

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ КРУТИЛЬНОГО ВИСКОЗИМЕТРА, ЗАПОЛНЕННОГО НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А.Е. Коренченко., О.А. Головня, В.П. Бескачко

Численными методами решается задача о движении крутильного вискозиметра, заполненного ньютоновской жидкостью, за пределами приближений, принятых в стандартных аналитических теориях. Расчеты проведены для случая бесконечного цилиндра и для осесимметричных течений в конечном цилиндре. Проведено сравнение с результатами аналитических вычислений.

Введение. Крутильный вискозиметр является широко распространенным инструментом для изучения вязкости жидкостей, в особенности, агрессивных, например, металлических расплавов. Он представляет собой прямой круговой цилиндр, заполненный исследуемой жидкостью и подвешенный вдоль своей геометрической оси на упругой нити. Непосредственно наблюдаемыми величинами являются период T и декремент δ режима установившихся затухающих колебаний. Эти две величины зависят от выбора параметров установки, а также от свойств заполняющей цилиндра жидкости – ее (кинематической) вязкости ν и плотности ρ . Задача вискозиметрической теории заключается в установлении связи между наблюдаемыми параметрами колебаний (T и δ), параметрами установки и параметрами жидкости (ν и ρ). С формально-математической точки зрения она представляет собой сопряженную задачу о движении твердого тела и заполняющей его жидкости, точное решение которой в конечном аналитическом виде в настоящее время не найдено, да и вряд ли существует вообще. Известен лишь ряд приближенных решений, справедливых при некоторых предположениях о характере течения жидкости, первое из которых было найдено в [1]. Практически все имеющиеся сегодня экспериментальные данные обработаны с использованием методики, предложенной в этой работе или подобных ей и отличающихся друг от друга вычислительными деталями, но не исходными положениями. Накопившиеся, однако, противоречия в вискозиметрических данных делают привлекательной попытку решения той же задачи за пределами принятых приближений, полагаясь только на фундаментальные принципы механики. Сделать это в настоящее время можно только численными методами, что и составляет цель настоящей работы, первые результаты которой были уже представлены в [2].

Математическая модель. Пусть цилиндр с замкнутыми сверху и снизу торцами полностью заполнен исследуемой жидкостью, которая полагается ньютоновской. Уравнение его движения при условии пренебрежения затуханием колебаний, связанным с процессами внутреннего трения в нити и трением о воздух, имеет вид

$$I_{\text{ц}} \frac{df}{dt} = -\kappa\varphi + M_{\text{тр}}. \quad (1)$$

Здесь $I_{\text{ц}}$, f и φ – момент инерции, угловая скорость и угол поворота цилиндра, κ – крутильная жесткость нити, $M_{\text{тр}}$ – момент вязких сил, действующий на цилиндр со стороны жидкости:

$$M_{\text{тр}} = M_1 + M_2,$$

где моменты M_1 и M_2 обусловлены трением жидкости о боковую поверхность цилиндра и его торцы соответственно:

$$M_1 = 2\pi\eta R^2 \int_0^H \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=R} dz,$$

$$M_2 = 2\pi\eta \int_0^R \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} r^2 dr - 2\pi\eta \int_0^R \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=H} r^2 dr.$$

Здесь $V_\varphi = V_\varphi(r, \varphi, z, t)$ – азимутальная компонента поля скорости $\mathbf{V} = (V_r, V_\varphi, V_z)$ (введена цилиндрическая система координат), H и R – высота и радиус цилиндра. В работе ограничимся изуче-

нием только осесимметричных режимов течения, когда ни одна из интересующих нас переменных не зависит от азимутального угла φ .

Движение цилиндра возбуждает течение заполняющей его жидкости, подчиняющееся системе уравнений Навье – Стокса и неразрывности. Введем следующие безразмерные переменные и

параметры: $x = \frac{z}{R}$, $y = \frac{r}{R}$ – компоненты радиус-вектора, $\tau = \frac{t\nu}{R^2}$ – безразмерное время, $\mathbf{v} = (u, v, w)$

– компоненты вектора скорости, $\mathbf{v} = \mathbf{V} \frac{R}{\nu}$, p – возмущение давления сверх $\rho g z$, отнесенное к

$\frac{R}{\rho \nu^2}$, $G = \frac{R^4 \kappa}{\nu^2 I_{\text{ц}}}$ – безразмерный коэффициент жесткости нити на кручение, m_f – момент вязких

сил. Тогда движение цилиндра и заполняющей его жидкости описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{df}{d\tau} = -G\varphi + m_f, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v}, \\ \frac{1}{y} \frac{\partial(yv)}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Граничными условиями для (2) служат условия прилипания жидкости ко всем твердым границам:

$$\begin{aligned} w(1, x, \tau) &= f, \\ w(y, 0, \tau) &= w(y, H/R, \tau) = f \cdot y, \\ v(y, 0, \tau) &= u(y, 0, \tau) = v(y, H/R, \tau) = u(y, H/R, \tau) = v(1, x, \tau) = u(1, x, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (3a)$$

Кроме того, на оси сосуда выполняются условия

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (3б)$$

обусловленные осевой симметрией течения. Жидкость в начальный момент времени покоится, а цилиндр удерживается в состоянии покоя в положении, повернутом на угол φ_0 относительно положения равновесия. В соответствии со сказанным выше начальными условиями для уравнений (2) являются:

$$v(x, y) = 0, \quad f(0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (4)$$

Задача заключается в отыскании закона движения цилиндра $\varphi(\tau)$.

Численное решение. Численное решение системы (2) с граничными условиями (3) и начальными условиями (4) находилось методом конечных разностей. Использовались равномерные пространственные сетки с максимальной размерностью 36×36 в осевом и радиальном направлениях. Дискретизация гидродинамических уравнений производилась по схеме центральных разностей с точностью $(\Delta x)^2$ по пространственным переменным. Линеаризация получаемых в результате нелинейных разностных уравнений проводилась методом Ньютона, а решение линеаризованных систем уравнений – методом исключения Гаусса. Для контроля консервативных свойств решения проверялось равенство нулю суммарного потока в каждом поперечном сечении цилиндра или замкнутость линий тока в осевом сечении в любой момент времени. Расчеты проводились для цилиндров с размерами, обычно используемыми на практике: внутренний радиус изменялся в пределах от 1 до 3 см, а высота – от 1 до 7 см. Отношение моментов инерции цилиндра и «замороженной» жидкости варьировалось в диапазоне от 2 до 20, а вязкость исследуемой жидкости выбиралась в интервале $(10^{-7} \text{ м}^2/\text{с} \leq \nu \leq 8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с})$, свойственном легкотекучим жидкостям (вода, металлические расплавы).

Результаты и обсуждение. Вернемся к приближениям, используемым в стандартных вискозиметрических теориях и оценим их справедливость, располагая численным решением рассматриваемой задачи

1 Предположение о малости радиальной и осевой компонент скорости жидкости по сравнению с азимутальной не всегда верно для цилиндра конечной длины. В работе [2] обнаружено, что в осевой плоскости вискозиметра образуются течения, длящиеся во все время существования крутильных колебаний. Однако вопрос об абсолютных величинах осевой и радиальной компонент в сравнении с азимутальной в [2] не обсуждался. На рис. 1 показано поле скорости в осевой плоскости для цилиндра с $R=H=1$ см, заполненного жидкостью с вязкостью $5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. Видно образование четырех вихрей, причем наибольшая осевая скорость наблюдается вблизи оси цилиндра. На рис. 2 приведены временные зависимости осевой скорости в жидкости для отношений $\gamma=H/R=1$ и $\gamma=2$, и указано амплитудное значение азимутальной скорости. Из рисунка видно, что абсолютное значение осевой скорости увеличивается при уменьшении отношения γ , а отношение наибольших значений осевой и азимутальной скоростей для $\gamma=1$ превышает 0,1. Это не дает достаточных оснований для пренебрежения нелинейными слагаемыми в уравнениях (2), во всяком случае, на начальном этапе колебаний.

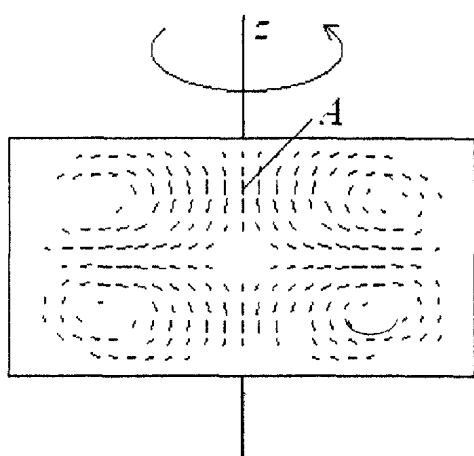


Рис. 1 Распределение скоростей в осевой плоскости цилиндра. Наибольшая осевая скорость отвечает точке А (0, 8H, 0)

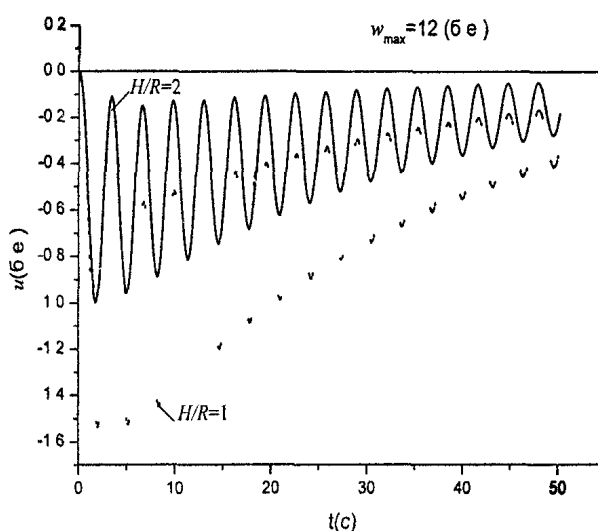


Рис. 2 Осевая скорость в области наиболее интенсивного движения, $I_{ц}/I_{ж} = 20$

2 Для разделения переменных в уравнениях (2) используется предположение о том, что жидкость внутри цилиндра совершает колебательные движения около положения равновесия с частотой, равной частоте колебаний цилиндра и фазой, определяемой скоростью передачи момента импульса к внутренним слоям. Это предположение выполняется не всегда. На рис. 3 изображены зависимости от времени азимутальной скорости на небольших расстояниях ($r=R/4$) от оси вращения для жидкостей с различной вязкостью. Условия подобраны так, чтобы частота колебаний была одинаковой для всех трех рассмотренных случаев. Как видно из рисунка, предположение о гармоническом характере изменения азимутальной скорости выполняется лишь асимптотически и тем позднее, чем

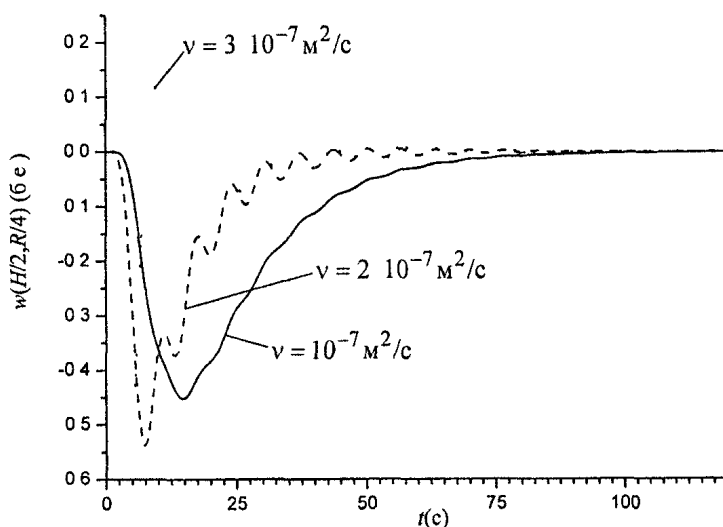
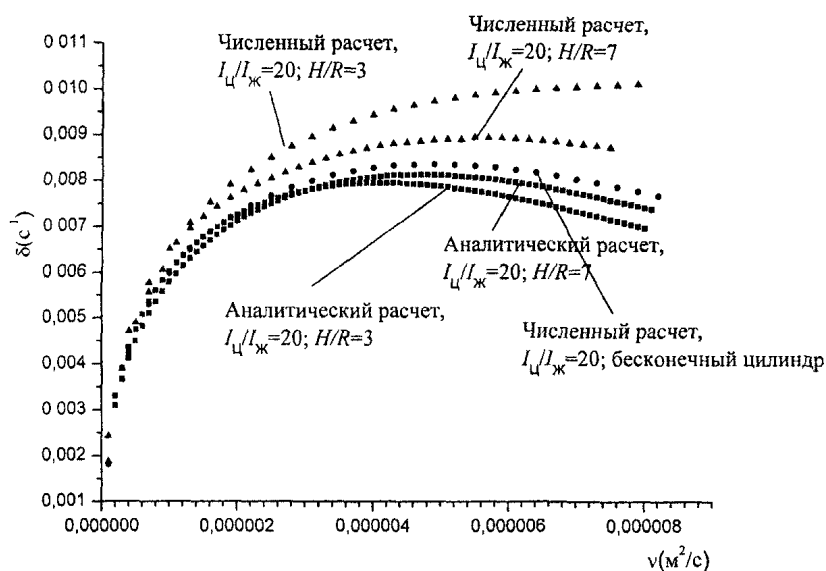


Рис. 3. Зависимость азимутальной скорости вблизи оси от времени, $I_{ц}/I_{ж} = 2$

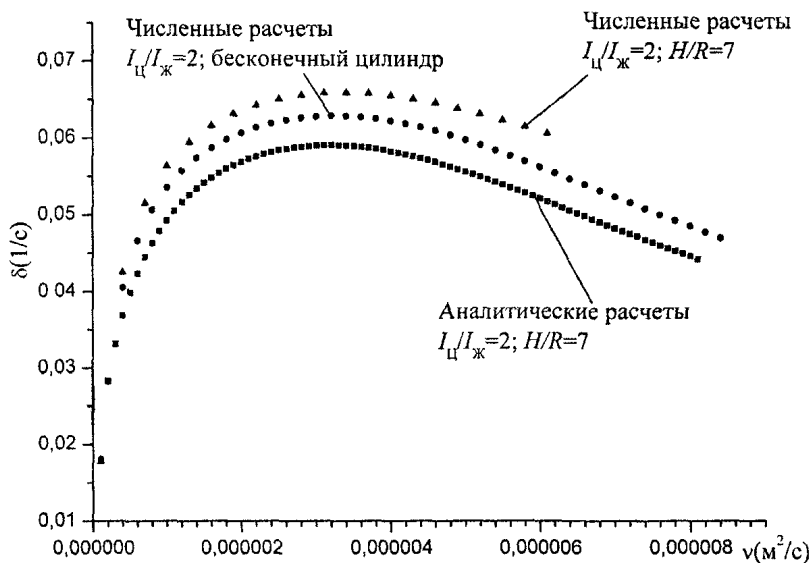
меньше вязкость жидкостей. Чем дальше от оси (и ближе к стенкам), тем быстрее устанавливается режим затухающих колебаний.

Сравним, наконец, предсказания аналитических и численных расчетов параметров колебаний вискозиметра. Для этого, выбрав некоторые параметры установки и зафиксировав плотность жидкости, мы выполнили серию расчетов зависимости $\varphi(\tau)$ для значений вязкости, типичных для низковязких жидкостей. Далее эти данные были подогнаны под зависимость вида

$$\varphi(\tau) = A \cdot e^{-\delta\tau} \sin(\omega\tau + \psi) \quad (5)$$



а)



б)

Рис. 4. Зависимость коэффициента затухания колебаний от вязкости жидкости; а) $\beta = 20$, б) $\beta = 2$

с целью определения частоты колебаний ω и коэффициента затухания δ . Подгонка осуществлялась методом наименьших квадратов с минимизацией методом Розенброка [3]. На рис. 4а, б изображены зависимости коэффициента затухания от вязкости жидкости. Квадратами во всех случаях помечена аналитическая зависимость, полученная в [1], треугольниками показаны результаты численных расчетов. Видно, что аналитические и численные предсказания заметно отличаются друг от друга. Согласие между ними, видимо, достигается лишь в пределе малой вязкости, а с ростом вязкости становится тем хуже, чем больше вязкость. Из рис. 4а видно также, что при фиксированном значении $\beta = I_c / I_j$ (равном 20 в данном случае) согласие тем лучше, чем «длиннее» цилиндр – чем больше параметр $\gamma = H / R$. При $\gamma \rightarrow \infty$ аналитические и численные результаты практически повторяют друг друга, а при конечном γ располагаются по разные стороны от этой «кривой согласия» (отвечающей $\gamma = \infty$) и отстоят от нее тем дальше, чем меньше γ . Таким образом, предсказания зависимости коэффициента затухания от выбора параметра γ при фиксированном значении вязкости жидкости в аналитических и численных моделях прямо противоположны друг другу: первая из них предсказывает уменьшение δ с уменьшением γ , а вторая – его увеличение.

Наконец, при переходе в численной модели от $\gamma = 7$ к $\gamma = 3$ максимум на зависимости $\delta(\nu)$ пропадает: либо перемещается за пределы исследованного интервала вязкостей, либо исчезает вовсе. Последняя возможность противоречит, однако, естественному предположению [1] о том, что функция $\delta(\nu)$ должна уменьшаться при больших ν . При переходе от $\beta = 20$ к $\beta = 2$ (рис. 4б) ситуация не становится лучше. Здесь дело осложняется тем, что предположение анали-

тической теории о характере движения внутренних слоев жидкости (затухающие колебания) выполняется тем хуже, чем меньше отношение β . При малых β внутренние области жидкости могут практически не участвовать в колебаниях (см. рис. 3), что может быть одной из причин расхождения аналитических и численных данных.

На данный момент трудно сказать, что является причиной несоответствия в предсказаниях аналитических и численных моделей. С одной стороны, аналитические модели основываются на приближениях, которые, как мы видели, оправдываются не безусловно. С другой стороны, при применении численных моделей встречаются свои подводные камни, препятствующие получению результатов необходимой точности. Среди них, помимо обычно обсуждаемых (таких как схема дискретизации, параметры сетки и т.п.), отметим специфические для данной задачи:

1) необходимость изучения асимптотических решений, справедливых при временах, достаточно удаленных от момента возбуждения колебаний,

2) необходимость получения максимально точной картины движения жидкости в окрестности твердых границ – в связи с расчетом вязких сил, действующих на твердое тело.

Преодоление каждой из отмеченных трудностей требует применения специальных вычислительных приемов и средств, которые не были использованы в настоящей работе в полной мере. Сейчас не ясно, насколько эти приемы и средства способны изменить описанные выше результаты. Для решения этого вопроса необходимы дальнейшие исследования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (№ 01-01-96424).

Литература

1. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.

2. Коренченко А.Е., Бескачко В.П. Особенности установления колебаний в крутильном вискозиметре // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2002. – № 3. – Вып. 2. – С. 62–67.

3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

Поступила в редакцию 25 апреля 2003 г.