Математика

УДК 517.53

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ДЛЯ ПРЕДПОСЛЕДНЕЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СТРОКИ

В.М. Адуков

Пусть $a(z)$ – мероморфная функция, имеющая в круге $|z|<R$ точно λ полюсов. В работе изучается асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде для $(\lambda-2)$-й строки (предпоследней промежуточной строки) таблицы Паде функции $a(z)$ в случае одного доминирующего полюса. Используется метод, разработанный ранее автором для последней промежуточной строки.

1. Введение

Пусть $a(z)$ – функция, мероморфная в круге $D_R=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<R\}$ и аналитическая в начале координат. Пусть $z_1,\dots,z_\ell$ ее различные полюсы кратностей $s_1,\dots,s_\ell$, соответственно, и $\lambda=s_1+\dots+s_\ell$ – число ее полюсов в D_R. Пусть $\rho\equiv|z_1|=\dots=|z_\mu|>|z_{\mu+1}|\geq\dots\geq|z_\ell|$.

Если $m=\sum_{j=1}^{\ell}s_j$ или $m=\sum_{j=\mu+1}^{\ell}s_j$, то по теореме Монтессу (см., например, [2]) аппроксимации Паде $\pi_{n,m}(z)$ сходятся при $n\to\infty$ к $a(z)$ равномерно на компактных подмножествах области $D_R\setminus\{z_1,\dots,z_\ell\}$ или $D_\rho\setminus\{z_{\mu+1},\dots,z_\ell\}$, соответственно. Строка таблицы Паде с номером m, удовлетворяющим неравенствам $\sum_{j=\mu+1}^{\ell}s_j<m<\sum_{j=1}^{\ell}s_j$, называется *промежуточной строкой*. Достаточные условия сходимости всей промежуточной строки были получены в [3].

Для строки с номером $m=\lambda-1=\sum_{j=1}^{\ell}s_j-1$ (*последняя промежуточная строка*) известно асимптотическое поведение знаменателей $Q_{n,\lambda-1}(z)$ аппроксимаций Паде $\pi_{n,\lambda-1}(z)$ и найдены все предельные точки полюсов $\pi_{n,\lambda-1}(z)$ [1]. Оказалось, что асимптотика $Q_{n,\lambda-1}(z)$ в основном определяется арифметической природой *доминирующих полюсов* $a(z)$, то есть полюсов, имеющих максимальный модуль и максимальную кратность. Знание предельных точек полюсов позволяет найти множество, внутри которого равномерно сходится вся последняя промежуточная строка. Тем самым для данной строки построена полная теория равномерной сходимости.

Метод работы [1] основан на соображениях устойчивости. Он позволяет свести изучение сходимости строки таблицы Паде мероморфной функции $a(z)$ к такой же задаче, но для более простой рациональной функции (рациональной части $a(z)$).

Соображения устойчивости без каких-либо ограничений на функцию $a(z)$ можно применять только к строкам с номерами $m=\lambda$, $m=\lambda-1$. Однако для некоторых классов функций метод может оказаться эффективным и для других промежуточных строк. Цель работы – продемонстрировать это на примере предпоследней промежуточной строки для мероморфной функции с одним доминирующим полюсом.

2. Критерий устойчивости

В работе [1] показано, что в задаче аппроксимаций Паде естественно возникают понятия индексов и существенных многочленов, введенные в [4]. (Определения и обозначения из этих работ мы часто будем использовать без напоминания.) Там показано, что знаменатели аппроксимаций Паде – это первые существенные многочлены соответствующей последовательности, а соображения устойчивости применимы, когда индексы этой последовательности устойчивы.

Поэтому мы начнем с установления критерия устойчивости и нахождения индексов и существенных многочленов последовательности $r_{n-m+1}^{n+m} = \{r_{n-m+1}, r_{n-m+2}, \dots, r_{n+m}\}$, составленной из коэффициентов Тейлора правильной рациональной и аналитической в $z=0$ функции $r(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$, $\deg D(z) = \lambda$, при $m = \lambda - 2$. Именно эта последовательность необходима для определения знаменателя аппроксимации Паде типа (n, m) (см. [1]).

Нам потребуются некоторые результаты по строке с номером $m = \lambda - 1$ из статьи [1]. Для рациональной функции $r(z)$ знаменателем $Q_{n,\lambda-1}(z)$ аппроксимации Паде типа $(n, \lambda-1)$ является многочлен $V_{n+\lambda}^{(1)}(z)$, который находится из следующего рекуррентного соотношения $V_{k+1}^{(1)}(z) = zV_k^{(1)} - v_k^{(1)}D(z)$, $k \ge 0$, где $v_k^{(1)}$ – коэффициент при старшей степени $z^{\lambda-1}$ многочлена $V_k^{(1)}(z)$, а $V_0^{(1)}(z)$ единственным образом находится из решения уравнения Безу $U_0^{(1)}(z)D(z) + V_0^{(1)}(z)N(z) = 1$, при условии, что $\deg V_0^{(1)}(z) < \lambda$. Оказывается, что многочлены $V_k^{(1)}(z)$ удовлетворяют разностному уравнению

$$V_{k+\lambda}^{(1)}(z) + d_{\lambda-1}V_{k+\lambda-1}^{(1)}(z) + \dots + d_0 V_k^{(1)}(z) = 0, \quad k \ge 0, \tag{1}$$

где $D(z) = z^\lambda + d_{\lambda-1}z^{\lambda-1} + \dots + d_0$. Отсюда получается явная формула для $V_k^{(1)}(z)$:

$$V_k^{(1)}(z) = \sum_{j=1}^{\lambda} \sum_{i=1}^{j} d_{\lambda-i+1} v_{k+j-i}^{(1)} z^{\lambda-j}, \quad k \ge 0. \tag{2}$$

Отличие случая $m = \lambda - 2$ от предыдущего в том, что теперь не для любой рациональной дроби $r(z)$ индексы последовательности будут устойчивыми. Например, если $r(z) = \dfrac{z}{z^4 - 1}$, то $r_n = 1$ при $n = 4k+1$ и $r_n = 0$ в остальных случаях. В круге $|z| < R, R > 1$, функция $r(z)$ имеет $\lambda = 4$ полюсов. Легко проверить, что при $m = \lambda - 2$ последовательность r_{n-m+1}^{n+m} имеет устойчивые индексы только при $n = 4k,\ 4k+1$. Устойчивость же индексов является необходимым условием применимости нашего метода. Поэтому, прежде всего мы выясним условия устойчивости.

Теорема 1. *Последовательность $r_{n-\lambda+3}^{n+\lambda-2}$, ассоциированная с аппроксимацией Паде типа $(n, \lambda-2)$, имеет устойчивые индексы $n, n+1$ тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел $v_{n+\lambda-1}^{(1)}$, $v_{n+\lambda}^{(1)}$ отлично от нуля. Если при выполнении этого условия определить многочлен $V_k^{(2)}(z) = v_k^{(1)}V_{k-1}^{(1)}(z) - v_{k-1}^{(1)}V_k^{(1)}(z)$ формальной степени $\lambda - 2$, то существенные многочлены $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ последовательности $r_{n-\lambda+3}^{n+\lambda-2}$ находятся следующим образом:*

1) $Q_1(z) = V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $Q_2(z) = V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)$, или $Q_1(z) = V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $Q_2(z) = V_{n+\lambda}^{(1)}(z)$, или $Q_1(z) = {}$ $= V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $Q_2(z) = V_{n+\lambda+1}^{(1)}(z)$ при $v_{n+\lambda-1}^{(1)} \ne 0$, $v_{n+\lambda}^{(1)} \ne 0$;

2) $Q_1(z) = V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $Q_2(z) = V_{n+\lambda+1}^{(1)}(z)$ при $v_{n+\lambda-1}^{(1)} = 0$, $v_{n+\lambda}^{(1)} \ne 0$;

3) $Q_1(z) = V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $Q_2(z) = V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)$ при $v_{n+\lambda-1}^{(1)} \ne 0$, $v_{n+\lambda}^{(1)} = 0$.

Тестовое число σ_0 для пары многочленов $V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)$ совпадает с $\left(v_{n+\lambda-1}^{(1)}\right)^2$, для пары $V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $V_{n+\lambda}^{(1)}(z)$ – с $v_{n+\lambda-1}^{(1)}v_{n+\lambda}^{(1)}$, а для $V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $V_{n+\lambda+1}^{(1)}(z)$ – с $\left(v_{n+\lambda-1}^{(1)}\right)^2$.

Доказательство. Необходимость. Покажем, что, если $v_{n+\lambda-1}^{(1)} = 0$, $v_{n+\lambda}^{(1)} = 0$, то индексы $r_{n-\lambda+3}^{n+\lambda-2}$ неустойчивы. Поскольку $v_{n+\lambda-1}^{(1)} = 0$, то $V_{n+\lambda}^{(1)}(z) = zV_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)$. Поэтому условие $v_{n+\lambda}^{(1)} = 0$

означает, что степень $V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)$ не превосходит $\lambda-3$ и многочлен $V_{n+\lambda}^{(1)}(z)$ имеет нулевой свободный член и нулевой формальный старший коэффициент, то есть $Q_1(z)=V_{n+\lambda}^{(1)}(z)=\beta_1 z+\ldots+\beta_{\lambda-2}z^{\lambda-2}$. По теореме 4.1 из [1] $V_{n+\lambda}^{(1)}(z)$ принадлежит $N_{n+1}(r_{n-\lambda+2}^{n+\lambda-1})$. Итак, ненулевой вектор $(\beta_1,\ldots,\beta_{\lambda-2})$ принадлежит пространству $\ker T_n(r_{n-\lambda+3}^{n+\lambda-2})$. Это означает, что индексы последовательности $r_{n-\lambda+3}^{n+\lambda-2}$ удовлетворяют неравенствам $\mu_1\le n-1$, $\mu_2\ge n+2$, то есть являются неустойчивыми.

Достаточность. Пусть среди чисел $v_{n+\lambda-1}^{(1)}$, $v_{n+\lambda}^{(1)}$ есть не равные нулю. Определим многочлен $V_k^{(2)}(z)=v_k^{(1)}V_{k-1}^{(1)}(z)-v_{k-1}^{(1)}V_k^{(1)}(z)$ формальной степени $\lambda-2$.

Учитывая, что $V_{n+\lambda}^{(1)}(z)$ принадлежит $N_{n+1}(r_{n-\lambda+2}^{n+\lambda-1})$, а $V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)\in N_n(r_{n-\lambda+1}^{n+\lambda-2})$, получаем $\sigma\{z^{-i}V_{n+\lambda}^{(2)}(z)\}=v_{n+\lambda}^{(1)}\sigma\{z^{-i}V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)\}-v_{n+\lambda-1}^{(1)}\sigma\{z^{-i}V_{n+\lambda}^{(1)}(z)\}=0$ для $i=n+1,\ldots,n+\lambda-2$. Эти условия означают, что $V_{n+\lambda}^{(2)}(z)\in N_n(r_{n-\lambda+3}^{n+\lambda-2})$. Также нетрудно проверить, что многочлены $V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)$, $V_{n+\lambda}^{(1)}(z)$, $V_{n+\lambda+1}^{(1)}(z)$ всегда принадлежат $N_{n+2}(r_{n-\lambda+3}^{n+\lambda-2})$. Положим теперь $\kappa_1=n$, $\kappa_2=n+1$ и вычислим тестовое число σ_0 для многочленов $V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)$. Для этого нам потребуется старший коэффициент $v_k^{(2)}$ многочлена $V_k^{(2)}(z)$. Из рекуррентной формулы для $V_k^{(1)}(z)$ легко получить соотношение

$$zV_k^{(2)}(z)=v_k^{(1)}V_k^{(1)}(z)-v_{k-1}^{(1)}V_{k+1}^{(1)}(z), \qquad (3)$$

из которого следует, что $v_k^{(2)}=\left(v_k^{(1)}\right)^2-v_{k-1}^{(1)}v_{k+1}^{(1)}$.

Учитывая теперь соотношение (3), мы получаем

$$\sigma_0=\sigma\left\{z^{-n}v_{n+\lambda-1}^{(1)}V_{n+\lambda}^{(2)}(z)-z^{-n-1}v_{n+\lambda}^{(2)}V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)\right\}=$$

$$=\sigma\left\{z^{-n-1}\left[\left(v_{n+\lambda-1}^{(1)}v_{n+\lambda+1}^{(1)}-(v_{n+\lambda}^{1)})^2\right)V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)+v_{n+\lambda-1}^{(1)}v_{n+\lambda}^{(1)}V_{n+\lambda}^{(1)}(z)-(v_{n+\lambda-1}^{(1)})^2V_{n+\lambda+1}^{(1)}(z)\right]\right\}.$$

Легко видеть, что $\sigma\left\{z^{-n-1}V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)\right\}=0,\quad \sigma\left\{z^{-n-1}V_{n+\lambda+1}^{(1)}(z)\right\}=-1$. Таким образом, для многочленов $V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)$ имеем $\sigma_0=\left(v_{n+\lambda-1}^{(1)}\right)^2$.

Аналогичным образом показывается, что тестовое число σ_0 для многочленов $V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $V_{n+\lambda}^{(1)}(z)$ совпадает с $v_{n+\lambda-1}^{(1)}v_{n+\lambda}^{(1)}$, а для $V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$, $V_{n+\lambda+1}^{(1)}(z)$ с $\left(v_{n+\lambda-1}^{(1)}\right)^2$.

Для завершения доказательства осталось применить критерий существенности из [4] в скалярном случае. ▲

Ниже мы покажем, что условия теоремы выполняются, если функция $r(z)$ имеет один доминирующий полюс.

3. Асимптотика знаменателей аппроксимаций Паде

Мы начнем с асимптотики знаменателей аппроксимаций Паде для рациональной части $r(z)$ мероморфной функции $a(z)$. Затем применение подготовительной теоремы 7.1 из [1] позволит получить асимптотику и в мероморфном случае. Как правило, мы будем ограничиваться изложением только схемы доказательств, так как рассуждения такие же, как и в работе [1].

Из теоремы 1 и формулы (2) следует, что знаменатель $V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$ аппроксимации Паде типа $(n,\lambda-2)$ выражается через коэффициент $v_k^{(1)}$. Этот коэффициент, очевидно, удовлетворяет разностному уравнению (1). По теореме о структуре общего решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами имеем

$$v_k^{(1)} = p_1(k)z_1^k + \ldots + p_\ell(k)z_\ell^k, \quad k \ge 0. \tag{4}$$

Здесь $p_j(k) = C_j^0 + C_j^1 k + \ldots + C_j k^{s_j-1}$ – многочлен от k степени не выше $s_j - 1$ и старший коэффициент C_j находится по формуле:

$$C_j = \frac{1}{(s_j-1)!z_j^{s_j-1}D_j^2(z_j)A_j},$$

где $D_j(z) = \frac{D(z)}{(z-z_j)^{s_j}}$, $1 \le j \le \ell$, A_j – коэффициент при $(z-z_j)^{-s_j}$ в разложении $a(z)$ в ряд Лорана в окрестности полюса $z = z_j$ (см.[1]).

Таким образом, для изучения асимптотики $V_k^{(2)}(z)$ при $k \to \infty$ нам нужно исследовать асимптотику $v_k^{(1)}$. Пусть $|z_1| = \ldots = |z_\mu| > |z_{\mu+1}| \ge \ldots \ge |z_\ell|$. Упорядочим полюсы максимального модуля $z_1,\ldots,z_\mu$ так, чтобы для их кратностей выполнялось $s_1 \ge s_2 \ge \ldots \ge s_\mu$. Пусть $s_1 = \ldots = s_{\nu_1} > s_{\nu_1+1} = \ldots = s_{\nu_1+\nu_2} > \ldots$. Полюсы $z_1,\ldots,z_{\nu_1}$ будем называть *доминирующими полюсами первого уровня*, $z_{\nu_1+1},\ldots,z_{\nu_1+\nu_2}$ – *второго* и т.д. В этой работе мы будем рассматривать только случай, когда $\nu_1 = 1$. Тогда из формулы (4) следует, что для коэффициентов $v_k^{(1)}$ справедлива следующая асимптотика

$$v_k^{(1)} = z_1^k k^{s_1-1}[C_1 + o(1)], \quad k \to \infty,$$

и, следовательно, $v_k^{(1)} \ne 0$ для всех достаточно больших k.

По теореме 1 это означает, что для всех достаточно больших n последовательность r_{n-m+1}^{n+m} при $m = \lambda - 2$ имеет устойчивые индексы $\mu_1 = n$, $\mu_2 = n+1$ и существенные многочлены $Q_1(z) = V_{n+\lambda}^{(2)}(z) = v_{n+\lambda}V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z) - v_{n+\lambda-1}V_{n+\lambda}^{(1)}(z)$ и $Q_2(z) = V_{n+\lambda-1}^{(1)}(z)$. Учитывая явную формулу (2) для $V_k^{(1)}(z)$, получаем

$$V_k^{(2)}(z) = \sum_{j=1}^{\lambda-1}\left(\sum_{i=1}^{j} d_{\lambda-i+1}\Delta_{k,j-i}\right)z^{\lambda-j-1}. \tag{5}$$

Здесь $\Delta_{k,m} = \begin{vmatrix} v_k^{(1)} & v_{k-1}^{(1)} \\ v_{k+m+1}^{(1)} & v_{k+m}^{(1)} \end{vmatrix}$.

Итак, для получения асимптотики знаменателя $V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$ требуется асимптотика определителей $\Delta_{k,m}$. Принимая во внимание формулу (4) для $v_k^{(1)}$, нетрудно прийти к следующему результату:

$$\Delta_{k,m} = k^{2s_1-4} z_1^{2k+m}\left[(m+1)(s_1-1)C_1^2 + o(1)\right] +$$

$$+k^{s_1+s_2-2} z_1^{2k+m}\left[\sum_{\iota=2}^{\nu_2+1}\left(\frac{z_\iota}{z_1}\right)^{k-1}\frac{z_\iota - z_1}{z_1}C_\iota C_1\left(1-\left(\frac{z_\iota}{z_1}\right)^{m+1}\right)+o(1)\right]. \qquad (6)$$

Далее все зависит от соотношения между s_1 и s_2.

1 случай. Если число полюсов максимального модуля $\mu = 1$, то второе слагаемое в асимптотике (6) отсутствует, а при $\mu > 1$, $s_1 > s_2 + 2$ преобладает первое слагаемое. Поэтому, в этих случаях

$$\Delta_{k,m} = k^{2s_1-4} z_1^{2k+m}\left[(m+1)(s_1-1)C_1^2 + o(1)\right].$$

В частности, это означает, что старший коэффициент $\Delta_{k,0}$ многочлена $V_k^{(2)}(z)$ отличен от нуля для всех достаточно больших k и потому этот многочлен может быть $(\lambda-2)$-нормирован. Пусть $V_k^{(2)}(z)$ – $(\lambda-2)$-нормирован. Так как $\frac{\Delta_{k,m}}{\Delta_{k,0}} \to (m+1)z_1^m$ при $k\to\infty$, то существует $\lim_{k\to\infty} V_k^{(2)}(z)$. Вычисление этого предела не представляет труда, и мы получаем

$$\lim_{k\to\infty} V_k^{(2)}(z) = \frac{D(z)}{(z-z_1)^2}.$$

Применение подготовительной теоремы дает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\mu = 1$ *или* $\mu > 1$, $s_1 > s_2 + 2$. *Тогда при всех достаточно больших n знаменатель* $Q_{n,\lambda-2}(z)$ *аппроксимации Паде типа* $(n,\lambda-2)$ *мероморфной функции* $a(z)$ *может быть* $(\lambda-2)$*-нормирован и для нормированных знаменателей существует*

$$\lim_{k\to\infty} Q_{n,\lambda-2}(z)(z) = \frac{D(z)}{(z-z_1)^2}.$$

▲

Ясно, что в условиях этой теоремы существует предел $\pi_{n,\lambda-2}$ для всей $(\lambda-2)$-й строки.

2 случай. Пусть $s_1 = s_2 + 1$. В этой ситуации в асимптотике (6) остается только второе слагаемое:

$$\Delta_{k,m} = k^{s_1+s_2-2} z_1^{2k-1}\left[\sum_{\iota=2}^{\nu_2+1}\left(\frac{z_\iota}{z_1}\right)^{k-1}\frac{z_\iota - z_1}{z_1}C_\iota C_1\left(z_1^{m+1} - z_\iota^{\,m+1}\right)+o(1)\right]. \qquad (7)$$

Пусть $\frac{z_2}{z_1} = e^{2\pi\iota\Theta_1^{(2)}}, \ldots, \frac{z_{\nu_2+1}}{z_1} = e^{2\pi\iota\Theta_{\nu_2}^{(2)}}$. Обозначим $\mathbf{F}_2 = \overline{\left\{\left(e^{2\pi\iota n\Theta_1^{(2)}}, \ldots, e^{2\pi\iota n\Theta_{\nu_2}^{(2)}}\right)\right\}_{n\ge 0}}$ монотетическую подгруппу тора $\mathbf{T}^{\nu_2}$, порожденную $\Theta_1^{(2)}, \ldots, \Theta_{\nu_2}^{(2)}$. Она может быть найдена явно таким же образом, как и группа $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}$, соответствующая доминирующим полюсам первого уровня (см. [1]).

По определению этой группы для любого $\tau = \left(\tau_1, \ldots, \tau_{\nu_2}\right) \in \mathbf{F}_2$ существует последовательность номеров Λ_τ такая, что $\lim_{n\to\infty}\left(e^{2\pi\iota n\Theta_1^{(2)}}, \ldots, e^{2\pi\iota n\Theta_{\nu_2}^{(2)}}\right) = \tau, \quad n \in \Lambda_\tau$.

Обозначим $S_m^{(2)}(\tau)=\sum_{\iota=2}^{\nu_2+1} C_\iota \tau_\iota \left(1-\frac{z_1}{z_\iota}\right)\left(z_1^{m+1}-z_\iota^{\ m+1}\right)$. Эти суммы играют роль сумм $S_m^{(1)}(\tau)\equiv S_m(\tau)$, которые были определены в [1] для полюсов первого уровня. Следующее предложение является аналогом предложения 6.1 из [1] и доказывается подобным образом.

Предложение 1. *Среди любых ν_2 чисел $S_k^{(2)}(\tau),\ S_{k+1}^{(2)}(\tau),\ldots,S_{k+\nu_2-1}^{(2)}(\tau)$ существует хотя бы одно отличное от нуля.* ▲

Целое неотрицательное число $\delta_+^{(2)}(\tau)$ будем называть *плюс-дефектом* точки $\tau\in\mathbf{F}_2$, если $\delta_+^{(2)}(\tau)$ наименьшее число такое, что $S_{\delta_+^{(2)}(\tau)}(\tau)\neq 0$. Из предложения 1 следует, что $0\le\delta_+^{(2)}(\tau)\le\nu_2-1$. При фиксированном τ мы будем использовать более короткое обозначение $\delta_+^{(2)}$.

Теорема 3. *Пусть $\nu_1=1$, $s_1=s_2+1$, τ – произвольная точка группы $\mathbf{F}_2$, а Λ_τ – соответствующая ей последовательность номеров. Пусть $\delta_+^{(2)}$ – плюс-дефект точки τ.*

Тогда для всех достаточно больших $n\in\Lambda_\tau-\lambda$ знаменатель $Q_{n,\lambda-2}(z)$ аппроксимации Паде типа $(n,\ \lambda-2)$ для $a(z)$ можно $(\lambda-\delta_+^{(2)}-2)$-нормировать и для последовательности нормированных многочленов $Q_{n,\lambda-2}(z)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n,\lambda-2}(z)=W^{(2)}(z,\tau),\quad n\in\Lambda_\tau-\lambda.$$

Здесь $W^{(2)}(z,\tau)$ – многочлен степени $\lambda-\delta_+^{(2)}-2$, вычисляющийся по формуле:

$$W^{(2)}(z,\tau)=\frac{1}{S_{\delta_+^{(2)}}^{(2)}(\tau)}\,\omega^{(2)}(z,\tau)\frac{D(z)}{(z-z_1)\ldots(z-z_{\nu_2+1})},$$

$$\omega^{(2)}(z,\tau)=\sum_{j=2}^{\nu_2+1} C_j\tau_j\frac{(z_j-z_1)^2}{z_j}\Delta_j^{(2)}(z),$$

$$\Delta_j^{(2)}(z)=\frac{\Delta^{(2)}(z)}{z-z_j},\quad \Delta^{(2)}(z)=(z-z_2)\ldots(z-z_{\nu_2+1}).$$

В частности, при $\nu_1=\nu_2=1$ существует предел всей последовательности $Q_{n,\lambda-2}(z)$ равный $\frac{D(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$.

Все возможные пределы сходящихся подпоследовательностей каким-либо образом нормированных $Q_{n,\lambda-2}(z)$ исчерпываются многочленами $W^{(2)}(z,\tau)$.

Схема доказательства этой теоремы теперь уже стандартна. Асимптотика (7) вместе с явной формулой (5) для $V_k^{(2)}(z)$ позволяет явно найти $\lim_{k\to\infty}V_k^{(2)}(z)$, $k\in\Lambda_\tau$, а следовательно и предел знаменателя $Q_{n,\lambda-2}(z)=V_{n+\lambda}^{(2)}(z)$ аппроксимации Паде для рациональной дроби $r(z)$. Применение подготовительной теоремы заканчивает доказательство. Заметим, что, как и в работе [1], можно было определить минус-дефект точки τ. При этом кратность нуля $z=0$ многочлена $W^{(2)}(z,\tau)$ совпадает с минус-дефектом. ▲

3 случай. Пусть $s_1=s_2+2$. Теперь асимптотика $\Delta_{k,m}$ имеет вид

$$\Delta_{k,m}=k^{2s_1-4}z_1^{2k+m}C_1\left[(m+1)(s_1-1)C_1+\sum_{\iota=2}^{\nu_2+1}C_\iota\left(\frac{z_\iota}{z_1}\right)^k\left(1-\frac{z_1}{z_\iota}\right)\left(1-\left(\frac{z_\iota}{z_1}\right)^{m+1}\right)+o(1)\right];$$

группа $\mathbf{F}_2$ определяется так же, как в предыдущем случае; и

$$S_m^{(2)}(\tau)=(m+1)(s_1-1)C_1 z_1^{m+1}+\sum_{i=2}^{\nu_2+1} C_i\tau_i\left(1-\frac{z_1}{z_i}\right)\left(z_1^{m+1}-z_i^{\,m+1}\right).$$

Для сумм $S_m^{(2)}(\tau)$ справедлив аналог предложения 1 (только длина последовательности теперь равна ν_2+1), так же определяется плюс-дефект $\delta_+^{(2)}(\tau)$, $0\le\delta_+^{(2)}(\tau)\le\nu_2$. Как и ранее, может быть доказана

Теорема 4. *Пусть* $\nu_1=1$, $s_1=s_2+2$, τ *– произвольная точка группы* $\mathbf{F}_2$, *а* Λ_τ *– соответствующая ей последовательность номеров. Пусть* $\delta_+^{(2)}$ *– плюс-дефект точки* τ.

Тогда для всех достаточно больших $n\in\Lambda_\tau-\lambda$ *знаменатель* $Q_{n,\lambda-2}(z)$ *аппроксимации Паде типа* $(n,\lambda-2)$ *для мероморфной функции* $a(z)$ *можно* $(\lambda-\delta_+^{(2)}-2)$*-нормировать и для последовательности нормированных многочленов* $Q_{n,\lambda-2}(z)$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} Q_{n,\lambda-2}(z)=\frac{1}{S_{\delta_+^{(2)}}^{(2)}(\tau)}\,\omega^{(2)}(z,\tau)\frac{D(z)}{(z-z_1)^2(z-z_2)\dots(z-z_{\nu_2+1})},$$

$n\in\Lambda_\tau-\lambda$, *где*

$$\omega^{(2)}(z,\tau)=C_1(s_1-1)z_1\Delta_1^{(2)}(z)+\sum_{j=2}^{\nu_2+1} C_j\tau_j\frac{(z_j-z_1)^2}{z_j}\Delta_j^{(2)}(z),$$

$$\Delta_j^{(2)}(z)=\frac{\Delta^{(2)}(z)}{z-z_j},\quad \Delta^{(2)}(z)=(z-z_1)\dots(z-z_{\nu_2+1}).$$

В частности, при $\nu_1=\nu_2=1$ *существует предел всей последовательности* $Q_{n,\lambda-2}(z)$ *равный* $\dfrac{D(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$.

Все возможные пределы сходящихся подпоследовательностей каким-либо образом нормированных $Q_{n,\lambda-2}(z)$ *исчерпываются многочленами* $W^{(2)}(z,\tau)$. ▲

Таким образом, асимптотика знаменателей $Q_{n,\lambda-2}(z)$ для одного доминирующего полюса первого уровня получена и в этом случае мы знаем все предельные точки полюсов аппроксимаций Паде. Как и в работе [1] мы можем теперь исследовать равномерную сходимость подпоследовательностей аппроксимаций Паде $\pi_{n,\lambda-2}(z)$, что в свою очередь позволяет найти множество, внутри которой предпоследняя промежуточная строка сходится равномерно.

Асимптотика знаменателя $Q_{n,\lambda-2}(z)$ для предпоследней промежуточной строки может быть исследована и в других случаях, которые мы здесь не рассматриваем, поскольку цель этой работы – продемонстрировать, что эффективность метода статьи [1] не ограничивается последней промежуточной строкой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 04-01-96006.

Литература

1.Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table// J. Approx. Theory – 2003. – V. 122. – P. 160–207.

2.Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

3.Sidi A. Quantitative and constructive aspects of the generalized Koenig's and de Montessus's theorems for Padé approximants// J. Comput. Appl. Math. – 1990. – V. 29. – P. 257–291.

4.Adukov V.M. Generalized inversion of block Toeplitz matrices// Linear Algebra Appl. – 1998. – V. 274. – P. 85–124.

Поступила в редакцию 24 сентября 2004 г.