УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ 2-ГРУППЫ С ОТНОСИТЕЛЬНО БОЛЬШИМИ ЦЕНТРАЛИЗАТОРАМИ НЕИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУПП

Н.Н. Аминева

Исследуются конечные 2-группы, в которых для любой неинвариантной подгруппы H выполняется неравенство $|N(H):H\cdot C(H)|\leq 2$.

В предлагаемой статье завершается начатое в работе [1] исследование конечных 2-групп, удовлетворяющих условию:

(*) для любой неинвариантной подгруппы H выполняется неравенство

$$|N(H):H\cdot C(H)| \leq 2.$$

В работе [1] было получено описание строения такой группы G в случаях, когда G двуступенно нильпотентна или имеет циклический коммутант. Группа с коммутантом порядка 4, очевидно, удовлетворяет условию (*). Целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть G – конечная 2-группа, удовлетворяющая условию (*). Если ступень нильпотентности группы G больше двух, то ее коммутант либо является циклической группой, либо имеет порядок 4.

Отметим, что условие (*) переносится на подгруппы и фактор-группы. В дальнейшем всюду G – конечная 2-группа ступени нильпотентности больше двух, удовлетворяющая условию (*).

Лемма 1. Если среди неинвариантных максимальных абелевых подгрупп группы G есть четверная группа, то G является диэдральной или полудиэдральной группой.

Доказательство. В силу предложения 1.16 из [2] G является группой максимального класса, и остается заметить, что 2-группы максимального класса исчерпываются диэдральными, полудиэдральными и кватернионными группами (теорема 1.17 из [2]).

Лемма 2. Если группа G обладает абелевой максимальной подгруппой A, то $G/Z(G)$ – диэдральная группа

Доказательство. Пусть $A = A\langle x\rangle$, $x^2\in A$. Тогда $C(x) = \langle x\rangle Z(G)$ – максимальная абелева подгруппа группы G. Так как ступень нильпотентности группы G больше двух, то $C(x)$ не инвариантна в G. В силу условия (*) $N(C(x))/Z(G)$ – четверная максимальная абелева подгруппа группы $G/Z(G)$. Из леммы 1 следует, что $G/Z(G)$ диэдральная или полудиэдральная группа. Но фактор-группа по центру не может быть полудиэдральной группой.

Доказательство теоремы. Если все максимальные абелевы подгруппы группы G инвариантны в G, то для любых $x,y\in G$ выполняется равенство $[x,y,y]=1$, и в силу теоремы Леви (теорема III.6.5 из [5]) G нильпотентна ступени не выше двух. Поэтому группа G обладает неинвариантной максимальной абелевой подгруппой A. Так как $|N(A):A| = 2$, то по [3,4] множество всех подгрупп группы G, содержащих A, образуют цепь

$$A=N_0<N_1\ldots<N_{n-1}=M<N_n=G,$$

где $N_{i+1} = N_G(N_i)$, $|N_{i+1}:N_i| = 2$, M нильпотентна ступени n, ступень G больше n, при $i<n$ $N_i = R_i\langle a\rangle$, где $R_i = Z(N_1)\,N'_{i+1}$, $a^2\in R_i$, $C(a)=A$, R_i характеристична в N_{i+1} и $R = R_{n-1}$ не зависит от выбора подгруппы A. В частности, последнее означает, что все неинвариантные максимальные абелевы подгруппы группы G имеют одинаковый порядок.

Покажем, что если $Z(N_1) = Z(M)$, что равносильно тому, что $Z(N_1) \lhd G$ (предложение 1 из [3]), то либо G' является циклической группой, либо $n = 2$ и G' – четверная группа.

В самом деле, в силу леммы 2, $G/Z(M) = \langle \bar{x} \rangle \lambda \langle \bar{a} \rangle$ – диэдральная или полудиэдральная группа. Если $Z(M) = Z(G)$, то, очевидно, G' – циклическая группа. Пусть $Z(M) > Z(G)$. Так как $|C(ax)| = |A|$, $C(ax) \cap A = Z(G)$ и

$$C(ax)Z(M)/Z(M) \le \left\langle \bar{x}^{|\bar{x}|/2} \right\rangle \times \left\langle \overline{ax} \right\rangle,$$

то

$$C(ax)Z(G)/Z(G) = \left\langle \tilde{x}^{|\bar{x}|/2}\tilde{t} \right\rangle \times \langle \widetilde{ax} \rangle$$

для некоторого $t \in Z(M)$. Поэтому

$$G/Z(G) = (\langle \tilde{x} \rangle \times \langle \tilde{t} \rangle)\langle \tilde{a} \rangle \quad \text{и} \quad [a, x^{|\bar{x}|/2}] = [x, t].$$

Пусть $b = [a, x] = x^{2l}r$ для некоторого $r \in Z(M)$. Если $r \in C(x)$, то $[a, x^k] = b^k$ и из $[x, t] = b^{|\bar{x}|/2}$ следует , что $G' = \langle b \rangle$ – циклическая группа. Если же $r \notin C(x)$, то $r \equiv t(Z(G))$. Тогда

$$[a, x^2] = b \cdot b^x = b^2[t, x] \quad \text{и} \quad [a, x^4] = b^4[t, x]^2 = b^4.$$

Отсюда следует, что если $2^{n-1} = |\bar{x}|/2 > 2$, т.е. $n > 2$, то $[t, x] = b^{|\bar{x}|/2}$ и $b^x = b[t, x] \in \langle b \rangle$, т.е. и в этом случае $G' = \langle b \rangle$ – циклическая группа.

Предположим теперь, что $n = 2$ и G' не циклическая группа. Тогда, как показано выше, $G/Z(G) = (\langle \tilde{x} \rangle \times \langle \tilde{t} \rangle)\langle \tilde{a} \rangle, [a, x^2] = [t, x]$ и $G' = \langle [a, x] \rangle \times \langle [t, x] \rangle$ – четверная группа. Несложно показать, что в этом случае можно считать $[a, x] = x^2 t$ и $a^2 = tz$ для некоторого $z \in Z(G)$.

Теперь индукцией по числу n покажем, что если $n > 2$, то G' является циклической группой. Пусть $n = 3$. Тогда $G/R_1 = \langle \tilde{x} \rangle \lambda \langle \tilde{a} \rangle$ и $M/Z(N_1) = \langle \bar{y} \rangle \lambda \langle \bar{a} \rangle$ являются группами диэдра порядка 8. Так как $M/R_1 = \langle \tilde{x}^2 \rangle \lambda \langle \tilde{a} \rangle$, то $y = x^2 r$ для некоторого $r \in R_1$.

Предположим, что M' не циклическая группа. Тогда $M' = \langle [y, a] \rangle \times \langle [y, t] \rangle$ и $[y, a] = y^2 t$. Так как $M' \lhd G$, то $|G/C(M')| = 2$. Если $x \notin C(M')$, то $ax \in C(M')$ и из $ay \in C(M')$ следует, что $y^{-1}x \in C(M')$. Заметим, что $y^{-1}x = r^{-1}x^{-1}x^2 = r^{-1}x = xr_1$ для некоторого $r_1 \in R_1$. Поэтому $xR_1 = y^{-1}xR_1$. Кроме того, $(y^{-1}x)^2 = xr_1 xr_1 = x^2 r_1^2 [r_1, x] = x^2 r_2$, где $r_2 \in R_1$. Заменяя, если это необходимо, x на $y^{-1}x$, мы можем считать, что $x \in C(M')$. Так как $y = x^2 r$ и $r \in R_1 = \langle y^2 \rangle Z(M)$, то $y = x^2 y^{2l} z$, $z \in Z(M)$. Но тогда $y \in C(M')$, что невозможно.

Таким образом, M' является циклической группой. Пусть z – инволюция из M', $\overline{G} = G / \langle z \rangle$. Если $\overline{G'}$ – циклическая группа, то и G' тоже циклический. Если же $\overline{G'}$ не циклический, то $G' = \langle u \rangle \times \langle v \rangle$, $u^2 = v^4 = 1$ и $\langle v \rangle = M'$. Но тогда

$$v = [y, a] = [x^2, a] = [x, a]^x [x, a] = u^x u \in \langle u \rangle \times \langle v^2 \rangle,$$

что невозможно.

Предположим, теперь, что $n > 3$. В силу предположения индукции M' является циклической группой, и если z – инволюция из M', то $G'/\langle z \rangle = (G/\langle z \rangle)'$ тоже циклический. Но тогда и G' не может быть не циклическим.

Литература

1. Аминева Н.Н., Антонов В.А. О конечных 2-группах с относительно большими централизаторами неинвариантных подгрупп // Междун. конф. «Алгебра и ее приложения»: Тезисы докладов. – Красноярск, 2002. – С. 5.

2. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. – М.: Мир, 1985.

3. Hethelyi L. Soft subgroups of p-groups // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. – 1984. – V.27. – P.81–85.

4. Hethelyi L. On subgroups of p-groups having soft subgroups // J.London. Math.Soc. – 1990. – V.41. – №3. – P. 425–437.

5. Huppert B. Endliche Gruppen, 1. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. – 1967.

Поступила в редакцию 17 апреля 2003 года