УДК 539.3

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ И ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

О.Ф. Чернявский

Задачи определения условий предельного равновесия и прогрессирующего формоизменения сформулированы в терминах метода конечных элементов для полей скоростей перемещений, непрерывных внутри каждого элемента и разрывных на границах элементов. На основе соответствующих кинематических теорем получены системы линейных ограничений и формы минимизируемых функционалов при условиях текучести Мизеса и Треска–Сен-Венана.

Предложенные решения позволяют избежать систематических ошибок, возникающих при анализе предельных состояний на основе расчетов кинетики деформирования при последовательно возрастающей нагрузке, и сократить объем вычислений.

Метод конечных элементов стал в настоящее время основным при расчетах кинетики неупругого деформирования. Он позволяет определить напряжения, деформации и перемещения при заданных внешних воздействиях (механических, тепловых и др.). В задачах расчета предельных состояний, то есть прямого определения нагрузок, соответствующих заданным кинематическим признакам процесса деформирования, метод конечных элементов развит пока недостаточно и не находит широкого практического применения.

Теоретически возможно определение предельной нагрузки путем последовательных расчетов кинетики деформирования с помощью МКЭ при возрастающих заданных воздействиях. Практически реализовать эту идею трудно, поскольку поля скоростей перемещений в предельных состояниях, как правило, оказываются разрывными и обычные процедуры численного интегрирования в МКЭ могут давать при этом значительные погрешности, которые не обнаруживаются без специального анализа. В связи с этим развитие метода конечных элементов в задачах предельного анализа представляется необходимым. МКЭ в задачах предельного равновесия и приспособляемости может базироваться на статической или кинематической теоремах [1, 2], соответствующих методам сил и перемещений при расчетах кинетики деформирования. В трехмерных задачах эти подходы, по-видимому, практически равноценны. При расчетах пластин и оболочек кинематический метод позволяет непосредственно ввести гипотезы Коши или Кирхгофа–Лява и не требует построения поверхности текучести в пространстве обобщенных переменных.

В соответствии с кинематической теоремой теории предельного равновесия [1] предельной является минимальная из всех нагрузок, при которых

$$\int X_i \dot{u}_i dV + \int_{S_p} p_i \dot{u}_i dS \ge \int \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \sum_{\mu} \int_{S_\mu} \sigma_{ij} n_j \Delta\dot{u}_i dS. \quad (1)$$

Здесь X_i, p_i – массовые и поверхностные нагрузки; $\dot{u}_i$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – скорости остаточных перемещений и пластических деформаций; $i, j = 1, 2, 3$; S_μ – поверхность разрыва скоростей перемещений на величину $\Delta\dot{u}_i$, n_j – единичный вектор нормали к этой поверхности; V – объем тела; σ_{ij} – напряжения на поверхности текучести.

Скорости остаточных перемещений и пластических деформаций в (1) связаны условием совместности, имеющим при малых перемещениях вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) \quad (2)$$

при соответствующих граничных условиях.

Скорости пластических деформаций связаны с напряжениями на поверхности текучести σ_{ij} ассоциированным законом течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}}, \; \lambda_\alpha \ge 0, \quad (3)$$

где $f_\alpha(\sigma_{ij}) = 0$ – поверхность текучести.

Соотношения (1)–(3) определяют величины скоростей деформаций и перемещений с точностью до общего множителя. При использовании любого численного метода решения, в том числе МКЭ, этот множитель необходимо задавать. С этой целью можно, например, задать скорость перемещения u_i одной из точек конструкции. Расчет предельной нагрузки в этом случае будет корректным, только если в действительном механизме разрушения скорость перемещения этой точки является ненулевой и направлена так же, как заданная. В противном случае будет получена верхняя оценка предельной нагрузки, не совпадающая с точным решением. Другой, менее удобный в счете, но более универсальный вариант задания общего множителя основан на задании заведомо ненулевой и положительной работы нагрузок [3]. Если, например, поверхностные нагрузки p_i в предельном состоянии связаны с заданными эксплуатационными нагрузками $\overline{p}_i$ соотношением $p_i = n_p \overline{p}_i$, то можно принять, что

$$\int_{S_p} p_i \dot{u}_i dS = n_p \int_{S_p} \overline{p}_i \dot{u}_i dS = n_p, \quad \text{то есть} \quad \int_{S_p} \overline{p}_i \dot{u}_i dS = 1. \tag{4}$$

Минимизация параметра нагрузки при ограничениях (1)–(3) является в общем случае задачей математической теории оптимальных процессов [4]; ее решение требует возможности разрывов поля скоростей перемещений при непрерывных и дифференцируемых скоростях в остальной части тела. Метод конечных элементов предъявляет менее жесткие требования. Можно ограничиться, как это было сделано впервые в работе [3], чисто разрывным решением, считая, что пластические деформации сосредоточены по границам абсолютно жестких элементов. Можно искать решение в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $\dot{u}_i$, заменяя разрывы скоростей зонами быстрого, но непрерывного изменения. Оба эти подхода ведут к получению верхней оценки предельной нагрузки, теоретически сходящейся к точному решению только при бесконечном уменьшении размеров элементов и абсолютной точности вычислений. Очевидно, что оптимальным является сочетание непрерывных решений в пределах каждого элемента и разрывных на границах.

Соотношение (1) для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$) с учетом дополнительного условия типа (4) в частном случае, когда поверхности разрывов скоростей перемещений $S_{\mu x}$ и $S_{\mu y}$ параллельны осям x и y (учет произвольной ориентации этих поверхностей в соответствии с (1) не вызывает принципиальных трудностей) принимает вид

$$n_p = \int_V \left(\sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + \tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy}\right) dV + \sum_\mu \int_{S_\mu} \left(\sigma_x \Delta\dot{u}_x + \sigma_y \Delta\dot{u}_y + \tau_{xy}\Delta\dot{u}_{xy}\right) dS. \tag{5}$$

Примем условие текучести Мизеса–Хубера–Генки

$$f\left(\sigma_{ij}\right) = \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_S^2 = 0. \tag{6}$$

В соответствии с ассоциированным законом течения (3)

$$\dot{\varepsilon}_x = \lambda\left(2\sigma_x - \sigma_y\right); \; \dot{\varepsilon}_y = \lambda\left(2\sigma_y - \sigma_x\right); \; \dot{\gamma}_{xy} = 6\lambda\tau_{xy}; \; \lambda \ge 0. \tag{7}$$

Соотношение (5) с учетом уравнений (6) и (7) можно тогда представить в виде

$$n_p = \int_V \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_S\sqrt{\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_y^2 + \frac{1}{4}\dot{\gamma}_{xy}^2}\; dV +$$

$$+\sum_\mu \int_{S_{\mu x}} \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_S\sqrt{\left(\Delta\dot{u}_x\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\Delta\dot{u}_{xy}\right)^2} dS + \sum_\mu \int_{S_{\mu y}} \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_S\sqrt{\left(\Delta\dot{u}_y\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\Delta\dot{u}_{yx}\right)^2} dS, \tag{8}$$

где $\sqrt{\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_x\dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_y^2 + \frac{1}{4}\dot{\gamma}_{xy}^2} \ge 0, \; \sqrt{\left(\Delta\dot{u}_x\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\Delta\dot{u}_{xy}\right)^2} \ge 0, \; \sqrt{\left(\Delta\dot{u}_y\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\Delta\dot{u}_{yx}\right)^2} \ge 0.$ (9)

В соответствии с гипотезой Кирхгофа–Лява для пластин и оболочек

$$\dot{\varepsilon}_x = \dot{e}_x + z\dot{\kappa}_x; \; \dot{\varepsilon}_y = \dot{e}_y + z\dot{\kappa}_y; \; \dot{\gamma}_{xy} = \dot{e}_{xy} + z\dot{\kappa}_{xy}. \tag{10}$$

Скорости перемещений в уравнении (4) связаны со скоростями деформаций условиями совместности и соответствующими им граничными условиями закрепления тела. Например, при изгибе пластины

$$\dot{e}_x = \dot{e}_y = \dot{e}_{xy} \equiv 0; \; \dot{\kappa}_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \; \dot{\kappa}_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \; \dot{\kappa}_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \; \partial y}, \tag{11}$$

где $w(x,y)$ – скорости прогибов.

Для пластин произвольного очертания, нагруженных нормальным к поверхности давлением $\overline{p}(x,y)$, при отсутствии сдвиговых разрывов и постоянном по толщине пределе текучести σ_S минимизируемый функционал (8) принимает вид

$$n_p = \int_S \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S h^2 \sqrt{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2} \right] dS +$$
$$+ \sum_\mu \int_{l_{\mu x}} \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \sigma_S h^2 \left| \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \right| \quad dl + \sum_\mu \int_{l_{\mu y}} \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \sigma_S h^2 \left| \Delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \right| \quad dl. \tag{12}$$

Здесь S – срединная поверхность пластины; l_μ – длина линии разрыва скоростей углов поворота.

Переход к конечноэлементной модели выполняется аналогично задачам упругости и расчетам кинетики неупругого деформирования: выбирается сетка конечных элементов и для каждого элемента скорости перемещений представляются в виде

$$w = \sum_i C_i w_i(x, y), \; i = 1, \ldots, N, \tag{13}$$

где $w_i(x, y)$ – базисные функции, C_i – неизвестные постоянные. Примем, что разрывы скоростей перемещений и (или) их производных могут иметь место только на границах элементов.

В качестве примера запишем вид функционала (12) для конечноэлементной модели:

$$n_p = \int_S \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_S h^2 \left[\sum_i \sum_j C_j C_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}\right) + \sum_i \sum_j C_j C_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_i \sum_j C_j C_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{4} \sum_i \sum_j C_j C_i \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x\, \partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x\, \partial y}\right) \right]^{0,5} dS + \tag{14}$$
$$+ \sum_k \int_{l_{xk}} \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \sigma_S h^2 \left| \sum_i C_{ik} \frac{\partial w_{ik}}{\partial x} - \sum_i C_{ik-1} \frac{\partial w_{ik-1}}{\partial x} \right| dl + \sum_k \int_{lyk} \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \sigma_S h^2 \left| \sum_i C_{ik} \frac{\partial w_{ik}}{\partial y} - \sum_i C_{ik-1} \frac{\partial w_{ik-1}}{\partial y} \right| dl.$$

Здесь k – номер элемента.

В отличие от расчетов упругих тел и кинетики неупругого деформирования при нагрузках, меньших предельной, при минимизации функционала (8) в конечноэлементной модели отсутствуют требования непрерывности перемещений и их производных по границам элементов. Система ограничений задачи включает лишь условия типа (4), (9) и условия закрепления конструкции, записанные с учетом уравнения (13).

С целью уменьшения количества переменных, по которым ведется минимизация функционала, можно «запретить» разрывы тех или иных перемещений (сдвиговых, или нормальных к поверхности разрыва, или углов поворота нормалей и т.д.), как это было сделано, например, при записи функционала (12). Последствия такого шага очевидны: в результате будет получена верхняя оценка предельной нагрузки, не совпадающая с точным решением, если «запрещенные» разрывы реализуются в действительном механизме разрушения. Отличие верхней оценки от точного решения будет зависеть от двух факторов: размеров конечных элементов (с уменьшением размера уменьшается погрешность схематизации разрыва зоной быстрого, но непрерывного изменения) и точности численного интегрирования, уменьшающейся по мере приближения к разрывному решению.

Приспособляемость конструкций лимитируется предельными состояниями двух принципиально различных типов: знакопеременным неупругим деформированием и прогрессирующим с числом циклов формоизменением, то есть накоплением остаточных перемещений (частным случаем последнего является состояние предельного равновесия). Знакопеременное деформирование в предельном цикле является локальным процессом [2]. Определение условий его возникновения в опасной точке не требует решения вариационной задачи и выполняется с помощью достаточно простого критерия [2].

Прогрессирующее формоизменение реализуется, если в соответствии с преобразованной теоремой Койтера, обобщенной на случай произвольных внешних воздействий [2],

$$\int X_i^\circ \Delta u_i dV + \int_{S_p} p_i^\circ \Delta u_i dS \ge \int_0^T d\tau \int \left(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}\right) \; \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \sum_\mu \int_0^T d\tau \int_{S_\mu} \left(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}\right) \; n_j \Delta \dot{u}_i dS. \tag{15}$$

Здесь X_i°, p_i° – не зависящие от времени составляющие массовых и поверхностных нагрузок; $\sigma_{ij}^{(e)}$ – напряжения от переменных составляющих внешних воздействий, вычисленные в предположении идеальной упругости материала; τ – текущее время цикла ($0 \le \tau \le T$); $\Delta\dot{u}_i$ – разрывы скоростей перемещений за цикл; Δu_i – приращения остаточных перемещений за цикл, связанные с приращениями неупругих деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}$ условиями совместности

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}\right),\ \Delta\varepsilon_{ij} = \int_0^T \dot{\varepsilon}_{ij} d\tau,\ \Delta u_i = \int_0^T \dot{u}_i d\tau \tag{16}$$

и соответствующими граничными условиями. Скорости неупругих деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ связаны с напряжениями на поверхности текучести σ_{ij} ассоциированным законом течения (3).

Учитывая, что скорости неупругих деформаций в предельном цикле отличны от нуля лишь в отдельные моменты времени, ограничимся рассмотрением конечного числа дискретных моментов времени цикла τ_β ($\beta = 1,\ldots,n$). Число n рассматриваемых моментов времени должно соответствовать реальному числу моментов, в которые $\dot{\varepsilon}_{ij} \ne 0$. Оно равно двум при однопараметрических переменных воздействиях и постоянных свойствах материала. С ростом «неупорядоченности» процесса n возрастает и теоретически может стать любым, но практически точное решение не требует рассмотрения большого числа моментов времени. Условие (15) можно теперь записать в виде

$$\int X_i^\circ \Delta u_i dV + \int_{S_p} p_i^\circ \Delta u_i dS \ge \min_\beta \left[\sum_\beta \int \left(\sigma_{ij\beta} - \sigma_{ij\beta}^{(e)}\right) \Delta\varepsilon_{ij\beta}\ dV + \sum_\beta \sum_\mu \int_{S_\mu} \left(\sigma_{ij\beta} - \sigma_{ij\beta}^{(e)}\right) n_j \Delta u'_{i\beta}\ dS \right], \tag{17}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \sum_\beta \Delta\varepsilon_{ij\beta},\ \Delta u'_i = \sum_\beta \Delta u'_{i\beta} \tag{18}$$

($\Delta u'_i$ – приращение разрыва перемещений за цикл).

В каждый момент времени $f(\sigma_{ij\beta}) = 0$, при этом в общем случае (при наличии, например, температурной зависимости свойств материала и ползучести) каждому моменту времени соответствует свое значение предела текучести σ_S идеализированной диаграммы деформирования. Приращения деформаций $\Delta\varepsilon_{ij\beta}$ связаны с напряжениями $\sigma_{ij\beta}$ ассоциированным законом, поскольку в предельном цикле скорости деформаций отличны от нуля лишь в течение сколь угодно малых интервалов времени.

Для плоского напряженного состояния ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$) неравенство (17) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int X_i^\circ \Delta u_i dV + \int_{S_p} p_i^\circ \Delta u_i dS \ge \min_\beta \Bigg\{ \sum_\beta \int \Big[\left(\sigma_{x\beta} - \sigma_{x\beta}^{(e)}\right) \Delta\varepsilon_{x\beta} + \left(\sigma_{y\beta} - \sigma_{y\beta}^{(e)}\right) \Delta\varepsilon_{y\beta} + \\ + \left(\tau_{xy\beta} - \tau_{xy\beta}^{(e)}\right) \Delta\gamma_{xy\beta} \Big]\ dV + \sum_\beta \sum_\mu \int_{S_\mu} \Big[\left(\sigma_{x\beta} - \sigma_{x\beta}^{(e)}\right) \Delta u'_{x\beta} + \left(\sigma_{y\beta} - \sigma_{y\beta}^{(e)}\right) \Delta u'_{y\beta} + \\ + \left(\tau_{xy\beta} - \tau_{xy\beta}^{(e)}\right) \Delta u'_{xy\beta} + \left(\tau_{xy\beta} - \tau_{xy\beta}^{(e)}\right) \Delta u'_{yx\beta} \Big]\ dS \Bigg\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Для сокращения записи в условии (19) принято, что поверхности разрывов параллельны осям x и y; произвольная ориентация учитывается в соответствии с уравнением (1).

При условии текучести Мизеса с учетом ассоциированного закона течения правая часть этого неравенства принимает вид

$$\begin{aligned} \min_\beta \Bigg\{ \sum_\beta \int \Big[\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{S\beta} \sqrt{\Delta\varepsilon_{x\beta}^2 + \Delta\varepsilon_{x\beta}\Delta\varepsilon_{y\beta} + \Delta\varepsilon_{y\beta}^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy\beta}^2} - \sigma_{x\beta}^{(e)} \Delta\varepsilon_{x\beta} - \\ - \sigma_{y\beta}^{(e)} \Delta\varepsilon_{y\beta} - \tau_{xy\beta}^{(e)} \Delta\gamma_{xy\beta} \Big]\ dV + \sum_\beta \sum_\mu \int_{S_\mu} \frac{2}{\sqrt{3}} \Bigg[\sigma_{S\beta} \Bigg(\sqrt{\left(\Delta u'_{x\beta}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\Delta u'_{xy\beta}\right)^2} + \\ + \sqrt{\left(\Delta u'_{y\beta}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\Delta u'_{yx\beta}\right)^2} \Bigg) - \sigma_{x\beta}^{(e)} \Delta u'_{x\beta} - \sigma_{y\beta}^{(e)} \Delta u'_{y\beta} - \tau_{xy\beta}^{(e)} \left(\Delta u'_{xy\beta} + \Delta u'_{yx\beta}\right) \Bigg]\ dS \Bigg\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь корни из соответствующих сумм неотрицательны согласно ассоциированному закону течения ($\lambda \ge 0$).

Соответственно при условии текучести Треска–Сен-Венана применительно к осесимметричным пластинам и оболочкам ($\tau_{xy} = 0$)

$$\min_{\beta}\left\{\sum_{\beta}\int\left[0,5\sigma_S\left(\left|\Delta\varepsilon_{x\beta}\right|+\left|\Delta\varepsilon_{y\beta}\right|+\left|\Delta\varepsilon_{x\beta}+\Delta\varepsilon_{y\beta}\right|\right)-\sigma_{x\beta}^{(e)}\Delta\varepsilon_{x\beta}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sigma_{y\beta}^{(e)}\Delta\varepsilon_{y\beta}\right]\,dV+\sum_{\beta}\sum_{\mu}\left[\sigma_{S\beta}\left(\left|\Delta u_{x\beta}\right|+\left|\Delta u_{y\beta}\right|\right)-\sigma_{x\beta}^{(e)}\Delta u_{x\beta}-\sigma_{y\beta}^{(e)}\Delta u_{y\beta}\right]\,dS\right\}. \quad (21)$$

Переход к конечноэлементной модели выполняется теперь так же, как в задачах предельного равновесия:

- Приращение перемещения одной точки или множитель при коэффициенте запаса в выражении для работы внешних сил типа (4) приравнивается к единице;
- приращения перемещений в пределах каждого конечного элемента задаются с помощью базисных функций и неизвестных постоянных в виде (13);
- приращения деформаций в пределах каждого элемента выражаются через коэффициенты при базисных функциях с помощью условий совместности (16), включающих для пластин и оболочек гипотезы Коши или Кирхгофа–Лева в явном виде;
- коэффициент запаса по прогрессирующему формоизменению соответствует минимальному значению функционала (20) или (21).

Таким образом, система ограничений вариационной задачи включает:

- уравнение, конкретизирующее численные значения приращений перемещений (определяемые теоремой Койтера лишь с точностью до множителя);
- кинематические граничные условия задачи (условия закрепления конструкции);
- условия неотрицательности подынтегральных выражений в минимизируемом функционале в каждый момент времени.

При условии Треска–Сен-Венана они обеспечиваются автоматически; при условии Мизеса сводятся к неотрицательности корней в функционале (20).

Система ограничений не содержит – в отличие от упругих и неупругих расчетов при заданной нагрузке – требований непрерывности перемещений и их производных на границах элементов. Такие требования могут быть искусственно включены в систему ограничений с целью уменьшения количества переменных в минимизируемом функционале, но это ведет к получению верхней оценки предельной нагрузки, не совпадающей с точным решением, если исключенные возможные разрывы реализуются в действительном механизме разрушения.

Литература

1. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. – М.: ИЛ, 1961. – 79 с.
2. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. – М.: Машиностроение, 1979. – 263 с.
3. Ржаницын А.Р. Расчет оболочек методом предельного равновесия при помощи линейного программирования// Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 656–665.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 301 с.
5. Чернявский А.О. Практическое применение метода конечных элементов в задачах расчета на прочность. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2001. – 89 с.

Поступила в редакцию 17 апреля 2003 г.