

КЛАССОВЫЕ КОЛЬЦА ХАРАКТЕРОВ ГРУПП ЯНКО

Е.Ш. Сабирзянова

В работе описаны группы центральных единиц целочисленных групповых колец спорадических групп Янко. Все исходные данные берутся из таблиц характеров, содержащихся в системе GAP.

В работе [1] было введено понятие классовой кольца характера группы и была показана важность изучения таких колец для нахождения центральных единиц целочисленных групповых колец. Спорадические группы занимают особое положение в конечных группах [3] и поэтому важно и интересно изучение классовых колец характеров таких групп. Будем использовать подходы и основные обозначения из [1], а информацию о характерах и их нумерацию возьмем из [2].

Для начала рассмотрим наиболее простой случай – группу J_2 .

Теорема А1. *Классовым кольцом неприводимого характера для группы J_2 является одно из следующих колец: Z ; $Z+2^4 3^3 \omega Z$; $Z+2^5 3 \omega Z$; $Z+2^4 3^2 \omega Z$; $Z+2^5 \omega Z$; $Z+3^2 \omega Z$, где $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Доказательство. Поскольку множества значений алгебраически сопряженных характеров совпадают, то ограничимся $\chi_j \in \text{Irr}(J_2, \text{alc})$. Каждому характеру χ_j сопоставим строку чисел

$\left\{ \frac{\chi_j(x_i) \cdot |x_i^G|}{\deg \chi_j}, x_i \in X(J_2) \right\}$, каждое из которых является целым алгебраическим и где $X(J_2)$ –

система представителей классов сопряженности группы. Согласно замечанию 2 из [1] данные элементы порождают классовой кольцо характера χ_j .

$\chi_2 \rightarrow (2^4 3^2 A; 2^4 3^2 A^*; 2^5 3^3 E; 2^5 3^3 E^*; 2^4 3^3 5G; 2^4 3^3 5G^*; -2^5 3^3 5G; -2^5 3^3 5G^*) = 2^4 3^3 (-\omega + 1; \omega; 2\omega + 2;$

$-2\omega + 4; 5\omega - 5; -5\omega; -10\omega + 10; 10\omega)$, то есть данному характеру соответствует кольцо $Z+2^4 3^3 \omega Z$.

$\chi_4 \rightarrow (2^5 3B; 2^5 3B^*; 2^6 3^2 F; 2^6 3^2 F^*; 2^5 3^2 5G; 2^5 3^2 5G^*; -2^7 3 \cdot 5G; -2^7 3 \cdot 5G^*) = 2^5 3 (\omega + 3; -\omega + 4; -12\omega + 12;$

$12\omega; 15\omega - 15; -15\omega; 20\omega; -20\omega + 20)$, и получаем кольцо $Z+2^5 3 \omega Z$.

$\chi_8 \rightarrow (2^4 3^2 C/5; 2^4 3^2 C^*/5; -2^4 3^3 G; -2^4 3^3 G^*; 2^6 3^2 G; 2^6 3^2 G^*) = 2^4 3^2 (-\omega + 1; \omega; -3\omega + 3; 3\omega; 4\omega - 4; -4\omega)$,

и поэтому данному характеру соответствует кольцо $Z+2^4 3^2 \omega Z$.

$\chi_{14} \rightarrow (2^5 A/3; 2^5 A^*/3; 2^6 E; 2^6 E^*; 2^5 5G; 2^5 5G^*; 2^6 5G; 2^6 5G^*) = 2^5 (-\omega + 1; \omega; 2\omega + 2; -2\omega + 4; 5\omega - 5;$

$-5\omega; 10\omega - 10; -10\omega)$, то есть получили кольцо $Z+2^5 \omega Z$.

$\chi_{16} \rightarrow (3^2 D; 3^2 D^*; -2 \cdot 3^3 F; -2 \cdot 3^3 F^*; -2^2 3^2 5G; -2^2 3^2 5G) = 3^2 (4\omega - 3; -4\omega + 1; 12\omega - 12; -12\omega; 20\omega;$

$-20\omega + 20)$, и получаем кольцо $Z+3^2 \omega Z$. Для остальных характеров в силу сопряженности классовое кольцо будет совпадать с одним из вышеперечисленных либо это просто Z . Что и требовалось доказать.

Теорема В1. *Для классовой кольца K характера обозначим через $U(K)$ его группу единиц. Тогда для группы J_2 имеем:*

$U(Z+2^5 3 \omega Z) = \langle -1 \rangle \times \langle \omega^{24} \rangle;$

$U(Z+2^4 3^2 \omega Z) = \langle -1 \rangle \times \langle \omega^{12} \rangle;$

$U(Z+2^5 \omega Z) = \langle -1 \rangle \times \langle \omega^{24} \rangle;$

$U(Z+2^4 3^3 \omega Z) = \langle -1 \rangle \times \langle \omega^{36} \rangle;$

$U(Z+3^2 \omega Z) = \langle -1 \rangle \times \langle \omega^{12} \rangle.$

Доказательство. Известно, что $\omega^k = f_{k-1} + f_k \omega$. Если $\omega^t = a + 2^5 b \omega$ и $\omega^p = c + 3d \omega$, то

$\omega^k = m + 2^5 n \omega$, где $k = \text{НОК}(t, p)$. Поэтому для доказательства первого утверждения ищем

числа Фибоначчи, сравнимые с нулем по модулю 2^5 и 3 . Непосредственное вычисление дает сле-

дующее: $f_{24} \equiv 0 \pmod{2^5}$ и $f_4 \equiv 0 \pmod{3}$. Значит $k = \text{НОК}(24, 4) = 24$.

Другие утверждения получаются аналогично. Что и требовалось доказать.

Теорема А2. Классовым кольцом неприводимого характера для группы J_1 является одно из следующих колец: Z ; $Z+11 \cdot 19 \omega Z$; $Z+2^2 19 \omega Z$; $Z+2^2 11 \omega Z$; $Z+7 \cdot 11 \cdot C \cdot Z+7 \cdot 11 \cdot E \cdot Z$, где $C = \varepsilon(19) + \varepsilon(19)^7 + \varepsilon(19)^8 + \varepsilon(19)^{11} + \varepsilon(19)^{12} + \varepsilon(19)^{18}$, $E = \varepsilon(19)^2 + \varepsilon(19)^3 + \varepsilon(19)^5 + \varepsilon(19)^{14} + \varepsilon(19)^{16} + \varepsilon(19)^{17}$.

Доказывается аналогично теореме А1.

Теорема В2. Для группы J_1 выполняется:

$$U(Z+11 \cdot 19 \omega Z) = \langle -1 \rangle \times \langle \omega^{90} \rangle;$$

$$U(Z+2^2 19 \omega Z) = \langle -1 \rangle \times \langle \omega^{18} \rangle;$$

$$U(Z+2^2 11 \omega Z) = \langle -1 \rangle \times \langle \omega^{30} \rangle;$$

$$U(Z+7 \cdot 11 \cdot C \cdot Z+7 \cdot 11 \cdot E \cdot Z) = \langle -1 \rangle \times \langle (2+C)^{30} \rangle \times \langle (2+E)^{30} \rangle.$$

Доказательство. Первые три утверждения доказываются аналогично теореме В1, а последнее получается анализом степеней чисел $2+C$ и $2+E$, которые являются фундаментальными единицами соответствующего поля характера.

И, наконец, разберем случай группы J_3 .

Теорема А3. Классовым кольцом характеров для группы J_3 является одно из следующих колец: Z ; $Z+2^6 3^4 \omega Z$; $Z+2^5 3^3 \omega Z$; $Z+2^6 19 \sqrt{17} Z$; $Z+\sqrt{-19} \cdot 2^6 3^5 Z$; $Z+3 \cdot 17 \cdot 19 C \cdot Z+3 \cdot 17 \cdot 19 D \cdot Z$, где $C = -\varepsilon(9)^2 + \varepsilon(9)^4 + \varepsilon(9)^5 - \varepsilon(9)^7$, $D = 2\varepsilon(9)^2 + \varepsilon(9)^4 + \varepsilon(9)^5 + 2\varepsilon(9)^7$.

Доказывается аналогично теореме А1.

Теорема В3. Для группы J_3 выполняется:

$$U(Z+2^6 3^4 \omega Z) = \langle -1 \rangle \times \langle \omega^{432} \rangle;$$

$$U(Z+2^5 3^3 \omega Z) = \langle -1 \rangle \times \langle \omega^{72} \rangle;$$

$$U(Z+\sqrt{-19} \cdot 2^6 3^5 Z) = \langle -1 \rangle;$$

$$U(Z+2^6 19 \cdot \sqrt{17} Z) = \langle -1 \rangle \times \langle (33+8\sqrt{17})^{72} \rangle;$$

$$U(Z+3 \cdot 17 \cdot 19 C \cdot Z+3 \cdot 17 \cdot 19 D \cdot Z) = \langle -1 \rangle \times \langle (2-C-D)^{24} \rangle \times \langle (-1-C-2D)^{24} \rangle.$$

Доказательство. Первые два утверждения доказываются аналогично теореме В1, в третьем утверждении тривиальность имеет место, так как кольцо получено присоединением $\sqrt{-d}$, где d – натуральное число, а последние утверждения получаются путем анализа степеней фундаментальных единиц аналогично теореме В2.

Литература

1. Алеев, Р. Ж. Центральные элементы целочисленных групповых колец. // *Алгебра и логика*. – Т. 39. – № 5. – С. 513–525.
2. Schönert, Martin et al. GAP – Groups, Algorithms, and Programming/ M. Schönert; Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule. – 6-th ed.– Aachen, Germany, 1997.
3. Горенштейн Д. Конечные простые группы: Введение в их классификацию/ Д. Горенштейн; Под ред. А.И. Кострикина. – М.: Мир, 1985.

Поступила в редакцию 2 апреля 2003 года