УДК 517.942:519.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛЮСТЕРНИКА

С.М. Григорьев

Изучается предельное поведение пуассоновского случайного блуждания в R^n, порождающего широкий класс специальных функций. Для данного случайного блуждания получена предельная теорема и построен главный член асимптотического разложения функций Люстерника.

1. Обозначения

Нам будет удобно в дальнейшем для сокращения записи использовать следующие обозначения:

$$x, y, z, \ldots \in R^l, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_l \end{pmatrix}, \ldots, \; x^y = \prod_i x_i^{y_i}, \; S(x) = \sum_i x_i, \; \Gamma(x) = \prod \Gamma(x_i).$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

2. Пуассоновское блуждание в R^{n+1}

Рассмотрим $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ – базис в R^{n+1}. Зададим случайное блуждание в R^{n+1} с помощью однородной переходной функции $P(x,y)$:

$$\forall x, y \in R^{n+1} : P(x,y) = P(0, y-x) = \begin{cases} p_i, y - x = e_i \\ 0, \; y - x \neq e_i \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1. \tag{1}$$

Предполагается, что количество N_τ переходов за время τ, прошедшее с некоторого момента времени $\tau = 0$, регулируется пуассоновским процессом с параметром λ:

$$p\{N_\tau = s\} = e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^s}{s!}. \tag{2}$$

Будем обозначать θ_τ – положение данного случайного блуждания в момент времени τ.

3. Орбиты в R^{n+1}

Векторы $x, y \in R^{n+1}$ назовем *эквивалентными* (и обозначим $x \equiv y$), если $y - x = (m, m, \ldots, m)$, где $m \in Z$. Отношение $x \equiv y$, очевидно, является отношением эквивалентности и разбивает R^{n+1} на непересекающиеся классы : $R^{n+1} = \bigcup H_x$, где $H_x = \{y \in R^{n+1} | y \equiv x\}$. Для $\forall x, y \in R^{n+1}$ таких, что $x \not\equiv y$,выполнено $H_x \bigcap H_y = \emptyset$.

Обозначим Ω_{n+1} – целочисленную сеть в R^{n+1}, т.е. множество векторов с целочисленными в R^{n+1} координатами:

$$\Omega_{n+1} = \{x | x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), x_i \in Z, i = 1, 2, \ldots, n+1\}.$$

Очевидно, что если $x \in \Omega_{n+1}$ и $x \equiv y$, то $y \in \Omega_{n+1}$. Таким образом, сеть Ω_{n+1} распадается в прямую сумму целочисленных классов эквивалентности: $\Omega_{n+1} = \sum_k H_k$, где классы $H_k = \{r \in \Omega_{n+1} | r = k + (m, m, \ldots, m), m \in Z\}$, k – целочисленный вектор. Далее всякий класс H_k будем называть *орбитой целочисленного* вектора $k \in R^{n+1}$.

4. Функции Люстерника

Случайное блуждание (1)–(2) индуцирует случайное блуждание по орбитам сети Ω_{n+1}, задаваемое однородной функцией перехода $P^*(H_k, H_r)$:

$$P^*(H_k, H_r) = \begin{cases} 0, & \nexists m \in Z : k - r - (m, m, \ldots, m) = e_i \\ p_i, & \exists m \in Z : k - r - (m, m, \ldots, m) = e_i \end{cases}. \tag{3}$$

Известно [2], что вероятность $P_\tau(H_k)$ для этого случайного блуждания за время τ попасть из начала координат на орбиту H_k точки k равна:

$$P_\tau(H_k) = P(\theta_\tau \in H_k) = e^{-\lambda\tau} G_k(\lambda \overline{p} \tau), \tag{4}$$

где $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+1})$, а функции $G_{\overline{k}}(\overline{z})$, называемые в дальнейшем *функциями Люстерника*, даются соотношением

$$G_k(\overline{z}) = \sum \frac{\overline{z}^{k+mA}}{(k+mA)!}, \ A = (1, 1, \ldots, 1). \tag{5}$$

(см. обозначения), в котором суммирование ведется по всем целым значениям параметра $m \in Z$. Функции $G_k(\overline{z})$, впервые определенные в [1], являются широким обобщением классических специальных функций математической физики – цилиндрических функций, в частности функций Бесселя, функций параболического цилиндра и др.

Целью настоящей заметки является получение главного члена асимптотического разложения функций (5).

Каждой орбите H_k поставим в соответствие вектор в R^n, координаты которого $\hat{k} = \{k_1 - k_{n+1}, \ldots, k_n - k_{n+1}\}$.

При этом случайное блуждание (1)–(2) порождает случайное блуждание $\zeta_\tau = \sum_{i=1}^{N_\tau} \xi_i$ в R^n, где $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – независимые в совокупности, одинаково распределенные в R^n случайные векторы, ряд распределения которых

$$p\{\xi_i = x\} = \begin{cases} p_j, & x = e_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ p_{n+1}, & x = (-1, -1, \ldots, -1) = e_{n+1} & \\ 0, & x \neq e_j, & j = 1, 2, \ldots, n+1 \end{cases}.$$

Здесь вероятности p_j – такие же, как и в п. 2, $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ – базис в R^n, $\sum_{i=1}^{n+1} e_i = 0$, N_τ – пуассоновская величина с параметром λ, не зависящая от ξ_i. Очевидно, имеет место

Лемма 1

Для случайного блуждания (3) по орбитам сети Ω_{n+1} справедливо:

$$P_\tau(H_k) = P\left(\zeta_\tau = \hat{k} = (k_1 - k_{n+1}, k_2 - k_{n+1}, \ldots, k_n - k_{n+1})\right), \quad \forall k = (k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}) \in \Omega_{n+1}.$$

Доказательство

Рассмотрим события $C_m = \{\theta_\tau = k + (m, m, \ldots, m)\}$. Событие C_m происходит, если за время τ произошло $k_i + m$ переходов в направлении e_i. Пусть C – событие $\{\theta_\tau \in H_k\}$. Тогда, если $k_0 = \min_{i=1-n+1} k_i$, то $C = \sum_{m=-k_0}^{\infty} C_m$.

Рассмотрим теперь события D_m, происходящие тогда, когда за время τ вектор ζ_τ образовался как сумма $\zeta_\tau = \sum_{i=1}^{N_\tau} \xi_i$, где среди слагаемых – по $k_j - k_{n+1} + m$ штук в направлении e_j $(j = 1 \div n+1)$, и событие $D = \{\zeta_\tau = \hat{k}\}$. Тогда, если $k_0' = \max_i (k_{n+1} - k_i) = k_{n+1} - k_0$, то

$D=\sum_{m=k_0'}^{\infty} D_m=\sum_{m'=-k_0}^{\infty} D_{m'+k_{n+1}}$, где $m'=m-k_{n+1}$. Из описания случайного блуждания (1–2) и вектора ζ_τ очевидным образом вытекает, что $P(C_m)=P(D_{k_{n=1}+m})$. Отсюда:

$$P(C)=\sum_{m=-k_0}^{\infty} P(C_m)=\sum_{m=-k_0}^{\infty} P(D_{m+k_{n+1}})=P(D),$$

что и требовалось доказать.

5. Некоторые предельные теоремы

Заметим, что описанный выше процесс удовлетворяет закону больших чисел и для него справедливы аналоги классических предельных теорем, важнейшими из которых для дальнейшего являются следующие.

Лемма 2 (предельная теорема для случайной суммы одинаково распределенных векторов)

Пусть случайные векторы $\xi_i \in R^n$ $(i=1,2,\ldots)$ независимы и одинаково распределены с рядом распределения $P\{\xi=e_i\}=p_i, i=1,2,...,n+1, \sum_i p_i=1$; $e_i(i=1,\ldots,n)$ – орты в R^n, $\sum_{i=1}^{n+1} e_i=0$, N_τ – пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda\tau$, не зависящая от ξ_i. Обозначим $\overline{p}=\sum_{i=1}^{n+1} p_i e_i=\sum_{i=1}^{n}(p_i-p_{n+1})e_i$. Тогда при $\lambda\tau\to\infty$ распределение вектора $\overline{\zeta}_\tau=\dfrac{\sum_{i=1}^{N_\tau}\overline{\xi}_i-\lambda\overline{p}\tau}{\sqrt{\lambda\tau}}$ стремится к нормальному распределению с характеристической функцией

$$\omega(\overline{t})\sim\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^2\right]. \qquad \textbf{(6)}$$

Доказательство

Пусть $\sum_{i=1}^{N_\tau}\overline{\xi}_i$ – характеристическая функция вектора ξ_i.

Из условия: $\varphi(\overline{t})=\sum_{i=1}^{n+1} p_i e^{i\overline{t}e_i}=\sum_{i=1}^{n+1} p_i e^{it_i}$, где $t_{n+1}=-\sum_{i=1}^{n} t_i$.

Далее, характеристическая функция вектора $\sum_{i=1}^{N_\tau}\overline{\xi}_i$:

$$\psi(\overline{t})=\sum_{s=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^s}{s!}\right)\varphi^s(\overline{t})=e^{-\lambda\tau}\cdot e^{\lambda\tau\,\varphi(\overline{t})}=\exp\left[\lambda\tau\left(\varphi(\overline{t})-1\right)\right].$$

Отсюда характеристическая функция вектора $\overline{\eta}_\tau=\left(\sum_{i=1}^{N_\tau}\xi_i\right)-\lambda\tau\overline{p}$ такова:

$$\psi_0(\overline{t})=e^{-\lambda\tau\overline{p}\overline{t}}\cdot\psi(\overline{t})=\exp\left[\lambda\tau\left(\varphi(\overline{t})-i\overline{p}\overline{t}-1\right)\right].$$

Здесь, очевидно, $\overline{p}\overline{t}=\sum_{i=1}^{n}(p_i-p_{n+1})t_i=\sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i$.

Заметим, что $\varphi(t)$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$\varphi(\overline{t})=\sum_{i=1}^{n+1} p_i\left(1+it_i-\frac{t_i^2}{2}+\cdots\right)=\sum_{i=1}^{n+1} p_i+i\sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^2+\ldots=1+i\overline{p}\overline{t}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^2+\cdots.$$

Отсюда

$$\varphi(\overline{t})-i\overline{p}\overline{t}-1=\sum_{s=2}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^s.$$

Но тогда для характеристической функции случайного вектора $\overline{\zeta}_\tau = \dfrac{\left(\sum\limits_{l=1}^{N_t}\xi_l\right) - \lambda\tau\overline{p}}{\sqrt{\lambda\tau}} = \dfrac{\eta_\tau}{\sqrt{\lambda\tau}}$ получаем:

$$\omega(\overline{t}) = \psi_0\left(\frac{\overline{t}}{\sqrt{\lambda\tau}}\right) = \exp\left[\lambda\tau\left(\sum_{s=2}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{l=1}^{n+1}p_l\left(\frac{t_l}{\sqrt{\lambda\tau}}\right)^s\right)\right] = \exp\left[-\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{i^s}{(s+2)!}\sum_{l=1}^{n+1}p_l\frac{t_l^{s+2}}{(\lambda\tau)^{s/2}}\right)\right].$$

При $\lambda\tau \to \infty$ имеем $\omega(\overline{t}) \sim \exp\left[-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{l=1}^{n+1}p_l t_l^2\right]$, что и требовалось.

Следующая лемма есть многомерный аналог известной леммы о выражении вероятностей дискретного распределения через характеристические функции (например, [3], с. 573).

Лемма 3 (формула обращения)

Пусть $\overline{\xi}$ – случайный n-мерный вектор, имеющий решетчатое дискретное распределение с шагами по осям $h_1, h_2, \ldots, h_n$ и одним из узлов $\overline{b}_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Тогда вероятности $p_{\overline{k}} = p_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ того, что вектор $\overline{\xi}$ примет значение $\overline{b}_{\overline{k}} = (b_1 + k_1h_1, b_2 + k_2h_2, \ldots, b_n + k_nh_n)$, могут быть получены из соотношения

$$p_{\overline{k}} = \frac{h_1h_2\ldots h_n}{(2\pi)^n}\int_{-\pi/h_1}^{\pi/h_1}\int_{-\pi/h_2}^{\pi/h_2}\cdots\int_{-\pi/h_n}^{\pi/h_n}\varphi(\overline{t})e^{-i\overline{b}_{\overline{k}}\overline{t}}d\overline{t}, \tag{7}$$

где $\varphi(\overline{t})$ – характеристическая функция вектора $\overline{\xi}$.

Доказательство

Характеристическую функцию вектора $\overline{\xi}$ можно записать в виде $\varphi(\overline{t}) = \sum\limits_{\overline{k}} p_{\overline{k}}e^{-i\overline{b}_{\overline{k}}\overline{t}}$.

Отсюда:

$$\frac{h_1h_2\ldots h_n}{(2\pi)^n}\int_{-\pi/h_1}^{\pi/h_1}\int_{-\pi/h_2}^{\pi/h_2}\cdots\int_{-\pi/h_n}^{\pi/h_n}\varphi(\overline{t})e^{-i\overline{b}_{\overline{k}}\overline{t}}d\overline{t} = \frac{h_1h_2\ldots h_n}{(2\pi)^n}\int_{-\pi/h_1}^{\pi/h_1}\int_{-\pi/h_2}^{\pi/h_2}\cdots\int_{-\pi/h_n}^{\pi/h_n}\sum_{\overline{r}}\left[p_{\overline{r}}e^{i(\overline{b}_{\overline{r}}-\overline{b}_{\overline{k}})\overline{t}}\right]d\overline{t} =$$

$$= \frac{h_1h_2\ldots h_n}{(2\pi)^n}\sum_{\overline{r}}p_{\overline{r}}I(\overline{k},\overline{r}),$$

где

$$I(\overline{k},\overline{r}) = \int_{-\pi/h_1}^{\pi/h_1}\int_{-\pi/h_2}^{\pi/h_2}\cdots\int_{-\pi/h_n}^{\pi/h_n}e^{i(\overline{b}_{\overline{k}}-\overline{b}_{\overline{r}})\overline{t}}d\overline{t} = \int_{-\pi/h_1}^{\pi/h_1}e^{ih_1(k_1-r_1)t_1}dt_1\int_{-\pi/h_2}^{\pi/h_2}e^{ih_2(k_2-r_2)t_2}dt_2\cdots\int_{-\pi/h_n}^{\pi/h_n}e^{ih_n(k_n-r_n)t_n}dt_n.$$

Заметим, что

$$\int_{-\pi/h_j}^{\pi/h_j}e^{ih_j(k_j-r_{j1})t_j}dt_j = \frac{1}{ih_j(k_j-r_j)}\left(e^{i\pi(k_j-r_j)} - e^{-i\pi(k_j-r_j)}\right) = \begin{cases} 0, & k_j \neq r_j \\ 2\pi/h_j, & k_j = r_j \end{cases},$$

что влечет за собой

$$I(\overline{k},\overline{r}) = \begin{cases} 0, & \overline{k} \neq \overline{r} \\ \dfrac{(2\pi)^n}{h_1h_2\ldots h_n}, & \overline{k} = \overline{r} \end{cases}.$$

Поэтому

$$\frac{h_1h_2\ldots h_n}{(2\pi)^n}\sum_{\overline{r}}p_{\overline{r}}I(\overline{k},\overline{r}) = p_{\overline{k}},$$

что и требовалось.

Теорема 1 (вариант предельной теоремы для случайной суммы в R^n)

Пусть случайные векторы $\overline{\xi}_i \in R^n$ $(i=1,2,\ldots)$ независимы и одинаково распределены с рядом распределения; $P\{\overline{\xi}=e_i\}=p_i$, $i=1,2,\ldots,n+1$, $\sum_{i=1}^{n+1} p_i=1$, e_i $(i=1,\ldots,n)$ – базис в R^n, $\sum_{i=1}^{n+1} e_i=0$, N_τ – пуассоновская величина с параметром $\lambda\tau$, не зависящая от $\overline{\xi}_i$. Обозначим:

$$a=\frac{1}{d}-\frac{1}{d\sqrt{1+p_{n+1}d}};\quad d=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}. \tag{8}$$

Тогда при $\lambda\tau\to\infty$ для вероятности $P_\tau(\overline{k})=P\left\{\sum_{i=1}^{N_\tau}\overline{\xi}_i=\overline{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)\right\}$ справедливо соотношение

$$P_\tau(\overline{k}')\sim\frac{1}{\sqrt{(2\pi\lambda\tau)^n p_1p_2\cdots p_{n+1}\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_{n+1}}\right)}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(\lambda(p_j-p_{n+1})\tau-k_j-a\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda(p_j-p_{n+1})\tau-k_j}{p_j}\right)^2}{\lambda p_j\tau}\right). \tag{9}$$

Доказательство

Пусть $\overline{p}=\sum_{i=1}^{n}(p_i-p_{n+1})e_i=\sum_{i=1}^{n+1}p_ie_i$. Рассмотрим вектор $\overline{\zeta}_\tau=\frac{\sum_{i=1}^{N_\tau}\overline{\xi}_i-\lambda\overline{p}\tau}{\sqrt{\lambda\tau}}$. Из условия теоремы очевидным образом вытекает, что вектор $\overline{\eta}_\tau$ имеет решетчатое распределение с узлом $(0,0,\ldots,0)$ и периодами по каждой оси $h_i=1$, поэтому $\overline{\zeta}_\tau$ имеет решетчатое распределение с узлом $\overline{b}_0=-\overline{p}\sqrt{\lambda\tau}$ и периодами по каждой оси $h_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda\tau}}$. В соответствии с леммой 3 заключаем:

$$P_{\overline{k}}=P\left\{\sum_{i=1}^{N_t}\overline{\xi}_i=\overline{k}\right\}=P\left\{\overline{\zeta}_\tau\frac{\sum_{i=1}^{N_\tau}\overline{\xi}_i-\lambda\overline{p}\tau}{\sqrt{\lambda\tau}}=\overline{b}_{\overline{k}}=\frac{\overline{k}-\lambda\overline{p}\tau}{\sqrt{\lambda\tau}}\right\}=$$
$$=\frac{1}{\left(2\pi\sqrt{\lambda\tau}\right)^n}\int_{-\pi\sqrt{\lambda\tau}}^{\pi\sqrt{\lambda\tau}}\cdots\int_{-\pi\sqrt{\lambda\tau}}^{\pi\sqrt{\lambda\tau}}\omega(\overline{t})e^{-i\overline{b}_{\overline{k}}\overline{t}}dt_1\ldots dt_n,$$

где $\omega(\overline{t})$ – характеристическая функция случайного вектора $\overline{\zeta}_\tau$. Тогда из леммы 2 следует:

$$P_\tau(\overline{k})\sim\frac{1}{\left(2\pi\sqrt{\lambda\tau}\right)^n}\int_{-\pi\sqrt{\lambda\tau}}^{\pi\sqrt{\lambda\tau}}\cdots\int_{-\pi\sqrt{\lambda\tau}}^{\pi\sqrt{\lambda\tau}}\exp\left[-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{p_it_i^2}{2}+\frac{i\overline{t}}{\sqrt{\lambda\tau}}\left(\lambda\overline{p}\tau-\overline{k}\right)\right]dt_1\ldots dt_n=$$
$$=\frac{1}{\left(2\pi\sqrt{\lambda\tau}\right)^2}\iint\limits_{D_\tau}\ldots\int\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n+1}p_it_i^2-\frac{2i\overline{t}}{\sqrt{\lambda\tau}}\left(\lambda\overline{p}\tau-\overline{k}\right)\right)\right]d\overline{t}=I, \tag{10}$$

где

$$D_\tau=\bigcap_{i=1}^{n}\left\{-\pi\sqrt{\lambda\tau}<x_i<\pi\sqrt{\lambda\tau}\right\}.$$

Для вычисления интеграла (10) перейдем к новым переменным:

$$\bar{t} = Q\bar{T}\text{, где } Q = \|q_{ij}\|_{i,j=1}^{n},\ q_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{p_i}} - \frac{a}{p_i\sqrt{p_j}}.$$

Таким образом, переменные $t_1, t_2, \ldots, t_n$ выражаются через переменные $T_1, T_2, \ldots, T_n$ в следующем виде:

$$t_i = \frac{T_i}{\sqrt{p_i}} - \frac{aS}{p_i},$$

где для краткости обозначено:

$$S = S(\bar{T}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_j}{\sqrt{p_j}}, \qquad t_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} t_i = -S(1-ad). \tag{11}$$

Отсюда:

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(t_i\sqrt{p_i}\right)^2 + p_{n+1}t_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(T_i - \frac{aS}{\sqrt{p_i}}\right)^2 + p_{n+1}S^2(1-ad)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(T_i^2 - \frac{2aST_i}{\sqrt{p_i}} + \frac{a^2S^2}{p_i}\right) + p_{n+1}S^2(1-ad)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} T_i^2\right) - 2aS\cdot S + a^2S^2\cdot d + p_{n+1}S^2(1-ad)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} T_i^2\right) + S^2\left[a^2d(1+p_{n+1}d) - 2a(1+p_{n+1}d) + p_{n+1}\right] = \left(\sum_{i=1}^{n} T_i^2\right),$$

т.к. выражение в квадратных скобках в силу (8) равно 0. Далее:

$$-\frac{2i\bar{t}}{\sqrt{\lambda\tau}}\left(\lambda\bar{p}\tau - \bar{k}\right) = -\frac{2i}{\sqrt{\lambda\tau}}\sum_{i=1}^{n} t_i\left(\lambda(p_i - p_{n+1})\tau - k_i\right) = -2i\sqrt{\lambda\tau}\left[\sum_{j=1}^{n} t_j p_j - p_{n+1}\sum_{j=1}^{n} t_j - \frac{1}{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{n} k_i t_i\right] =$$

$$= -2i\sqrt{\lambda\tau}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(t_j\sqrt{p_j} - aS\right) - p_{n+1}S(1-ad) - \frac{1}{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j t_j}{\sqrt{p_j}} + \frac{aS}{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{p_j}\right] =$$

$$= -2i\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i}{\sqrt{\lambda p_i\tau}}\left[\lambda p_i\tau - k_j - an\lambda\tau - \lambda p_{n+1}\tau(1-ad) + a\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{p_j}\right] =$$

$$= -2i\sum_{j=1}^{n}\frac{T_j}{\sqrt{\lambda p_j\tau}}\left[\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j}\right].$$

Отсюда:

$$\sum_{j=1}^{n+1} p_j t_j^2 - \frac{2i\bar{t}}{\sqrt{\lambda\tau}}\left(\lambda\bar{p}\tau - \bar{k}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(T_j - \frac{i}{\sqrt{\lambda p_j\tau}}\left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j}\right)\right)^2 +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j}\right)^2}{\lambda p_j\tau}.$$

Тогда интеграл (10) равен:

$$I = \frac{\det Q}{\sqrt{\left(2\pi\sqrt{\lambda\tau}\right)^n}}\left(\iint\limits_{\Delta_\tau}\ldots\int \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(T_j - \frac{i}{\sqrt{\lambda p_j\tau}}\left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j}\right)\right)^2\right)\right]d\bar{T}\right)\times$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j}\right)^2}{\lambda p_j\tau}}.$$

Интеграл, стоящий в скобках, есть интеграл Пуассона по области Δ_τ, которая является образом области D_τ при линейном невырожденном ($\det Q \neq 0$, см. ниже) преобразовании $\bar{t} = Q\bar{T}$. Но $\lim\limits_{\lambda\tau\to\infty} D_\tau = R^n$, откуда аналогично $\lim\limits_{\lambda\tau\to\infty} \Delta_\tau = R^n$. Поэтому интеграл в скобках при $\lambda\tau \to \infty$ стремится к $\left(\sqrt{2\pi}\right)^n$. Отсюда

$$I \sim \frac{\det Q}{\sqrt{(2\pi\lambda\tau)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j - a\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\lambda(p_j - p_{n+1})\tau - k_j}{p_j}\right)^2}{\lambda p_j \tau} \right). \tag{12}$$

Осталось найти $\det Q$:

$$\det Q = \det\left\| \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{p_i}} - \frac{a}{p_i\sqrt{p_j}} \right\| = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_{n+1}}} \det\left\| \delta_{ij} - \frac{a}{p_i} \right\| =$$

$$= \frac{a^n}{(p_1 p_2 \cdots p_{n+1})^{3/2}} \det\left\| \frac{p_i\delta_{ij}}{a} - 1 \right\| = \frac{a^n}{(p_1 p_2 \cdots p_{n+1})^{3/2}} \det\left\| \frac{p_i\delta_{ij}}{a} - \frac{p_n}{a}\delta_{nj}(1-\delta_{in}) - \delta_{in} \right\| =$$

$$= \frac{a^n}{(p_1 p_2 \cdots p_{n+1})^{3/2}} \det\left\| \frac{p_i\delta_{ij}}{a} - \frac{p_n}{a}\delta_{nj}(1-\delta_{in}) - \delta_{in}\delta_{nj}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_n}{p_i} \right\| = \frac{a^n \cdot \dfrac{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}{a^{n-1}} \cdot \left(\dfrac{p_n}{a} - \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{p_n}{p_i} \right)}{(p_1 p_2 \cdots p_n)^{3/2}} =$$

$$= \frac{a \cdot \left(\dfrac{1}{a} - d\right)}{\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}} = \frac{1 - ad}{\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}} = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n (1 + p_{n+1} d)}} = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_{n+1}\left(\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_{n+1}} \right)}},$$

откуда автоматически следует (9).

Полученное соотношение может служить источником для получения главного члена асимптотического разложения функций Люстерника. Точнее, имеет место

Следствие (асимптотическая формула для функций Люстерника).

Для функций Люстерника $G_{\bar{k}}(\bar{x})$ (5) при $S(\bar{x}) \to \infty$ справедливо соотношение:

$$G_{\bar{k}}(\bar{x}) \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n x_1 x_2 \ldots x_{n+1}\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_{n+1}} \right)}} \times$$

$$\times \exp\left(S(\bar{x}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(x_j - x_{n+1} - k'_j - a(\bar{x})\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{x_j - x_{n+1} - k'_j}{x_j} \right)^2}{x_j} \right), \tag{9'}$$

где обозначено $k'_j = k_j - k_{n+1}$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $\quad a(\bar{x}) = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\dfrac{x_{n+1}}{x_i}}} \right)$. **(8′)**

Доказательство

Формула (9′) немедленно вытекает из (9) и из леммы 1, если учесть, что $S(\lambda\bar{p}\tau) = \lambda\tau$ и подставить в формулу (4) $\bar{x}$ вместо $\lambda\bar{p}\tau$, тогда $p_i = x_i / S(\bar{x})$.

6. Пример

1. Функции Люстерника одного переменного. Пусть $\bar{x}=(x,x,\dots,x)$. Тогда $G_{\bar{k}}(\bar{x})=\sum_{m\in Z}\frac{x^{S(\bar{k}+mA)}}{(\bar{k}+mA)!}=U_{\bar{k}}(x)$ – функция Люстерника одного переменного, $A=[1,1,\dots,1]$. Из (9′) для $U_{\bar{k}}(x)$ имеем:

$$x_1=x_2=\dots x_{n+1}=x\ ;\ S(\bar{x})=(n+1)x\ ;\ a(\bar{x})=\frac{x}{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right);\ \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-x_{n+1}-k'_j}{x_j}=-\frac{S(\bar{k}')}{x};$$

где $\bar{k}'=(k'_1,k'_2,\dots,k'_n)$. Отсюда:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(x_j-x_{n+1}-k'_j-a(\bar{x})\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-x_{n+1}-k'_j}{x_j}\right)^2}{x_j}=\frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n}\left(-k'_j+\frac{S(k')}{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n}\left(k_j'^2-2\frac{k'_jS(\bar{k}')}{n\sqrt{n+1}}(\sqrt{n+1}-1)+\frac{\left(S(\bar{k}')\right)^2(\sqrt{n+1}-1)^2}{n^2(n+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n}k_j'^2+\frac{1}{x}\sum_{j=1}^{n}\left(S(\bar{k}')\right)^2\left(\frac{2-2\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+1}}+\frac{(\sqrt{n+1}-1)^2}{n^2(n+1)}\cdot n\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\left(\left|\bar{k}'\right|^2+\left(S(\bar{k}')\right)^2\left(\frac{2\sqrt{n+1}-2n-2+n+1-2\sqrt{n+1}+1}{n(n+1)}\right)\right)=\frac{1}{x}\left(\left|\bar{k}'\right|^2-\frac{\left(S(\bar{k}')\right)^2}{n+1}\right).$$

Итак:

$$U_{\bar{k}}(x)\sim\frac{1}{\sqrt{(2\pi x)^n(n+1)}}\exp\left((n+1)x-\frac{1}{2x}\left(\left|\bar{k}'\right|^2-\frac{\left(S(\bar{k}')\right)^2}{n+1}\right)\right)\quad(x\to\infty)\ . \tag{13}$$

2. Модифицированные функции Бесселя. Для модифицированных функций Бесселя $I_k(x)=\sum_{m=-k}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2m}}{(k+m)!m!}=U_{[k,0]}\left(\frac{x}{2}\right)$ из (13) имеем: $n=1$; $\left|\bar{k}'\right|=k=S(\bar{k}')$. Отсюда:

$$I_k(x)=U_{[k,0]}\left(\frac{x}{2}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot 2}}\exp\left(2\cdot\frac{x}{2}-\frac{1}{2\cdot\frac{x}{2}}\left(k^2-\frac{k^2}{2}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(x-\frac{k^2}{2x}\right)\quad(x\to\infty). \tag{14}$$

Аналогичным образом из формулы (9′) можно получить асимптотики для многих других функций.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В.И. Заляпину за постановку задачи, многочисленные обсуждения возникавших вопросов и результатов, а также за предоставленное техническое и информационное обеспечение.

Литература

1. Люстерник Л.А. Об одной задаче теории массового обслуживания и связанном с ней обобщении цилиндрических функций // *ДАН СССР*. – 1967. – Т. 177, № 5.

2. Заляпин В.И., Люстерник Л.А. О системе функций пуассоновского блуждания// *ДАН СССР*. – 1972. – Т. 207. – Вып. 1.

3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. II. – С. 738.