Математика

УДК 539.374, 539.3, 539.4

ПЛАСТИЧЕСКАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ И УСЛОВИЯ РАЗРУШЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ ТОРОВОЙ ОБОЛОЧКИ

В.Л. Дильман

На основании гипотезы о постоянстве радиуса круговой оси тонкостенной торовой оболочки получены новые формулы для вычисления напряжений в стенке оболочки, деформируемой под действием внутреннего давления. На этой основе получены аналитические выражения для вычисления критических значений напряжений, деформаций и внутреннего давления, при которых оболочка теряет несущую способность.

Хорошо известно, что в торообразной тонкостенной оболочке в зоне упругих деформаций безмоментное напряженное состояние может возникнуть лишь под действием «экзотической» нагрузки [1, с 332]; равномерное внутреннее давление такой нагрузкой не является. Нетрудно показать, что равномерное внутреннее давление не приводит к безмоментному напряженному состоянию оболочки из упрочняемого материала и при ее пластическом деформировании. Тем не менее, при исследовании несущей способности и условий разрушения криволинейных участков трубопроводов, изогнутых труб, отводов и тонкостенных торовых оболочек, работающих под внутренним давлением, в целях упрощения теоретических построений нередко используются формулы Фёпля [1] безмоментной теории:

$$\begin{cases} \sigma_\varphi = \dfrac{pr}{2t}\cdot\dfrac{2R+r\sin\alpha}{R+r\sin\alpha}, \\ \sigma_\Theta = \dfrac{pr}{2t}. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь σ_φ и σ_Θ – меридиональные (кольцевые, тангенциальные) и широтные (продольные, осевые) напряжения соответственно; p – внутреннее давление; r – внутренний радиус меридионального сечения оболочки; R – радиус круговой оси внутренней торовой поверхности; α – угол между радиус-вектором точки этой поверхности в меридиональном сечении и осью вращения тора.

Другой упрощающий подход может быть основан на экспериментально обоснованных гипотезах относительно поведения геометрических параметров оболочки в процессе нагружения. В работе [2] утверждается, что экспериментально проверены гипотезы о поведении тонкостенной торовой оболочки при ее пластическом деформировании под действием внутреннего давления:

1) сечение меридиональной плоскостью остается круглым;

2) радиус круговой оси тора R постоянен.

Эти гипотезы значительно облегчают теоретические расчеты и позволяют найти напряжение в любой точке стенки оболочки в момент потери ее несущей способности, соответствующее критическое давление и рассчитать толщину стенки равнопрочной оболочки [3, 4]. В то же время эти гипотезы противоречат безмоментному характеру нагружения, и при их выполнении формулы (1) неверны. Точнее говоря, гипотеза 1 в инженерных расчетах может быть принята и на основе безмоментной теории: можно показать, что параметр овализации (отношение полуосей меридионального сечения) в процессе пластического деформирования при напряжениях, подчиняющихся закону (1), мало отклоняется от единицы. Однако гипотеза 2 приводит к формулам для вычисления напряжений, отличающимся от уравнений Фёпля (1):

$$\begin{cases} \sigma_\Theta = \dfrac{pr}{2t} \cdot \dfrac{(R+3r\sin\alpha)(R+r\sin\alpha)}{R^2+3Rr\sin\alpha+3r^2\sin^2\alpha}, \\ \sigma_\varphi = \sigma_\Theta \dfrac{2R+3r\sin\alpha}{R+3r\sin\alpha}. \end{cases} \tag{2}$$

Напряжения, вычисленные по формулам (1) и (2), мало отличаются при значениях параметра гнутья $\gamma = r/R = 0{,}1 - 0{,}2$ и меньше, но заметно отличаются для крутоизогнутых оболочек.

Целью работы является вывод формул (2) и определение на их основе критических деформаций и напряжений в стенке оболочки, а также внутреннего давления, соответствующих моменту потери оболочкой стабильности пластического деформирования. Пластическая стабильность может рассматриваться как критерий несущей способности [3]. Она определяется на основе принципа Свифта–Марциньяка [5], который в случае нагружения оболочки только внутренним давлением равносилен критерию максимума внутреннего давления: оболочка теряет стабильность своего пластического деформирования в момент достижения внутренним давлением своего наибольшего значения. В работе предполагается, что напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки в зоне развитых пластических деформаций подчиняется теории течения, согласно которой

$$\frac{\sigma_\varphi - \sigma}{d\varepsilon_\varphi} = \frac{\sigma_\Theta - \sigma}{d\varepsilon_\Theta} = \frac{\sigma_r - \sigma}{d\varepsilon_r}, \tag{3}$$

где σ_r – радиальные напряжения в стенке оболочки, $\sigma = 1/3(\sigma_\varphi - \sigma_\Theta - \sigma_r)$; ε_φ, ε_Θ и ε_r – истинные деформации в меридиональном, широтном и радиальном направлениях. Кроме того, в процессе пластического деформирования оболочки предполагается выполнение условия постоянства объема

$$\varepsilon_\varphi + \varepsilon_\Theta + \varepsilon_r = 0 \tag{4}$$

и условия тонкостенности

$$\sigma_r = 0. \tag{5}$$

Обозначим $m = \sigma_\Theta / \sigma_\varphi$ – коэффициент двухосности нагружения стенки оболочки. Тогда из (3)–(5) следует, что

$$\frac{d\varepsilon_\Theta}{d\varepsilon_\varphi} = \frac{2m-1}{2-m}. \tag{6}$$

Рассмотрим сечение тора плоскостью, содержащей ось тора. В этой плоскости введем систему координат $(\rho,\ \alpha)$, где ρ – расстояние от оси тора до точки, α – угловая координата точки; при этом

$$\rho = R + r\sin\alpha. \tag{7}$$

Из гипотезы 2 о постоянстве R в процессе деформирования следуют формулы для вычисления элементарных приращений истинных деформаций $d\varepsilon_\varphi$ и $d\varepsilon_\Theta$:

$$d\varepsilon_\varphi = \frac{dr}{r};\quad d\varepsilon_\Theta = \frac{dr}{r}\left(1 - \frac{R}{\rho}\right)$$

откуда

$$\frac{d\varepsilon_\Theta}{d\varepsilon_\varphi} = 1 - \frac{R}{\rho}.$$

Из этого равенства, формул (6) и (7) получаем

$$m = \frac{3\rho - 2R}{3\rho - R} = \frac{R+3r\sin\alpha}{2R+3r\sin\alpha}. \tag{8}$$

В частности, на стенках, где одна из двух главных кривизн нулевая ($\alpha = 0$), $m = 0{,}5$; на выпуклой стенке $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ и вогнутой стенке $\left(\alpha = -\frac{\pi}{2}\right)$ соответственно

$$m = \frac{R+3r}{2R+3r} \text{ и } m = \frac{R-3r}{2R-3r}.$$

Если $R \gg r$, т.е. радиус круговой оси тора велик по сравнению с радиусом трубы (кривизна изогнутого участка трубопровода мала), то $m \approx 0,5$ во всех точках – хорошо известный факт для цилиндрической оболочки, находящейся под внутренним давлением. Для применяемых в промышленности отводов с диапазоном значений параметра $\gamma = r/R$ порядка $0,3...0,5$ на вогнутой стенке $m \approx 0$, причем, при $\gamma > 0,33$ $m < 0$, т.е. в широтном направлении на вогнутой стенке могут возникнуть отрицательные нормальные (сжимающие) напряжения. На выпуклой стенке $m > 0,5$.

В принятых предположениях напряжения σ_φ и σ_Θ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_\varphi}{r} + \dfrac{\sigma_\Theta}{r + R/\sin\alpha} = \dfrac{\rho}{t}, & \textbf{(9)} \\ \dfrac{\sigma_\Theta}{\sigma_\varphi} = \dfrac{R + 3r\sin\alpha}{2R + 3r\sin\alpha}. & \textbf{(10)} \end{cases}$$

Здесь (9) – уравнение Лапласа для торовой оболочки, (10) следует из (8). Решая эту систему, получаем (2).

В силу определения логарифмических деформаций,

$$t = t_0 \exp\varepsilon_n, \; \rho = \rho_0 \exp\varepsilon_0. \tag{11}$$

Покажем, что при условии $R = \mathrm{const}$ выполняется, хотя бы в первом приближении, равенство

$$r = r_0 \exp\varepsilon_\varphi,$$

т.е. что относительное изменение радиуса пропорционально относительному изменению длины дуги. Действительно, из (6) и (8) следует, что

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{d\varepsilon_\Theta} = \frac{1+\gamma\sin\alpha}{\gamma\sin\alpha}. \tag{12}$$

В процессе нагружения γ изменяется незначительно, поэтому в первом приближении $\gamma = \mathrm{const}$. Тогда

$$\varepsilon_\Theta = \frac{\gamma\sin\alpha}{1+\gamma\sin\alpha}\varepsilon_\varphi. \tag{13}$$

Используя теперь (7), (11) и (13), с точностью до слагаемых порядка ε_φ^2, получаем

$$r = \frac{R-\rho}{\sin\alpha} = \frac{R - \rho_0\exp\varepsilon_\Theta}{\sin\alpha} = \frac{R - \rho_0\left(1 + \dfrac{\gamma\sin\alpha}{1+\gamma\sin\alpha}\varepsilon_\varphi\right)}{\sin\alpha} =$$

$$= r_0 + \frac{\rho_0\gamma\varepsilon_\varphi}{1+\sin\alpha} = r_0(1+\varepsilon_\varphi) = r_0\exp\varepsilon_\varphi,$$

что и требовалось. Заметим еще, что из условия постоянства объема (4) и формулы (13)

$$\varepsilon_r = -\frac{1+2\gamma\sin\alpha}{1+\gamma\sin\alpha}\varepsilon_\varphi. \tag{14}$$

Исследуем вопрос о критических деформациях и напряжениях. Очевидно из (2), что, во-первых, $\sigma_\varphi > \sigma_\Theta$ во всех точках оболочки при $\gamma < 2/3$, и поэтому разрушение вызывают кольцевые деформации, и, во-вторых, кольцевые напряжения достигают экстремальных значений при $\alpha = \pm\pi/2$, причем, максимум – при $\alpha = -\pi/2$, т.е. на вогнутой стенке. Из (2) следует, что

$$p = \frac{t}{r}\cdot\frac{1-3\gamma+3\gamma^2}{(1-1,5\gamma)(1-\gamma)}\breve{\sigma}_\varphi, \tag{15}$$

где $\breve{\sigma}_\varphi$ – кольцевые напряжения на вогнутой стенке. Запишем формулу (15) более подробно, используя (11)–(14). Получим (формальные преобразования не приводим) с точностью до слагаемых порядка ε_φ^2:

$$\begin{cases} p=\dfrac{t_0}{r_0}\left(1-K(\gamma_0)\breve{\varepsilon}_\varphi\right)\breve{\sigma}_\varphi, \\ K(\gamma)=\dfrac{1-2\gamma}{1-\gamma}+1+\dfrac{3\gamma(1-2\gamma)}{1-3\gamma+3\gamma^2}-\dfrac{\gamma(2{,}5-3\gamma)}{1-2{,}5\gamma+1{,}5\gamma^2}, \end{cases} \tag{16}$$

где $\breve{\varepsilon}_\varphi$, $\breve{\sigma}_\varphi$ – кольцевые деформации и напряжения на вогнутой стенке.

Считая материал оболочки упрочняемым, зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций аппроксимируем степенной функцией $\sigma_i = A\varepsilon_i^n$, $A = n^{-n}\exp n\sigma_B$, где n – показатель упрочнения, σ_B – временное сопротивление. Тогда [3]

$$\sigma_\varphi = (1-m+m^2)^{-\frac{1+n}{2}} n^{-n}(\exp n)\varepsilon_\varphi^n\sigma_B. \tag{17}$$

Можно показать, что зависимость величины $\sqrt{1-m+m^2}$ от ε_φ незначительна [3], и эту величину можно считать постоянной. Тогда из (16) следует, что

$$p = B\exp\left(-K(\gamma_0)\breve{\varepsilon}_\varphi\right)\cdot\breve{\varepsilon}_\varphi.$$

Найдем, исходя из критерия максимума внутреннего давления, критическое значение для деформации $\breve{\varepsilon}_\varphi^n$, соответствующее потере оболочкой пластической устойчивости. Получим из дифференциального уравнения $p'(\breve{\varepsilon}_\varphi)=0$ после упрощений

$$\breve{\varepsilon}_\varphi^{\text{кр}} = \frac{n}{K(\gamma_0)}. \tag{18}$$

Подставив это в (17), найдем критическое значение кольцевого напряжения на внутренней стенке $\sigma_\varphi^{\text{кр}}(\gamma_0)$:

$$\breve{\sigma}_\varphi^{\text{кр}}(\gamma) = \frac{(2-3\gamma)\exp n}{\sqrt{3}\sqrt{1-3\gamma+3\gamma^2}}\left(\frac{2-3\gamma}{\sqrt{3(1-3\gamma+3\gamma^2)}K(\gamma)}\right)^n\sigma_B. \tag{19}$$

Для вычисления критического давления следует выражения (18) и (19) подставить в первую из формул (16).

Заметим, что в предельном случае прямой трубы (тонкостенной цилиндрической оболочки), когда $\gamma=0$, из формул (16), (18) и (19) следует, что коэффициент $K=2$, $\varepsilon_\varphi^{\text{кр}}=n/2$, $\sigma_\varphi^{\text{кр}}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}(\exp n)\sigma_B$, $p^{\text{кр}}=\dfrac{t_0}{r_0}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\sigma_B$ – хорошо известные результаты, характеризующие потерю несущей способности цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления.

Литература

1. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.

2. Моношков А.Н., Пустин И.А., Сериков С.В. Прочность торовых оболочек и отводов при нагружении внутренним давлением // Проблемы прочности. – 1980. – № 5. – С. 112–115.

3. Дильман В.Л., Остсемин А.А. Развитие методики оценки несущей способности равнопрочных тонкостенных торовых оболочек и отводов //Заводская лаборатория. – 2002. – Т. 68. – № 3. – С. 47–52.

4. Дильман В.Л. Напряженно-деформированное состояние и пластическая устойчивость торовой разностенной оболочки, нагруженной внутренним давлением //Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2001. – Т. 8, в. 2. – С. 585.

5. Дильман В.Л., Остсемин А.А. О влиянии двухосности нагружения на несущую способность магистральных трубопроводов //Известия РАН. МТТ. – 2000. – № 5. – С. 59–65.

Поступила в редакцию 15 апреля 2003 г.