УДК 532.137.3

К ВОПРОСУ НАБЛЮДАЕМОСТИ УПРУГИХ СВОЙСТВ ЖИДКИХ СРЕД В ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ ПО ШВИДКОВСКОМУ Е.Г.

И.В. Елюхина

Изучены возможности наблюдения и измерения слабо упругих свойств жидких сред методом крутильных колебаний.

Введение. В режиме затухающих колебаний можно реализовать как малые скорости деформаций, так и предельно малые полные деформации. Это позволяет сделать *наблюдаемыми* отдельные *неньютоновские эффекты* у жидкостей, обычно считающихся ньютоновскими. Данные условия, реализуемые в крутильно-колебательном вискозиметре Швидковского Е.Г. (рис. 1) [1], и неосуществимые в других реометрических методиках, дают возможность предположить обнаружение *новых классов* сред со слабо выраженными неньютоновскими свойствами.

Подобные эксперименты обладают метрологической точностью, т.е. позволяют не только продемонстрировать сам факт вязкоупругости жидкости, но и количественно определить ее возможный модуль сдвига. А это в свою очередь дает возможность решить *фундаментальную задачу о реологической принадлежности* рассматриваемого класса жидкостей и делает правомочной постановку проблемы о *микроскопических причинах неньютоновского поведения сред.*

Вязко-упругие жидкости можно отличить от ньютоновских в экспериментах, позволяющих осуществить предельно малые скорости деформации, а также способных отразить временную сторону процессов изменения напряжений и деформаций [2–4]. Состояние простой жидкости с затухающей памятью, совершающей крутильные колебания в вискозиметре (рис. 1), можно охарактеризовать как линейно-вязкоупругое, т.е. отбросить члены выше первого порядка тензора деформации Коши [2], а течение описать единственной материальной функцией – *комплексной вязкостью* $\eta^* = \nu^* \rho$, включающей динамическую вязкость η_r и динамическую жесткость G [2–4]:

$$\eta^* = \eta_r + i\eta_i, \tag{1}$$

где $\eta_i = G/\omega$; $\omega = 2\pi/\tau$; ω – частота и τ – период колебаний заполненного жидкостью цилиндра; ν – кинематическая вязкость; ρ – плотность среды; $i = \sqrt{-1}$.

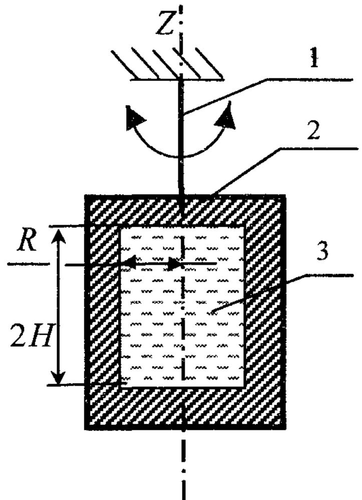

Рис. 1. Схема вискозиметра: 1 – упругая нить; 2 – цилиндр, совершающий собственные затухающие крутильные колебания с периодом τ_0 вокруг своей оси симметрии Z, и имеющий относительно данной оси момент инерции K; 3 – исследуемая жидкость массой M с плотностью ρ, вязкостью ν и жесткостью G

Впервые понятие комплексной вязкости в отношении применения его к заполненному исследуемой жидкостью цилиндру, совершающему *вынужденные* колебания, было проанализировано Клейманом Р.Н. [4]. Работа [4] носит скорее теоретический характер и ввиду неучета многих факторов затрудняет использование полученных результатов на практике и не способствует распространению методологии исследования на другие режимы колебаний.

Практически представляет интерес случай *слабо выраженных упругих свойств* и изучение возможностей их наблюдения и корректного оценивания. В связи с этим достаточно *своевременным* является проведение *математического моделирования реометрического эксперимента* по изучению слабо упругих свойств жидких сред методом крутильных колебаний.

Основные положения теории метода и оценка чувствительности вязкоупругих свойств жидкости к ошибкам в измерении параметров установки и колебаний. *Реометрическое уравнение,* связывающее наблюдаемые в эксперименте параметры: период τ и декремент затухания δ колебаний, с реометрическими характеристиками среды: кинематической вязкостью ν и жесткостью G, для вязко-упругой жидкости имеет вид аналогичный зависимости для ньютоновской среды (см. (1), (2) в работе [5], представленной в настоящем сборнике), где вместо *вязкости* ν используется комплексное выражение для ν^* (1), для данной реометрической системы равное

$$\nu^* = \nu - \frac{G\tau}{\rho(\delta i + 2\pi)} i . \tag{2}$$

Неизвестные реологические параметры: ньютоновскую кинематическую вязкость ν и жесткость G, определим методами параметрической идентификации из условия минимума *функции качества*

$$f(\nu, \mathrm{G}) = \sqrt{c_{\mathrm{Re}} \cdot \mathrm{Re}^2(F) + c_{\mathrm{Im}} \cdot \mathrm{Im}^2(F)}, \tag{3}$$

где F – вискозиметрическая функция, входящая в реометрическое уравнение (см. (1), (2) в [5]); $c_{\mathrm{Re}}, c_{\mathrm{Im}}$ – весовые коэффициенты.

При организации режима крутильных колебаний путем варьирования частотой так, что обеспечивается равенство *толщины пограничного слоя* δ' и *длины упругой волны* λ:

$$\lambda = \sqrt{G/\rho} \cdot \tau/2\pi = \delta' = \sqrt{\nu \cdot \tau/2\pi}, \tag{4}$$

линии уровня функции (3) при $c_{\mathrm{Re}} = c_{\mathrm{Im}}$ на плоскости (ν, G) – окружности. В этой точке $\overline{G'_\nu} = \overline{\nu'_G}$, где $\overline{G'_\nu}, \overline{\nu'_G}$ – соответствующие производные в относительных единицах. При усилении, например, упругих свойств линии уровня вытягиваются вдоль оси вязкости, и в пределе образуется овраг, локальная ось которого перпендикулярна оси жесткости (рис. 2).

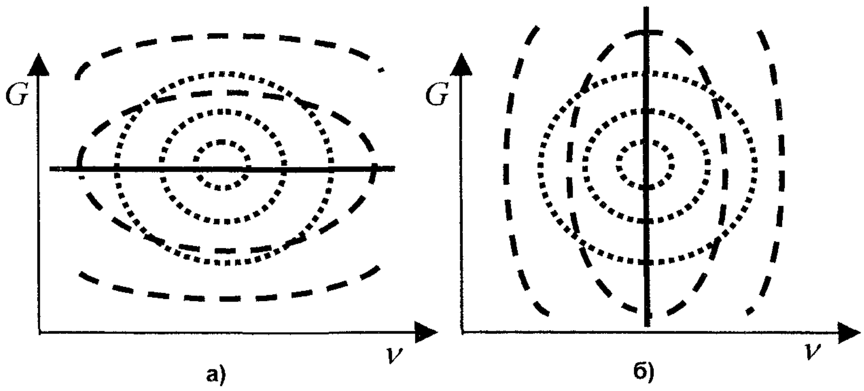

Рис. 2. Линии уровня и оси оврагов функции (3):
·········· – линии уровня при $\delta' = \lambda$;
— — — – линии уровня при $\delta' \neq \lambda$: а) $\delta' < \lambda$; б) $\delta' > \lambda$;
———— – оси оврагов при $\delta' \neq \lambda$: а) $\delta' \ll \lambda$; б) $\delta' \gg \lambda$

Характерной особенностью здесь является тот факт, что при $\delta' \neq \lambda$ оси оврагов перпендикулярны соответствующим осям (ν, G) при равенстве весовых коэффициентов в (3), в то время как угол наклона локальных осей оврагов функций $\mathrm{Re}(F)$ и $\mathrm{Im}(F)$ различен и составляет $\pi/2$ только при $\delta' >> \lambda$ (оси $\mathrm{Re}(F)$ и $\mathrm{Im}(F)$ $\perp$ оси ν) или $\delta' << \lambda$ (оси $\parallel$ оси ν). При этом для различных значений δ'/λ отношение $|\mathrm{Re}(F)/\mathrm{Im}(F)|$ различно, всегда меньше единицы и падает с усилением упругих свойств (т.е. при росте λ/δ').

Установлено, что точке $\delta' = \lambda$ соответствует *максимум кривой* $\delta = \delta(\tau_0)$ (рис. 3), когда остальные параметры установки и свойства среды фиксированы. Ошибку в определении точки $\tau = \tau_{\delta'=\lambda} = \tau_{\delta\max}$ (или τ_0) можно проанализировать в рамках чувствительности $\overline{\partial\tau_0/\partial\delta}$, приняв в качестве начального приближения результаты Швидковского Е.Г. [1] (рис. 4): $\overline{\partial\tau_0/\partial\delta} \cong \cong \overline{(\partial\tau/\partial\xi)}/\overline{(\partial\xi/\partial\delta)}$, где $\xi = R/\delta'$, где R – радиус тигля.

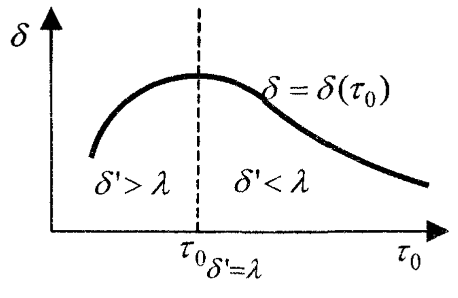

Рис. 3. Зависимость δ от τ_0

Как было указано выше, рассмотрим случай *слабо упругих свойств* и остановимся на области при $\delta' \geq \lambda$, например, для слабовязких жидкостей. т.е. для которых $\xi > 4.2$ (рис. 4) [1]. Примем точность всех измеряемых параметров не хуже 10^{-4}, а интервал изменения периода колебаний пустого тигля $\tau_0 = 0.1 \ldots 100$ с.

Анализ чувствительности проведем в терминах функций чувствительности вида

$$\psi_{ij} = \overline{\partial x_i / \partial y_j}, \tag{5}$$

где x_i – оцениваемые параметры: ν, G; y_j – измеряемые величины: $\rho, M, R, K, \tau, \tau_0, \delta$ (т.е. $i = 1,2$, $j = 1,2\ldots7$), знак $\overline{}$ соответствует безразмерным производным в некоторой исследуемой точке $(x_i{*}, y_j{*})$: $\psi_{ij} = \partial x_i / \partial y_j \cdot y_j{*} / x_i{*}$.

Для анализа слабо упругих свойств акцентируем внимание на характере поведения функций $\psi_{2j} = \overline{\partial G / \partial y_j}$ на множестве $\lambda \in [0, \delta']$. Представим данные функции как

$$\psi_{2j} = \psi_{2j}\big|_{\delta'=\lambda} \cdot \kappa_j, \tag{6}$$

где $\psi_{2j}\big|_{\delta'=\lambda}$ – чувствительность, определенная в точке с $\delta' = \lambda$; κ_j – коэффициент, отражающий ослабление наблюдаемости упругих свойств сред при росте δ'/λ и зависящий, в частности, от отношения $G_{\delta'=\lambda} / G^*$; G^* – искомое значение.

Выделим наиболее важные *особенности,* затрудняющие оценку упругих свойств.

1. При уменьшении G на порядок от точки $\delta' = \lambda$ ($G = G_{\delta'=\lambda} / k_G$, $k_G = 10$) чувствительность по всем параметрам изменялась в среднем в 7–9 раз и всякий раз приблизительно на порядок при его дальнейшем уменьшении ($k_G = 10^2$, 10^3...) ввиду соответствующего роста $\overline{G'_\nu}$ (рис. 5). В пределе при $G \to 0$ производная $\overline{G'_\nu} \to \infty$, и ошибка в определении G также стремится к бесконечности.

2. Все функции чувствительности $\psi_{ij}\big|_{\delta'=\lambda}$ принимали значения порядка единицы (в среднем равные $2\ldots5$) за исключением чувствительности по периоду τ ($\overline{\partial x_i / \partial \tau} \cong \overline{\partial x_i / \partial \tau_0}$). Чувствительность $\overline{\partial x_i / \partial \tau}$, рассчитанная через функцию качества (3) с учетом и действительной, и мнимой части при комплексе $MR^2/(2K)$ порядка 10^{-1} составляла несколько сотен, а при уменьшении порядка $MR^2/(2K)$ на порядок увеличивалась приблизительно также на порядок.

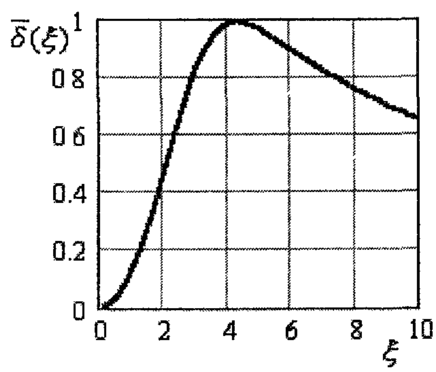

Рис. 4. Зависимость δ от ξ. Значения декремента приведены в условных единицах $\overline{\delta}(\xi)$ [1]

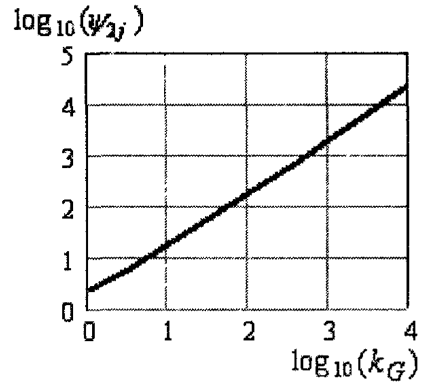

Рис. 5. Зависимость функций чувствительности от порядка жесткости при $c_{Re} = 1$ и $c_{Im} = 0$

Вспомним, что для ньютоновских жидкостей следует обращать особое внимание на точки, где ξ близко к 4.2 [1] (рис. 4), т.к. здесь наблюдается слабая зависимость декремента от вязкости, и, например, $\overline{\nu'_\delta}$ оказывается порядка 10^1 при $MR^2/(2K)$ порядка 10^{-1} и растет при уменьшении $MR^2/(2K)$. При наличии упругости, например, в точке $\delta' = \lambda$, данной ситуации не наблюдается.

Планирование оптимального реометрического эксперимента по наблюдению и оцениванию слабо упругих свойств жидких сред. На основе проведенного анализа принят следующий *алгоритм оптимального реометрического эксперимента* по исследованию слабоупругих свойств жидких сред. Прежде всего, необходимо проанализировать вид функции $f(\nu, G)$ на плоскости (ν, G) при $\tau_0 = \tau_{0\max} = 100$ с. Если линии уровня вытянуты вдоль оси вязкости, т.е. полученная точка находится *в «упругой» области* ($G > G_{\delta'=\lambda}$), то:

1. Уменьшая τ_0, определяется точка $\delta' = \lambda$, соответствующая максимуму функции $\delta = \delta(\tau_0)$.

Еще раз подчеркнем, что в расчетах необходимо учитывать ошибку в значении $\tau_{\delta'=\lambda}$, оцененную с использованием теории чувствительности для каждого отдельного случая и, в частности, различных комплексов параметров δ'/λ, δ'/R, $MR^2/(2K)$ и т.д. Приводимые ниже в алгоритме количественные характеристики получены для наихудших с позиций чувствительности случаев.

2. С ошибкой менее 1 % определяются коэффициенты ν и G из системы двух уравнений:

2.1) при $c_{\mathrm{Re}} = c_{\mathrm{Im}} = 1$ и $\delta' = \lambda$ (при $MR^2/K > 10^{-3}$) или

2.2) при $c_{\mathrm{Re}} = 1$, $c_{\mathrm{Im}} = 0$ с использованием двух точек $\delta' = 1.01\lambda$ и $\lambda = 1.01\delta'$.

Если охватываемый интервал τ_0 не позволяет найти режим, где $\delta' = \lambda$, т.е. исследуемая точка лежит *в «вязкой» области* ($G < G_{\delta'=\lambda}$), то:

1. Определяется нижняя граница $G_{\min} = G_{\delta'=\lambda}/k_G$.

Установлено, что при $G^* > G_{\min}$ можно получить оценку жесткости G с ошибкой менее 1 % при $k_G = 10^2$ (например, для свойств воды: $\rho = 1$, $\nu = 0.01$, $G_{\min} \sim 10^{-5}$ в системе СГС). Стоит отметить, что при истинном значении G^*, на много порядков отличающимся от $G_{\delta'=\lambda}$, и, следовательно, сильно чувствительного к ошибкам в измеряемым параметрам, возможно получение неверной оценки жесткости порядка $G_{\delta'=\lambda}/10^3$, хотя с другой стороны область при $k_G = 10^3$ еще удовлетворяет условию ошибки в G менее 1 %.

2. Пусть, например, значение вязкости известно из других независимых экспериментов или оценено из области, где упругие эффекты ненаблюдаемы. Тогда путем минимизации функции качества (3) при $c_{\mathrm{Re}} = 1$ и $c_{\mathrm{Im}} = 0$ находится оценка G^*.

2.1) Если $G^* > G_{\min}$ (т.е. $G_{\delta'=\lambda} > G^* > G_{\min}$), то считаем это значение жесткости истинным с ошибкой менее 1 %.

2.2) Если $G^* < G_{\min}$, то делаем вывод, что в пределах указанной точности получить надежной оценки жесткости не удалось.

Проводя детальный анализ чувствительности жесткости к неточностям в измерениях всех параметров установки и колебаний, можно найти более точную границу для каждой конкретной задачи, которая может составлять в ряде случаев $G_{\min} = G_{\delta'=\lambda}/10^4$ с ошибкой менее 10 %.

3. Иногда на практике трудно реализовать точность измерения момента подвесной системы без жидкости K и внутреннего радиуса цилиндра R порядка 10^{-4} (например, при использовании керамического тигля ошибка $\overline{\Delta R} \sim 1\%$). Тогда необходимо уточнить имеющиеся значения K и R путем минимизации функции качества на множестве четырех параметров (ν, G, K, R) (случай 3.1) или трех (случай 3.2) при уже известной вязкости. Установлено, что для получения оптимального распределения измерений необходимо использовать:

3.1) Две точки при жесткости G порядка $G_{\delta'=\lambda}$: $\delta' = 1.01\lambda$ и $\lambda = 1.01\delta'$ (в общем случае $\delta' = k_\lambda \lambda$ и $\lambda = k_{\delta'}\delta'$), при весовых коэффициентах в функции качества (3) равных между собой: $c_{\mathrm{Re}} = c_{\mathrm{Im}} = 1$.

3.2) Три точки при $c_{\mathrm{Re}} = 1$, $c_{\mathrm{Im}} = 0$, соответствующие параметрам эксперимента 1: ($\tau_{o\max}, M_{\max}$), 2: ($\tau_{o\max}, M_{\min}$), 3: ($k_\tau \cdot \tau_{o\max}, M$), где массы и коэффициенты $k_\tau < 1$ и $k_\lambda \cong k_{\delta'}$ выбираются при оптимальном планировании эксперимента в конкретном исследуемом случае в терминах матрицы Якоби.

Рассмотрим подробнее более интересный случай 3.2. Минимизируемая функция

$$Z(G,K,R)=\sum_{n=1}^{3} f_n(G,K,R), \tag{7}$$

где $n=1\ldots3$ – номера экспериментальных точек, $f(G,K,R)$ – действительная часть вискозиметрической функции (см. (1), (2) в [5]), имеет трехмерный овраг в пространстве (GKR). Варьирование периодом приводит к углублению минимума оврага в плоскости (KR), а массы – в плоскостях, связанных с G. Уменьшение периода от $\tau_{o\max}$ до $\tau_0 = k_\tau \cdot \tau_{o\max}$ увеличивает ошибку в определении жесткости, но позволяет улучшить оценки K и R. Оптимальная выборка измерений следует из анализа *матрицы чувствительности* функций чувствительности $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} \partial\tau/\partial G\big|_1 & \partial\tau/\partial K\big|_1 & \partial\tau/\partial R\big|_1 \\ \partial\tau/\partial G\big|_2 & \partial\tau/\partial K\big|_2 & \partial\tau/\partial R\big|_2 \\ \partial\tau/\partial G\big|_3 & \partial\tau/\partial K\big|_3 & \partial\tau/\partial R\big|_3 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где нижние индексы соответствуют $n=1\ldots3$. Так, например, в начальном приближении допустимо определять массу из условия $0.1\cdot 2H_{\max}/R = 2H_{\min}/R \sim 1$, а коэффициент пропорциональности k_τ принять $k_\tau \sim 0.1$.

Заключение. В настоящей работе проведено *математическое моделирование оптимального реометрического эксперимента* по обнаружению и корректной параметрической идентификации слабо выраженных *упругих свойств жидкостей* методом крутильных колебаний.

Результаты работы могут быть использованы во всех отраслях, где применяются жидкости со слабо неньютоновскими свойствами: в химической, металлургической, биологической, пищевой промышленности, в энергетике и медицине:

1) при проведении исследований в *теории наследственных сред* и разработке микроскопических моделей жидкостей, интерпретирующих их реологическое поведение;

2) при проектировании *технологических процессов* с участием текучих компонентов, разработке средств транспортировки жидкостей и контроля их состояния.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (№ 01-01-96424) и программы поддержки научного творчества молодежи в вузах Челябинской области.

Литература

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.

2. Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 309 с.

3. Mason W.P. // *Trans. ASME.* – 1947. – № 69. – P. 359.

4. Kleiman R.N. Analysis of the oscillating-cup viscometer for the measurement of viscoelastic properties // *Phys. Rev.* – 1987. - V. 35, № 1. – P. 261–275.

5. Елюхина И.В. Планирование оптимального эксперимента по одновременному определению вязкости и плотности ньютоновской среды – См. в наст. сборнике.