике поверхностных явлений (выявление дефектов типа «трещина»).

## 1. Постановка задачи

Пусть по первой грани клина распространяется рэлеевская волна, представляющая собой совокупность двух волн – продольной и сдвиговой – с потенциалами:

$$\Phi = 1 \exp [i(k_r \varepsilon - \omega t) - \sqrt{k_r^2 - k_l^2} \eta]; \quad (1)$$

$$\psi = p \exp [i(k_r \varepsilon - \omega t) - \sqrt{k_r^2 - k_l^2} \eta]; \quad (2)$$

$$p = -\sqrt{\frac{k_l^2 - k_r^2}{k_l^2 - k_r^2}} i; \quad k_h = \frac{\omega}{c_h}.$$

Здесь  $c_l$ ,  $c_t$ ,  $c_r$  – скорости распространения, соответственно, продольных, поперечных и рэлеевских волн,  $\omega$  – круговая частота, а амплитуда продольного потенциала принята за единицу. (Зависимость от времени  $\exp(-i\omega t)$  в дальнейших выкладках опускается).

Зависящие от времени части упругих полей, создаваемые на поверхности другой грани клина падающей рэлеевской волной, определяются системой уравнений, которые имеют вид:

$$\Delta \Phi + k_l^2 \Phi = 0, \quad \Delta \psi + k_t^2 \psi = 0. \quad (3)$$

На поверхности второй грани клина компоненты тензора напряжений, обуславливаемые как падающей, так и порождаемой ею волнами, должны быть равны нулю. Если  $\sigma_{xz}^0$  и  $\sigma_{zx}^0$  – напряжения, вызываемые смещениями падающей рэлеевской волны, то граничные условия при  $z = 0$  приобретают вид:

$$\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^0 = 0, \quad \sigma_{xz} + \sigma_{xz}^0 = 0. \quad (4)$$

Таким образом, уравнение (3) совместно с граничными условиями (4) полностью определяет постановку задачи дифракции волны на клине о поле скоростей смещений и поле напряжений.

## 2. Построение решения

Представим искомое решение в виде преобразования Фурье по координатам  $x$  и  $z$ , учитывая, что смещения в рэлеевской волне и, следовательно, потенциалы по оси  $z$  сдвинуты относительно оси  $x$  на  $90^\circ$ :

$$A_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} A_j(k, x) e^{ikx} dx, \quad (5)$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1^*(k, x) e^{-ikx} dk, \quad \Psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_2^*(k, x) e^{-ikx} dk,$$

$$C_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} C_j(k, z) e^{i(kz+0.5\pi)} dz, \quad (6)$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_1^*(k, z) e^{-ikz} dk, \quad \Psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_2^*(k, z) e^{-ikz} dk, \quad j = 1, 2.$$

Неизвестные функции  $A_j^*$ ,  $C_j^*$  определяются путем подстановки соотношений (5), (6) в (4) и (3) с последующим решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

Выражения для компонент тензора напряжений на первой грани клина представим в виде [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon\eta} &= \{P(k_r) \exp(i\sqrt{k_i^2 - k_r^2} \eta) + Q(k_r) \exp(i\sqrt{k_i^2 - k_r^2} \eta)\} \exp(ik_r \varepsilon), \\ \sigma_{\eta\eta} &= \{R(k_r) \exp(i\sqrt{k_i^2 - k_r^2} \eta) + S(k_r) \exp(i\sqrt{k_i^2 - k_r^2} \eta)\} \exp(ik_r \varepsilon), \\ \operatorname{Im} \sqrt{k_i^2 - k_r^2} &> 0, \operatorname{Im} \sqrt{k_i^2 - k_r^2} > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} P(k_r) &= 2\mu k_r \sqrt{k_i^2 - k_r^2}, & Q(k_r) &= \mu(2k_r^2 - k_i^2), \\ R(k_r) &= -\lambda k_i^2 - 2\mu(k_r^2 - k_i^2), & S(k_r) &= 2\mu k_r \sqrt{k_i^2 - k_r^2}, \end{aligned}$$

$\lambda$ ,  $\mu$  – постоянные Ламе.

Заметим, что на второй грани клина эти напряжения, в зависимости от угла клина и глубины релеевской волны, будут изменяться как по величине, так и по направлению. Отсутствие напряжений на поверхности ( $\eta = 0$ ) означает, что ребро клина, являющееся общей границей поверхностей клина, не испытывает возмущения, и следовательно, не оказывает существенной роли на формирование поля.

Проекции продольной и сдвиговой составляющих волнового вектора падающей волны на оси координат  $x$  и  $z$

$$k_{1x}(\theta) = k_r \cos \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_i^2} \sin \theta, \quad k_{1z}(\theta) = k_r \sin \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_i^2} \cos \theta, \quad (8)$$

$$k_{2x}(\theta) = k_r \cos \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_i^2} \sin \theta, \quad k_{2z}(\theta) = k_r \sin \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_i^2} \cos \theta$$

вследствие неоднородности релеевской волны выражаются в комплексном виде.

В этом случае граничные условия на поверхности второй грани клина для поля потенциалов при разложении возмущающих сил на касательные и нормальные составляющие, запишутся в виде:

$$P(k) + Q(k) + [P(k_{1x}) + pQ(k_{2x})] \cos \theta = 0; \quad R(k) + S(k) + [R(k_{1x}) + pS(k_{2x})] \cos \theta = 0. \quad (9)$$

$$P(k) + Q(k) + [P(k_{1z}) + pQ(k_{2z})] \sin \theta = 0; \quad R(k) + S(k) + [R(k_{1z}) + pS(k_{2z})] \sin \theta = 0. \quad (10)$$

С учетом принятых обозначений, опустив несложные выкладки, запишем окончательные выражения для  $A_1^*$  и  $C_1^*$

$$A_1^* = T_1 \exp(iqz); \quad C_1^* = T_2 \exp(iqz);$$

$$T_1 = \frac{T_3 + T_4}{T_0}; \quad T_2 = \frac{T_5 + T_6}{T_0}; \quad q^2 = k^2 - k_i^2; \quad s^2 = k^2 - k_r^2;$$

$$\begin{aligned} T_3 &= [B_1(\theta) \cdot S(k_r) - B_2(\theta) \cdot Q(k_r)] \cos \theta, \quad T_4 = [B_3(\theta) \cdot S(k_r) - B_4(\theta) \cdot Q(k_r)] \sin \theta, \\ T_5 &= [B_2(\theta) \cdot P(k_r) - B_1(\theta) \cdot R(k_r)] \cos \theta, \quad T_6 = [B_4(\theta) \cdot P(k_r) - B_3(\theta) \cdot R(k_r)] \sin \theta, \quad T_0 = 4k^2 qs - (k^2 + s^2)^2; \\ B_1 &= \frac{P(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{Q(k_{2x})}{k - k_{2x}}; \quad B_2 = \frac{R(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{S(k_{2x})}{k - k_{2x}}; \quad B_3 = \frac{P(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{Q(k_{2z})}{k - k_{2z}}; \quad B_4 = \frac{R(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{S(k_{2z})}{k - k_{2z}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Вычислим интеграл Фурье в соотношении (5), замкнув контур интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексной переменной  $k$ .

Аналитическое продолжение на верхнюю полуплоскость – многозначная функция, имеющая точки разветвления

$$k_{1,2} = \pm ik_l, k_{3,4} = \pm ik_l,$$

и простые полюса

$$k_{5,6} = \pm ik_r$$

Ветви радикалов в (7) фиксируем условием  $\arg q = \arg s = \pi/2$  при  $k > 0$ .

Будем рассматривать на верхнем листе многолистной римановой поверхности ту ветвь многозначной функции  $A_1^*$ , которая является аналитическим продолжением этой функции. Каждый из листов римановой поверхности представляет собой плоскость с разрезами, проведенными так, как это показано в предыдущей статье на рис. 2.

Вклад полюсов  $k_{5,6}$  определяет волну Релея. Определяя вычеты в этих полюсах для коэффициента преломления потенциала  $\Phi$ , имеем:

$$V_1 = \frac{T_1}{\left. \frac{d}{dk} T_0(k) \right|_{k=k_r}}.$$

Вычисляя интеграл (6) по вышеизложенной методике, для коэффициента преломления, в случае действия нормальных возмущений, получим:

$$V_2 = \frac{T_2}{\left. \frac{d}{dk} T_0(k) \right|_{k=k_r}}.$$

Заметим, что общий коэффициент преломления выражается в комплексном виде, т.к. прохождение волны происходит с изменением фазы относительно падающей:

$$|V_p| e^{i\varphi} = V_1 + V_2.$$

На рисунке приведены результаты численного расчета модулей коэффициентов преломления релейской волны (опытные данные из работы [2]).

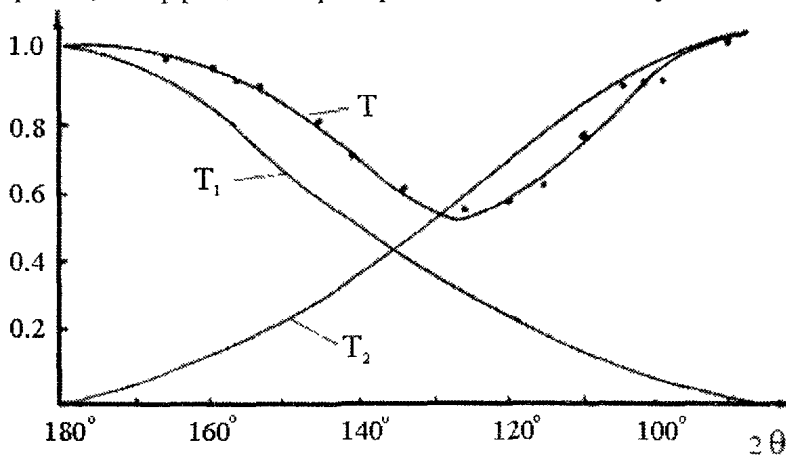
Как показывает анализ, при больших углах клина основной вклад в рассеянное акустическое поле вносят касательные составляющие возмущающих сил. С уменьшением вклад этих сил падает, но зато увеличивается влияние нормальной составляющей, монотонно достигая максимума.

Отметим также, что экспериментальные данные сдвинуты вправо относительно расчетных кривых. Этот факт можно объяснить следующим образом. Согласно предложенной теории следует, что коэффициент преобразования поверхностных волн начинает уменьшаться сразу же с изменением угла клина. Однако, известно, что если проекция волнового вектора падающей волны на свободную поверхность больше вектора объемной волны, то возбуждаемые продольная и поперечная волны являются неоднородными, вся энергия которых сосредоточена вблизи поверхности [3]. Следовательно, при больших углах клина вся энергия падающей волны переходит в энергию преломленной неоднородной волны, которая затем перерождается в релейскую. Таким образом, коэффициент преобразования начинает уменьшаться с возникновением объемной волны, уносящей энергию вглубь среды [4]. Такое явление возникает тогда, когда проекция волнового вектора падающей волны на другую грань клина меньше волнового вектора сдвиговой волны.

Это условие можно определить из соотношения:

$$\beta = \arccos k_l/k_r.$$

В нашем случае для выбранного материала с коэффициентом Пуассона  $\sigma = 0,34$  эта задержка составляет  $\beta = 15^\circ$ .



Угловая зависимость модулей коэффициента преломления (V) релейской волны

При решении задачи дифракции на клине с малым углом раствора необходимо учитывать при приближении к ребру клина изменение скорости падающей волны [5].

Полученные результаты позволяют аналогичным образом изучать дифракцию на некоторых более сложных рассеивателях, составной частью которых является плоская грань.

#### Литература

1. Kane J., Spence J. Rayleigh wave transmission in elastic wedge // *Geophysics*. – 1963. – V. 28, № 5, pt. 1. – P. 715–723.
2. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966. – 165 с.
3. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – С. 63.
4. Толипов Х.Б., Гуревич С.Ю. Особенности дифракции релеевских волн на клине // *Тезисы докладов XX Уральской конф.* – Екатеринбург, 2001. – С. 68.
5. Толипов Х.Б. Динамическая задача теории упругости для угловых областей с однородными граничными условиями // *ПММ*. – 1993. – Т. 55. – Вып. 5. – С. 120–126.