

## ВЛИЯНИЕ ТВЕРДОГО ЯДРА НА КОЛЕБАНИЯ КРУТИЛЬНОГО ВИСКОЗИМЕТРА

*А.Е. Коренченко, В.П. Бескачко, Г.П. Вяткин*

В работе представлены результаты численного расчета физической ситуации, когда внутри цилиндрического крутильного вискозиметра помещен твердый цилиндр, имитирующий зону застоя, возникающую вблизи оси вращения в вязко-пластичной жидкости. Ось внутреннего цилиндра совпадает с осью вискозиметра. Рассмотрены два различных способа возбуждения колебаний: а) внешний цилиндр повернут на небольшой угол относительно состояния покоя и затем отпущен, б) внешний цилиндр испытывает начальный толчок из состояния покоя.

**Введение.** Существует класс жидкостей (называемых вязко-пластичными или бингамовскими), в которых вязкое течение возникает лишь после того, как сдвиговое напряжение превзойдет некоторый предел, а до тех пор такая жидкость ведет себя как твердое тело. Подобным поведением обладают многие материалы, объединяемые ныне понятием «мягкие» («soft matter») и служащие в последнее время объектом интенсивных исследований во всем мире. Если предел текучести такой жидкости весьма мал, она будет вести себя как ньютоновская практически во всех реологических экспериментах, где обычно весьма трудно создать достаточно малые деформации и напряжения. Исключение, по-видимому, составляет метод крутильных колебаний, где по мере затухания колебаний интересующие нас величины становятся сколь угодно малыми. Крутильный вискозиметр представляет собой цилиндр, подвешенный вдоль геометрической оси на длинной упругой нити, и является широко распространенным инструментом для изучения вязкости расплавов. Численный анализ колебаний вискозиметра, заполненного ньютоновской жидкостью, проведен в [1]. Расчеты [1] показывают, что в части цилиндра, примыкающей к оси, жидкость практически неподвижна, а интенсивное движение происходит лишь в окрестности твердых границ. Если жидкость бингамовская, тогда естественно ожидать, что внутри вискозиметра вблизи его оси формируется область покоя, граница которой зависит от распределения сдвиговых напряжений и, следовательно, изменяется в процессе колебаний, перемещаясь от оси вискозиметра к его стенкам. Целью настоящей работы является изучение качественных особенностей в движении вискозиметра, связанных с присутствием внутри него твердого ядра. Рассматривается простейшая модель, когда это ядро представляет собой цилиндр неизменного радиуса, соосный с вискозиметром и имеющий плотность, совпадающую с плотностью жидкости.

**Математическая модель.** В безразмерных переменных, когда все расстояния отнесены к радиусу  $R_{ex}$  внешнего цилиндра, скорость – к  $\nu/R_{ex}$  ( $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости), давление – к  $\rho\nu^2/R_{ex}^2$  ( $\rho$  – плотность жидкости), время – к  $R_{ex}^2/\nu$ , движение цилиндра и заполняющей его жидкости описывается следующей системой уравнений [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Delta \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\omega_{ex}}{dt} = -G\varphi - M_{тр1}, \quad (3)$$

$$\frac{d\omega_{in}}{dt} = M_{тр2}. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  и  $p$  – поля скорости и избыточного по сравнению с  $\rho g z$  давления в жидкости,  $\omega_{\text{ex}}$ ,  $\omega_{\text{in}}$  – угловые скорости внешнего и внутреннего цилиндров,  $\varphi$  – угол поворота внешнего цилиндра относительно равновесного положения,  $G = \frac{R_{\text{ex}}^4 \kappa}{\nu^2 I_{\text{ex}}}$  – безразмерный коэффициент упругости нити

на кручение,  $\kappa$  – коэффициент жесткости нити,  $I_{\text{ex}}$  – момент инерции внешнего цилиндра,  $M_{\text{тр}1,2}$  – безразмерные моменты вязких сил трения, приложенных к цилиндрам со стороны жидкости. Уравнения (1) отражают закон изменения импульса для частиц жидкости, (2) – условие ее несжимаемости, (3) – описывает крутильные колебания внешнего цилиндра, (4) описывает движение внутреннего цилиндра под действием сил трения. Далее рассмотрим только случай, когда течение между цилиндрами является осесимметричным.

В качестве граничных условий примем условия прилипания жидкости ко всем твердым границам:

$$\begin{aligned} w(1, z, t) &= \omega_{\text{ex}}, \\ w(r, 0, t) &= w(r, H/R_{\text{ex}}, t) = \omega_{\text{ex}} \cdot r, \\ v(r, 0, t) &= u(r, 0, t) = v(r, H/R_{\text{ex}}, t) = u(r, H/R_{\text{ex}}, t) = v(1, z, t) = u(1, z, t) = 0, \\ v(R_{\text{in}}/R_{\text{ex}}, z, t) &= u(R_{\text{in}}/R_{\text{ex}}, z, t) = 0, \quad w(R_{\text{in}}/R_{\text{ex}}, z, t) = \omega_{\text{in}} \cdot R_{\text{in}}/R_{\text{ex}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $H$  – высота столба жидкости в вискозиметре, а  $R_{\text{in}}$  – радиус внутреннего цилиндра. В (5) предполагается, что сверху жидкость соприкасается с твердой границей – крышкой.

В зависимости от способа возбуждения колебаний рассматривались два типа начальных условий:

а) при  $t = 0$  внешний цилиндр повернут на угол  $\varphi_0$  и покоится вместе с заполняющей его жидкостью:  $\varphi(0) = \varphi_0$ ;  $\omega_{\text{in}}(0) = \omega_{\text{ex}}(0) = 0$ ;

б) при  $t = 0$  покоящийся вместе с жидкостью в положении равновесия вискозиметр скачком приобретает некоторую угловую скорость  $\omega_0$ :  $\varphi(0) = 0$ ;  $\omega_{\text{in}}(0) = 0$ ;  $\omega_{\text{ex}}(0) = \omega_0$ .

Физические параметры жидкости соответствовали воде.

**Численное решение** находилось методом конечных разностей. Использовались равномерные пространственные сетки с максимальной размерностью  $50 \times 50$  в осевом и радиальном направлениях. Дискретизация гидродинамических уравнений производилась по схеме центральных разностей по пространственным переменным и односторонних по времени. Линеаризация полученных в результате нелинейных алгебраических разностных уравнений проводилась по схеме:

$$f^{n+1} \cdot g^{n+1} = f^n \cdot g^{n+1} + f^{n+1} \cdot g^n - f^n \cdot g^n,$$

а решение линеаризованных систем уравнений на каждом временном этапе – методом исключения Гаусса [3].

**Результаты и обсуждение.** В работе были получены поля скоростей и давления в зависимости от времени для обоих случаев возбуждения, а также законы движения  $\varphi(t)$  и  $\omega(t)$  для обоих цилиндров. Исследовался вопрос о влиянии отношения

$$\eta = R_{\text{in}}/R_{\text{ex}}$$

(радиусов внутреннего и внешнего цилиндров) на наблюдаемые параметры колебаний вискозиметра – период и декремент затухания.

Как показывают расчеты, движение внутреннего цилиндра существенно зависит от способа возбуждения. На рис. 1 и 2 изображены зависимости  $\varphi_{\text{in}}(t)$  и  $\omega_{\text{in}}(t)$  для обоих способов возбуждения колебаний при  $\eta = 0,2$ . Видно, что при возбуждении толчком внутренний цилиндр совершает движение, очень похожее на затухающие колебания, но с небольшим дрейфом положения равновесия. Возможно, этот дрейф связан с накоплением ошибки вычислений на больших временах. При возбуждении колебаний начальным поворотом законы движения  $\varphi_{\text{in}}(t)$  и  $\omega_{\text{in}}(t)$  существенно иные: угловая скорость внутреннего цилиндра на начальном этапе движения может не изменять знака (рис. 1), то есть, его вращение происходит только в одну сторону. С точностью до малой модуляции зависимость  $\varphi_{\text{in}}(t)$  напоминает затухающее вращение свободного цилиндра

в неподвижной жидкости (рис. 2). К моменту затухания колебаний вискозиметра внутренний цилиндр успевает повернуться на конечный угол – порядка двух радиан в приведенном примере

Такое различие можно объяснить тем, что при возбуждении колебаний поворотом угловая скорость вискозиметра на начальном этапе не меняет знак на протяжении полупериода. За этот интервал знакопостоянства угловой скорости первоначально покоящаяся масса жидкости вместе с внутренним цилиндром вовлекается во вращение и по истечении полупериода обладает большим, чем в случае возбуждения толчком, суммарным моментом импульса. Поэтому последующий интервал, на котором скорость внешнего цилиндра имеет обратный знак, приводит лишь к замедлению вращения внутреннего цилиндра, но не к перемене направления его вращения.

Из рис. 1 видно также, что по истечении некоторого времени внутренний цилиндр приходит в состояние затухающих колебаний, как и при первом способе возбуждения (но около нового положения равновесия).

На рис. 3 изображена зависимость коэффициента затухания колебаний вискозиметра от отношения  $\eta$  радиусов внутреннего и внешнего цилиндров. Как видно из рисунка, коэффициент затухания возрастает с увеличением  $\eta$ , а темп этого роста зависит от отношения  $\gamma = H/R_{\text{ex}}$  и тем выше, чем меньше это отношение. Диссипация механической энергии происходит в пограничных слоях около твердых стенок и для длинных цилиндров ( $\gamma \gg 1$ ) ее механизм существенно изменяется при достижении таких  $\eta$ , когда пограничные слои на боковых поверхностях цилиндров начинают перекрываться. Чем короче цилиндр, тем больший вклад в затухание дает диссипация энергии около торцов, и тем больший относительный объем жидкости вовлекается в движение.

Вспомним теперь, что для вязко-пластичной жидкости граница раздела между твердой и текучей фазами должна по мере затухания колебаний перемещаться от оси к стенкам вискозиметра. Это означает, что параметр  $\eta$  в процессе измерений будет изменяться от некоторого минимального значения до единицы. Тогда, ссылаясь на рис. 3, мы должны ожидать, что по мере затухания колебаний их декремент не будет оставаться постоянным, а будет изменяться (увеличиваться) от одного колебания к другому. Таким образом, по данным о параметрах колебаний можно судить о присутствии внутри вискозиметра жидкости с вязко-пластичными свойствами. Ожидается также, что указанный эффект легче наблюдать в случае «коротких» цилиндров – с малым отношением высоты к радиусу.

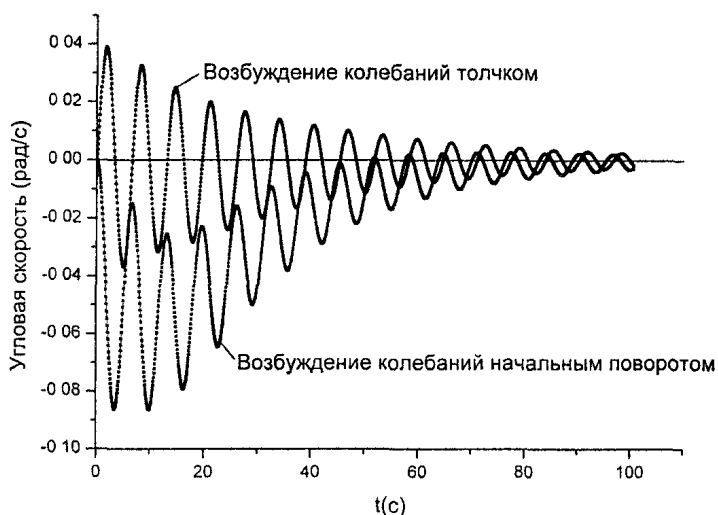


Рис. 1. Зависимость угловой скорости внутреннего цилиндра от времени для различных способов возбуждения колебаний

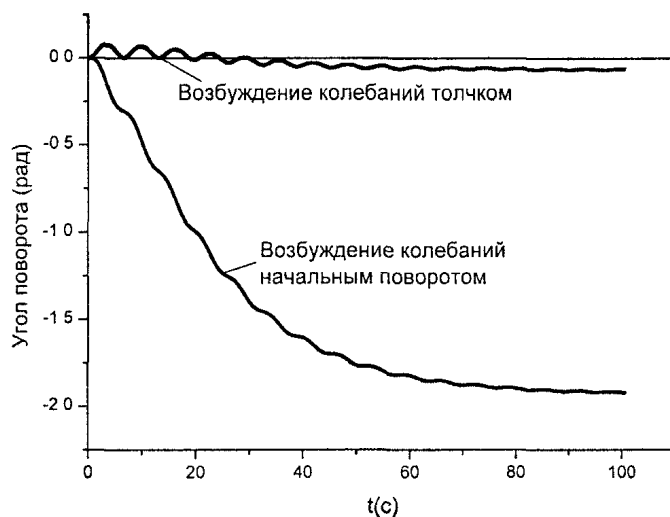


Рис. 2. Зависимость угла поворота внутреннего цилиндра от времени для различных способов возбуждения колебаний

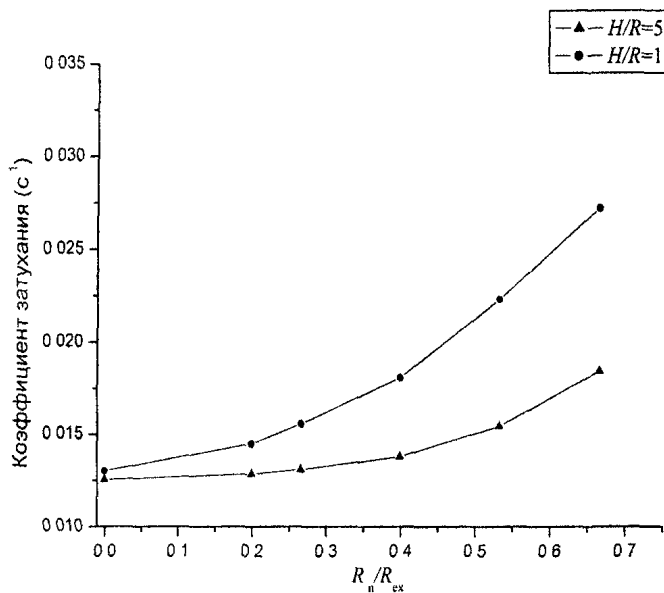


Рис 3 Зависимость коэффициента затухания от отношения радиусов внешнего и внутреннего цилиндров

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (№ 01-01-96424).

**Литература**

1. Коренченко А.Е., Бескачко В.П. Особенности установления колебаний в крутильном вискозиметре // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия» – 2002. – № 3. – Вып. 2. – С. 62–67.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Наука, 1988. – 518 с.
3. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. – М : Мир, 1988. – 537 с.

Поступила в редакцию 14 сентября 2003 г.