УДК 517.948

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Л.Д. Менихес

В работе получено одно достаточное условие регуляризуемости, использующее свойства продолженного оператора. Доказательство использует результаты теории двойственности ненормируемых пространств. Приводится также пример нерегуляризуемого оператора в пространстве непрерывных функций.

Введение

Неустойчивыми задачами называются такие задачи, в которых сколь угодно малым изменениям исходных данных могут соответствовать сколь угодно большие изменения решения. Большое число практически важных задач является неустойчивым. Поэтому представляют интерес методы решения таких задач, с помощью которых удается находить решения с удовлетворительной степенью точности.

А.Н. Тихонов [1, 2] изобрел метод регуляризации, который в дальнейшем получил широкое распространение. Затем В.А. Винокуров [3] придал методу регуляризации естественную общность.

Пусть X и Y – метрические пространства и f – отображение с областью определения $D(f)\subset X$ и множеством значений в Y. Тогда отображение f называется регуляризуемым, если существует семейство отображений $\{R_\delta\}$, $\delta\in(0,\delta_0)$, $R_\delta : X\to Y$ такое, что

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\rho(x,x')\le\delta}\big(f(x),R_\delta(x')\big)=0. \qquad (1)$$

В этом случае семейство $\{R_\delta\}$ называется регуляризатором для отображения f.

Рассмотрим задачу вычисления значений отображения f. Пусть требуется найти $f(x)$, но исходное данное x точно не известно, а известно некоторое x' такое, что $\rho(x,x')\le\delta$. Если отображение f непрерывно, то $f(x')$ можно взять за приближенное значение $f(x)$, так как в этом случае $\lim\limits_{x'\to x} f(x')=f(x)$. Но в случае, когда f не является непрерывным отображением, ситуация усложняется. Если же f является регуляризуемым отображением, то из (1) ясно, что удовлетворительным приближенным решением будет $R_\delta(x')$. В этом и состояла основная идея А.Н. Тихонова: для решения неустойчивых задач к приближенным исходным данным применять не данное отображение, а специальным образом подобранные другие отображения, зависящие от точности исходных данных. В своих пионерских работах [1, 2] А.Н. Тихонов указал также один из методов нахождения регуляризатора $\{R_\delta\}$. Этот метод состоял в решении некоторой вариационной задачи. Поэтому раньше методом регуляризации и называли решение неустойчивых задач с помощью регуляризатора, построенного по вариационной задаче Тихонова. Теперь естественно называть методом регуляризации построение приближенного решения с помощью любого регуляризатора, так как именно в этом и состояла основная идея А.Н. Тихонова.

Разобьем все отображения f на три класса.

I. Отображение f непрерывно.

II. Отображение f разрывно, но регуляризуемо.

III. Отображение f нерегуляризуемо.

Отображения из класса I настолько хороши, что метод регуляризации для них не нужен. Отображения из класса III настолько плохи, что метод регуляризации к ним не применим. Основным полем применения метода регуляризации являются отображения из класса II. Поэтому важной является задача определения принадлежности данного отображения к классу II. Во втором параграфе данной работы приведем одно такое условие, а в первом параграфе рассмотрим вопрос о существовании нерегуляризуемых отображений. В данной работе будем рассматривать так называемые линейные обратные задачи. Это – такие задачи, в которых $f = A^{-1}$, где $A: E \to F$ – линейный непрерывный инъективный оператор, E, F – банаховы пространства. Легко видеть, что задача решения операторного уравнения

$$Ax = y \tag{2}$$

при приближенно заданной правой части, т.е. когда вместо y известно y_δ такое, что $\|y_\delta - y\| \le \delta$, сводится к задаче вычисления значения отображения $f = A^{-1}$. Иногда говорят, что задача решения уравнения (2) регуляризуема или оператор A регуляризуем, если регуляризуемо отображение $f = A^{-1}$. В своих работах в 1963 г. А.Н. Тихонов рассматривал уравнение (2), где $E = C(0,1)$, $F = L_2(0,1)$ и A – интегральный оператор. Причем, построенный им регуляризатор, строго говоря, не является регуляризатором для A^{-1}, а только для A_1^{-1}, где A_1 – сужение оператора A на дифференцируемые функции, так как соотношение (1) для тихоновского регуляризатора выполняется только для дифференцируемых функций. В следующем параграфе увидим, что это не случайно, что (1) не может выполняться для всех непрерывных функций не только для построенного А.Н. Тихоновым регуляризатора, но и для любого семейства $\{R_\delta\}$, так как существуют нерегуляризуемые интегральные операторы.

§ 1. О существовании нерегуляризуемых операторов

В середине 70-х годов (см. [4]) прошлого века В.А. Винокуров, Ю.И. Петунин и А.Н. Пличко заметили связь регуляризуемости отображения A^{-1} с образом сопряженного оператора A^*. Они установили, что регуляризуемость A^{-1} эквивалентна тому, что подпространство $A^*Y^* \subset X^*$ является нормирующим. Таким образом, в теории регуляризуемости получила применение теория двойственности банаховых пространств. Напомним определение нормирующего подпространства.

Подпространство $M \subset X^*$ называется нормирующим, если оно тотально и замыкание единичного шара пространства X в слабой топологии $\sigma(X, M)$ является ограниченным множеством в норме пространства X.

Терминология объясняется тем, что нормируемость M равносильна тому, что норма

$$\|x\|_1 = \sup_{f \in M,\, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

эквивалентна данной норме.

Легко видеть, что в нашей ситуации, т.е. когда $M = A^*Y^*$, нормируемость равносильна тому, что замыкание единичного шара X по норме $\|x\|^* = \|Ax\|$ является ограниченным множеством в первоначальной норме пространства X.

Применение стандартных результатов теории двойственности позволяет доказать, что в случае рефлексивного пространства X для любого оператора $A: X \to Y$ A^{-1} является регуляризуемым отображением. Иная ситуация наблюдается, если $X = C(0,1)$. Покажем, что существует интегральный оператор с непрерывным ядром, действующий из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$ с нерегуляризуемым обратным отображением. Построенный оператор несколько отличается от нерегуляризуемого оператора из [5].

Лемма 1. *Существует замкнутое подпространство* $M \subset L_2(0,1)$ *такое, что отображение* D^{-1} *не регуляризуемо, где* $D = pi$, $i: C(0,1) \to L_2(0,1)$ *– вложение и* $p: L_2(0,1) \to L_2(0,1)/M$ *– естественное отображение на факторпространство.*

Доказательство. Вначале заметим, что инъективность оператора D будет следовать из того, что в построенном подпространстве M не будет непрерывных функций, кроме нулевой.

Рассмотрим следующие последовательности промежутков:

$$J_k^- = \left[\frac{2^k-1}{2^k}; \frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}}\right),\ J_k^+ = \left[\frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}}; \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\right],\ J_k = J_k^- \cup J_k^+ - \tag{3}$$

и следующие последовательности функций:

$\alpha_k(t) = 0$ при $t \in [0,1] \setminus J_k^+$,

$$\alpha_k\left(\frac{2^{k+3}-5}{2^{k+3}}\right) = k, \tag{4}$$

$\alpha_k(t)$ линейна на промежутках

$$\left[\frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}}; \frac{2^{k+3}-5}{2^{k+3}}\right], \left[\frac{2^{k+3}-5}{2^{k+3}}; \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\right] \tag{5}$$

и непрерывна на $[0,1]$; $\beta_k(t) = 0$ при $t \in [0,1] \setminus J_k^-$, линейна на J_k^-, непрерывна при $t = \dfrac{2^k-1}{2^k}$ и

$$\lim_{t \to \frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}} - 0} \beta_k(t) = \frac{1}{2^{k+2}}; \tag{6}$$

$\gamma_{kn}(t) = 0$ при $t \in [0,1] \setminus J_k^-$,

$$\gamma_{kn}\left(\frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}} - \frac{|J_k^-|}{n^2}\right) = \frac{1}{2^{k+2}} - \frac{|J_k^-|}{n^2}, \tag{7}$$

непрерывна на $[0,1]$ и линейна на промежутках

$$\left[\frac{2^k-1}{2^k}; \frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}} - \frac{|J_k^-|}{n^2}\right], \left[\frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}} - \frac{|J_k^-|}{n^2}; \frac{2^{k+2}-3}{2^{k+2}}\right],\ k,n = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

где $|J_k^-|$ – длина промежутка J_k^-.

Пусть $\delta_k(t) = \alpha_k(t) + \beta_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$. Обозначим через $M \subset L_2(0,1)$ замкнутое подпространство $L_2(0,1)$, натянутое на $\{\delta_k\}$. Покажем, что M удовлетворяет условию леммы. Для этого достаточно показать, что замыкание S' единичного шара S пространства $C(0,1)$ по норме $\|x\|^* = \|Dx\|$ не ограничено в метрике $C(0,1)$, т.е. что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $x \in C(0,1)$ такой, что $\|x\| \geq k$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует

$$y \in C(0,1)\ \|y\| \leq 1,\ \|x-y\|^* \leq \frac{1}{n}. \tag{9}$$

Ясно, что при $x(t) = \alpha_k(t)$ и $y(t) = -\gamma_{kn}(t)$ из (3–8) следует (9). Лемма доказана.

Пусть $C_0(a,b)$ – множество непрерывных функций на (a,b) с компактным носителем. Хорошо известно, что в любой замкнутой гиперплоскости из $L_2(a,b)$ функции из $C_0(a,b)$ образуют плотное множество.

Лемма 2. *Пусть M – подпространство $L_2(0,1)$, построенное в доказательстве леммы 1. Тогда в ортогональном дополнении N к M существует полная ортонормальная система $\{\psi_n(t)\}$ такая, что $\{\psi_n(t)\} \in C_0(0,1)$, $n = 1,2,\ldots$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\overline{N \cap C_0(0,1)} = N$. Действительно, тогда можно выбрать линейно независимую систему функций в N из класса $C(0,1)$, линейные комбинации которых плотны в N. Затем, ортогонализируя эту систему, получаем $\{\psi_n(t)\}$.

Пусть $f \in N$ и $\varepsilon > 0$. Существует номер n такой, что

$$\int\limits_{\frac{(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}}}^{1} f^2(t)\,dt \le \frac{\varepsilon^2}{4}, \tag{10}$$

Пусть $f_k(t) \in C_0(J_k)$ такова, что

$$\int\limits_{J_k} f_k(t)\delta_k(t)\,dt = 0,\ \left\| f_k - f\big|_{J_k} \right\| \le \frac{\varepsilon}{2(n+1)},\ k = 1,2,\dots,n, \tag{11}$$

где через $f\big|_{J_k}$ обозначено сужение f на J_k. Далее пусть $f_0 \in C_0\left(0,\frac{1}{2}\right)$ такова, что

$$\left\| f_0 - f\big|_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} \right\| \le \frac{\varepsilon}{2(n+1)}. \tag{12}$$

Теперь построим функцию

$$g(t) = \begin{cases} f_k(t) & \text{при} \quad t \in J_k,\ k = 1,2,\dots,n, \\ f_0(t) & \text{при} \quad t \in \left[0,\frac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{при} \quad t \in \left[\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}};1\right]. \end{cases} \tag{13}$$

Тогда ясно, что $g \in C_0(0,1)$, $g \in N$ и из (10–13) следует $\|g - f\| \le \varepsilon$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Существует инъективный интегральный оператор Q из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$ с непрерывным ядром и такой, что Q^{-1} не регуляризуемо.*

Доказательство. Пусть $\{\psi_n(t)\}$ – ортонормальная система из леммы 2 и $\{\varphi_n(x)\}$ – произвольная ортонормальная система в $L_2(0,1)$, состоящая из непрерывных функций. Рассмотрим функцию двух переменных:

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)\psi_n(t), \tag{14}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\sup\limits_{0\le x\le 1}|\varphi_n(x)| \cdot \sup\limits_{0\le t\le 1}|\psi_n(t)| \cdot n^2}.$$

Тогда ясно, что $K(x,t)$ – непрерывная функция на квадрате $[0,1]\times[0,1]$.

Через Q обозначим интегральный оператор:

$$Q: f(x) \mapsto \int\limits_0^1 K(x,t) f(t)\,dt,$$

действующий из $C(0,1)$ в $L_2(0,1)$, и через Q' – оператор

$$Q': f(x) \mapsto \int\limits_0^1 K(x,t) f(t)\,dt,$$

действующий из $L_2(0,1)$ в $L_2(0,1)$.

Покажем, что $\ker Q' = M$. Действительно, если

$$\int\limits_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)\psi_n(t) f(t) \right) dt = 0,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \varphi_n(x) = 0\,, \qquad (15)$$

где b_n – n-й коэффициент Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\psi_n(t)\}$, так как по теореме Лебега ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)\psi_n(t) f(t)$ можно почленно интегрировать. Теперь из (15) следует $b_n = 0$, $n = 1,2,\dots$, т е $f(t) \in M$ Обратное также ясно: если $f(t) \in M$, то $Q' f = 0$.

Соотношение $\ker Q' = M$ влечет возможность представления оператора Q' в виде произведение операторов: $Q' = up$, где $p: L_2(0,1) \to L_2(0,1)/M$ и $u: L_2(0,1)/M \to L_2(0,1)$. Но отсюда следует, что

$$Q = Q'i = upi = uD\,.$$

Следовательно, отображение Q^{-1} не регуляризуемо, так как не регуляризуемо D^{-1}. Теорема доказана

§ 2. Об одном условии регуляризуемости

Из предыдущего параграфа следует, что даже для классического случая интегральных операторов с непрерывными ядрами существуют нерегуляризуемые уравнения. Здесь рассмотрим одно достаточное условие регуляризуемости.

Хорошо известно (см. [4]), что если E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, E_1 сепарабельно и E_2 рефлексивно, $A: E_1 \to E_2$ и $B: E_2 \to E_3$ – линейные уплотнения (непрерывные и инъективные отображения) и A^{-1} регуляризуемо, то отображение $(BA)^{-1}$ регуляризуемо. Отсюда следует, что если продолжение по непрерывности $\widetilde{A}$ инъективного оператора $A: C(0,1) \to L_2(0,1)$ на $L_2(0,1)$ тоже инъективно, то A^{-1} регуляризуемо. Действительно, для доказательства надо в предыдущем утверждении положить $E_1 = C(0,1)$, $E_2 = E_3 = L_2(0,1)$, $B = \widetilde{A}$. Таким образом, видно, что регуляризуемость A^{-1} связана со свойствами продолженного оператора $\widetilde{A}$, точнее, с его ядром Эта связь подробно рассмотрена в [6]. Основной целью данной статьи является усиление сформулированного выше результата. Оказывается, для регуляризуемости достаточна инъективность продолженного оператора $\widetilde{A}$ не на всем $L_2(0,1)$, а на более узких подпространствах.

Лемма 3. *Пусть (c_n) – последовательность положительных чисел и $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$. Тогда найдется последовательность положительных чисел (δ_n) такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_n$ расходится*

Доказательство. Рассмотрим любой сходящийся ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Далее выберем последовательность номеров (n_k) так, чтобы для всех k выполнялось неравенство

$$c_{n_k} \ge k^2\,. \qquad (16)$$

Теперь определим последовательность (δ_n) следующим образом:

$$\delta_n = \begin{cases} \alpha_n, & \text{если } n \ne n_k, \\ \dfrac{1}{c_{n_k}}, & \text{если } n = n_k. \end{cases}$$

Тогда из (16) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n\delta_n$ расходится. Лемма доказана.

Две меры на отрезке $[0,1]$ назовем эквивалентными, если каждая из них абсолютно непрерывна относительно другой. Через μ обозначим стандартную меру Лебега на $[0,1]$.

Лемма 4. *Для любой функции $f(x)\notin L_\infty(0,1)$ (т.е. не являющейся существенно ограниченной) существует мера ν на отрезке $[0,1]$, эквивалентная мере μ, и такая, что $f(x)\notin L_1(\nu)$.*

Доказательство. Ввиду того, что $f(x)$ не является существенно ограниченной, существует возрастающая последовательность положительных чисел (c_n) такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ и

$$\mu(c_n<|f|\le c_{n+1})=\omega_n\neq 0. \tag{17}$$

Обозначим через A_n множество $\{x:c_n<|f|\le c_{n+1}\}$ и $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. Заметим, что $A_i\bigcap A_j=\varnothing$, если $i\neq j$.

В силу леммы 3 существует последовательность положительных чисел (δ_n) такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n<\infty\text{, а }\sum_{n=1}^{\infty}c_n\delta_n=\infty. \tag{18}$$

Теперь определим меру ν. Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\notin A,\\ \dfrac{\delta_n}{\omega_n}, & \text{если } x\in A_n.\end{cases}$$

Из (17) и (18) следует, что $\varphi_1(x)\in L_1(\mu)$.

Теперь для произвольного измеримого множества $B\subset[0,1]$ положим

$$\nu(B)=\int_B\varphi_1(x)\,d\mu. \tag{19}$$

Тогда из (19) сразу следует, что мера ν абсолютно непрерывна относительно μ, а из (18), – что $f(x)\notin L_1(\nu)$. Осталось показать, что мера μ абсолютно непрерывна относительно ν. Но это следует из того, что для функции

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\notin A,\\ \dfrac{\omega_n}{\delta_n}, & \text{если } x\in A_n,\end{cases}$$

$$\mu(B)=\int_B\varphi_2(x)\,d\nu.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Для любой функции $f(x)\notin L_\infty(0,1)$ существует мера ν на $[0,1]$, эквивалентная мере μ, и такая, что $f(x)\notin L_2(\nu)$.*

Теорема 2. *Пусть линейное уплотнение $Q:C(0,1)\to L_2(0,1)$ таково, что оно непрерывно по L_2-норме и продолжение оператора Q по непрерывности на $L_\infty(0,1)$ инъективно. Тогда отображение Q^{-1} регуляризуемо.*

Доказательство. В начале данного параграфа говорилось, что если оператор факторизуется через рефлексивное пространство, то он регуляризуем. Можно показать, что здесь банаховость рефлексивного пространства не существенна. Из факторизации через рефлексивное локально выпуклое пространство также следует регуляризуемость. Только здесь вместо регуляризуемости первого оператора надо говорить о B-измеримости первого класса этого отображения. В.А. Винокуров доказал, что в случае метрических пространств регуляризуемость отображения эквивалентна его B-измеримости первого класса.

Обозначим через E_2 проективный предел пространств $L_2(\beta)$, где β пробегает все меры, эквивалентные мере Лебега μ, относительно вложений $g_{\alpha\beta} : L_2(\beta) \to L_2(\alpha)$. Вложения $g_{\alpha\beta}$ корректно определены, так как все рассматриваемые меры абсолютно непрерывны относительно друг друга. Напомним, что элемент $L_2(\nu)$ – это класс функций, но здесь классы совпадают, так как множества меры нуль по разным мерам совпадают.

Для доказательства существования $E_2 = \underleftarrow{\lim}\, g_{\alpha\beta} L_2(\beta)$ надо убедиться в непрерывности вложений $g_{\alpha\beta}$. Но она легко следует из неравенства

$$\varphi_\alpha(x) \le c\varphi_\beta(x). \tag{20}$$

где $\varphi_\alpha(x)$ и $\varphi_\beta(x)$ – плотности мер α и β соответственно, выполняющегося почти всюду.

Покажем справедливость неравенства (20). Пусть, напротив, оно неверно. Тогда существует возрастающая последовательность чисел (c_n) такая, что $c_n \to \infty$, а неравенство

$$\varphi_\alpha(x) > c_n \varphi_\beta(x) \tag{21}$$

выполняется на множестве A_n положительной меры. Обозначим через $E_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Ясно, что можно так выбрать (c_n), чтобы $\mu(E_n) = \omega_n > 0$. В силу леммы 3 существует последовательность положительных чисел (δ_n) такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty, \text{ а } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_n = \infty. \tag{22}$$

Теперь рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\int\limits_{E_n} \varphi_\beta(x)\,dx}} \sqrt{\delta_n}, & \text{если } x \in E_n, \\ 0, & \text{если } x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n. \end{cases}$$

Из (21) и (22) следует, что $f(x) \in L_2(\beta)$, но $f(x) \notin L_2(\alpha)$, а это противоречит вложению $L_2(\beta) \subset L_2(\alpha)$. Тем самым неравенство (20) доказано.

Представим оператор Q в виде произведения $Q = \tilde{Q} i$, где $i : C(0,1) \to E_2$ – вложение и $\tilde{Q} : E_2 \to L_2(0,1)$ – продолжение Q по непрерывности. Пространство E_2 является рефлексивным как проективный предел рефлексивных. Кроме того, из следствия леммы 4 следует совпадение множеств $E_2 = L_\infty(0,1)$. Итак, мы профакторизовали Q через рефлексивное пространство. Следовательно, Q^{-1} регуляризуемо. Теорема доказана.

Следствие. *Если интегральный оператор Q: $C(0,1) \to L_2(0,1)$ с непрерывным ядром инъективен и его продолжение по непрерывности на $L_\infty(0,1)$ тоже инъективно, то Q^{-1} регуляризуемо.*

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-Урал № 01-01-96426.

Литература

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл АН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 501–504.

2. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл АН СССР. – 1963. – Т. 153. – № 1. – С. 49–52.

3. Винокуров В.А. О понятии регуляризуемости разрывных отображений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1971. – Т. 11. – № 5. – С. 1097–2013.

4. Петунин Ю.И., Пличко А.Н. Теория характеристик подпространств и ее приложения. – Киев. Вища шк., 1980. – 216 с.

5. Менихес Л.Д. О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам // Докл. АН СССР. – 1978. – Т 241. – № 2. – С. 282–285.

6. Менихес Л.Д. О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам // Матем. заметки. – 1999. – Т 65. – № 2. – С. 222–229.

Поступила в редакцию 10 апреля 2003 года