УДК 512.64

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ–ЧЕБЫШЕВА

В.М. Адуков, О.Л. Ибряева

Изучена задача линейной аппроксимации Паде–Чебышева. Получено достаточное условие существования, единственности и устойчивости решения этой задачи.

1. Введение

В данной работе речь пойдет о линейных аппроксимациях Паде–Чебышева, являющихся одним из обобщений классических аппроксимаций Паде. Напомним, что аппроксимацией Паде типа (n,m) называется рациональная функция, разложение в ряд Тейлора которой совпадает с разложением аппроксимируемой функции до члена порядка $n+m$ включительно. Числителем этой дроби является многочлен формальной степени n, знаменателем – многочлен формальной степени m.

Это определение естественным образом обобщается на случай функций, разлагающихся в ряд по ортогональным многочленам.

Определение 1.1. Пусть функция $f(z)$ разложена в ряд по многочленам Чебышева $T_i(z)$: $f(z)=\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i T_i(z)=\frac{1}{2}a_0+a_1T_1(z)+a_2T_2(z)+\dots$.

Линейной аппроксимацией Паде–Чебышева типа (n,m) функции $f(z)$ называется рациональная дробь $R_{n,m}(z)=\frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$, где $P_{n,m}(z), Q_{n,m}(z)$ – многочлены, такие, что $\deg P_{n,m}(z)\le n$, $\deg Q_{n,m}(z)\le m$, $Q_{n,m}(z)\not\equiv 0$ и выполняется соотношение $Q_{n,m}(z)f(z)-P_{n,m}(z)=\sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_kT_k(z)$.

В дальнейшем мы будем опускать индексы n,m, поскольку всегда будем иметь дело с аппроксимацией Паде–Чебышева фиксированного типа (n,m).

Известно, что задача нахождения линейных аппроксимаций Паде–Чебышева сводится к задаче о структуре ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц.

В самом деле, воспользовавшись формулой для умножения многочленов Чебышева

$$T_i(z)T_j(z)=\frac{1}{2}\left(T_{i+j}(z)+T_{|i-j|}(z)\right), \text{ получаем } f(z)Q(z)=\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_iT_i(z)\sum_{j=0}^{m}{}' q_jT_j(z)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}{}'\sum_{j=0}^{m}{}' a_iq_j\left[T_{|i-j|}(z)+T_{i+j}(z)\right]=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}{}'\left[\sum_{j=0}^{m}{}' q_j(a_{i+j}+a_{|i-j|})\right]T_i(z).$$

Таким образом, для определения коэффициентов линейной аппроксимации Паде–Чебышева имеем следующие системы уравнений:

$$\sum_{j=0}^{m} q_j(a_{|i-j|}+a_{i+j})=0,\quad i=n+1,\dots,n+m, \tag{1}$$

$$1/2\sum_{j=0}^{m} q_j(a_{|i-j|}+a_{i+j})=p_i,\quad i=0,\dots,n. \tag{2}$$

Система однородных уравнений (1) позволяет определить коэффициенты знаменателя $Q(z)$ по данным коэффициентам ряда, затем уравнения (2) определяют коэффициенты числителя $P(z)$ по найденным коэффициентам знаменателя. Матрица системы (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{|n+1|}+a_{n+1} & a_{|n|}+a_{n+2} & \cdots & a_{|n-m+1|}+a_{n+m+1} \\ a_{|n+2|}+a_{n+2} & a_{|n+1|}+a_{n+3} & \cdots & a_{|n-m+2|}+a_{n+m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{|n+m|}+a_{n+m} & a_{|n+m-1|}+a_{n+m+1} & \cdots & a_{|n|}+a_{n+2m} \end{pmatrix}.$$

Так как ее размеры $m\times(m+1)$, то однородная система (1) всегда имеет ненулевое решение. Это означает, что линейная аппроксимация Паде–Чебышева всегда существует.

Для простоты, мы будем полагать $n\ge m-1$ (это означает, что мы рассматриваем только верхнюю часть таблицы Паде–Чебышева). Тогда модули у элементов только что приведенной матрицы можно отбросить и мы получим следующую теплиц-плюс-ганкелеву матрицу

$$S_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+1}+a_{n+1} & a_{n}+a_{n+2} & \cdots & a_{n-m+1}+a_{n+m+1} \\ a_{n+2}+a_{n+2} & a_{n+1}+a_{n+3} & \cdots & a_{n-m+2}+a_{n+m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+m}+a_{n+m} & a_{n+m-1}+a_{n+m+1} & \cdots & a_{n}+a_{n+2m} \end{pmatrix}.$$

Вектор, составленный из коэффициентов q_i разложения по многочленам Чебышева знаменателя $Q(z)$, принадлежит ядру этой матрицы. Коэффициенты p_i разложения числителя $P(z)$ по многочленам Чебышева находятся из условия (1.3) умножением матрицы

$$M=\begin{pmatrix} a_0+a_0 & a_1+a_1 & \cdots & a_m+a_m \\ a_1+a_1 & a_0+a_2 & \cdots & a_{m-1}+a_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_n & a_{n-1}+a_{n+1} & \cdots & a_{|n-m|}+a_{n+m} \end{pmatrix} \tag{4}$$

на вектор, составленный из коэффициентов q_i.

Задача нахождения линейной аппроксимации Паде–Чебышева является некорректной по Адамару. Действительно, эта задача сводится к задаче нахождения ядра матрицы и потому является неустойчивой. Кроме того, ее решение находится, вообще говоря, неединственным образом, так как знаменатель $Q(z)$ находится неединственным образом. Это приводит к тому, что при малых возмущениях $f(z)$ при нахождении знаменателя аппроксимации мы можем «перескочить» на знаменатель другой аппроксимации Паде–Чебышева и, соответственно, получить другую аппроксимацию. (Отметим, что для классических аппроксимаций Паде неединственность знаменателя также имеет место, но это не вызывает неединственности самой аппроксимации Паде.) Следующий пример и демонстрирует неустойчивость решения задачи линейной аппроксимации Паде–Чебышева, проистекающую из ее неединственности.

Пример. Найдем линейную аппроксимацию Паде–Чебышева типа (2,3) для функции, разложение по $T_k(x)$ которой имеет вид $f(x)=\frac{1}{2}T_0(x)+T_1(x)+T_2(x)+T_6(x)+T_7(x)+T_8(x)$. (Мы делаем это с помощью написанной нами в пакете Maple6 процедуры.)

Как оказывается, в данном случае решение этой задачи неединственно и мы имеем две различные аппроксимации, графики которых представлены ниже на рисунке. На этом же рисунке представлены линейные аппроксимации Паде–Чебышева для функции

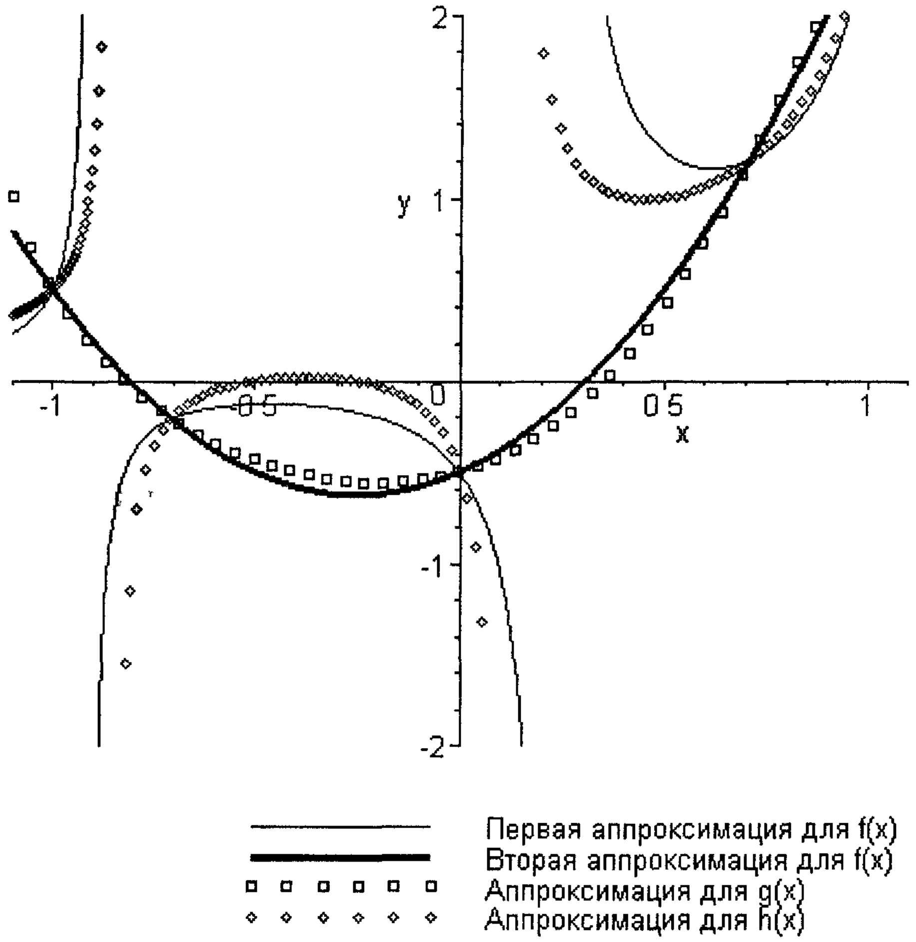
$$g(x)=\frac{1{,}0001}{2}T_0(x)+0{,}9999T_1(x)+1{,}00001T_2(x)+0{,}00001T_4(x)+$$
$$+0{,}00001T_5(x)+1{,}00001T_6(x)+0{,}9999T_7(x)+0{,}9999T_8(x)$$

и функции

$$h(x)=\frac{0{,}9999}{2}T_0(x)+0{,}9999T_1(x)+1{,}00001T_2(x)-0{,}00001T_4(x)-0{,}0001T_5(x)+1{,}00001T_6(x)+$$
$$+0{,}9999T_7(x)+0{,}9999T_8(x).$$

Эти функции, очевидно, являются малыми возмущениями функции $f(x)$. Однако для каждой из них ядро матрицы S_{n+1} оказывается одномерным и линейная аппроксимация – единственной.

Из рисунка видно, что линейная аппроксимация Паде–Чебышева для функции $g(x)$ близка ко второй линейной аппроксимации Паде–Чебышева для $f(x)$, а линейная аппроксимация Паде–Чебышева для функции $h(x)$ близка к первой аппроксимации для $f(x)$.



Итак, при малых возмущениях исходной функции мы получаем сильно отличающиеся линейные аппроксимации Паде–Чебышева. Это и показывает неустойчивость решения данной задачи. Приведенный пример показывает также, что перед рассмотрением вопроса устойчивости аппроксимаций, естественно сначала попытаться разобраться с их неединственностью.

Цель данной работы – выяснить причины неединственности линейной аппроксимации Паде–Чебышева и найти условия, при которых решение данной задачи будет единственно и устойчиво. То, что оно всегда существует, мы уже отмечали ранее.

2. Параметризация числителя и знаменателя линейной аппроксимации Паде–Чебышева

Причины неединственности линейной аппроксимации Паде–Чебышева становятся ясными после изучения структуры множества ее знаменателей. В свою очередь, эта задача приводится к изучению структуры ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц. Используемый нами подход основан на понятиях индексов и существенных многочленов и является обобщением метода статьи [1].

Чтобы изучить структуру ядра матрицы S_{n+1}, включим ее в семейство матриц $S_k = \| a_{i-j+k} + a_{n+1+i+j} \|_{\substack{i=0,1,\dots,n+m-k \\ j=0,1,\dots,k-n+m-1}}$, $n-m+1 \le k \le n+m$, и исследуем структуру ядер матриц S_k.

Матрицы S_k порождены последовательностью чисел $a_{n-m+1}^{n+2m} \equiv \{a_{n-m+1}, \dots, a_{n+2m}\}$, которые мы будем называть $T+H$ *последовательностью*. Иногда, чтобы указать, что S_k порождены конкретной $T+H$ последовательностью, мы также будем использовать обозначение $S_k(a_{n-m+1}^{n+2m})$.

Формула (2) показывает, что для нахождения и числителя и знаменателя линейной аппроксимации Паде–Чебышева требуется последовательность $a_0^{n+2m} \equiv \{a_0,\dots,a_{n+2m}\}$.

Для удобства перейдем от пространств $\ker S_k$ к изоморфным пространствам N_k производящих векторных многочленов.

Для описания структуры ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц нам предпочтительнее использовать производящие векторные многочлены по z^k, то есть вектору $(r_0\ r_1 \dots r_{k-n+m-1})^T$ из ядра матрицы S_k поставить в соответствие многочлен $r_0 + r_1 z + \dots + r_{k-m+m-1} z^{k-m+m-1}$ из пространства N_k.

Справедливо вложение $zN_k + (z+1)N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$ (см. [2]), в котором, за исключительными случаями, всегда стоит знак равенства. Номера k исключительных случаев мы называем *индексами* и обозначаем μ_i. Базис дополнения H_{μ_i+2} пространства $zN_{\mu_i} + (z+1)N_{\mu_i+1}$ до N_{μ_i+2} образуют так называемые *существенные многочлены*.

Ограничимся только регулярным случаем $T+H$ последовательности, когда матрицы S_{n-m+1}, S_{n-m+2}, S_{n+m-1}, S_{n+m} имеют полный ранг. Тогда мы имеем четыре индекса $\mu_1 \le .. \le \mu_4$, сумма которых равна $4n+4$, и четыре существенных многочлена $R_1(z),\dots,R_4(z)$, с помощью которых можно описать структуру ядер матриц из семейства S_k (см. [3]).

Элементы базиса пространств N_k могут быть записаны с помощью производящих многочленов по переменной z^k. Однако в задаче нахождения линейных аппроксимаций Паде–Чебышева (для описания структуры множества ее знаменателей и числителей) предпочтительнее использовать производящие функции по многочленам Чебышева. Для вектора $(r_0\ r_1 \dots r_{k-n+m-1})^T$ производящая функция по многочленам Чебышева имеет вид

$$r_0 T_0(z) + r_1 T_1(z) + \dots + r_{k-n+m-1} T_{k-n+m-1}(z).$$

Определим

$$Q_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z) = \sum_{i=0}^{m-k+\mu_j} R_i \left(T_{i+[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z) + T_{i+[\frac{k-\mu_j+1}{2}]}(z) \right), \qquad (5)$$

где R_i – коэффициенты вектора из ядра S_{μ_j+1}, образующего соответствующий существенный многочлен.

Тогда (см. [3]):

$$\left\{ T_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z) Q_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z),\ T_{[\frac{k-\mu_j}{2}]-1}(z) Q_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z),\ ..,\ T_1(z) Q_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z),\ Q_{[\frac{k-\mu_j}{2}]}(z) \right\}_{j=1}^{t} \qquad (6)$$

являются производящими функциями по $T_j(z)$ для элементов базиса $\ker S_{k+1}$.

Отсюда легко следует [3], что знаменатель $Q(z)$ линейной аппроксимации Паде–Чебышева представляется в виде

$$Q(z) = q_1(z) Q_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z) + q_2(z) Q_{[\frac{n-\mu_2}{2}]}(z) + q_3(z) Q_{[\frac{n-\mu_3}{2}]}(z). \qquad (7)$$

Здесь введены обозначения $q_1(z) = \sum_{i=0}^{[\frac{n-\mu_1}{2}]} \alpha_i T_i(z)$, $q_2(z) = \sum_{i=0}^{[\frac{n-\mu_2}{2}]} \beta_i T_i(z)$, $q_3(z) = \sum_{i=0}^{[\frac{n-\mu_3}{2}]} \gamma_i T_i(z)$, где числа $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – это произвольные параметры (коэффициенты разложения Q по элементам базиса (6) $\ker S_{n+1}$). Пустую сумму, как обычно, считаем равной нулю.

Аналогично, числитель $P(z)$ линейной аппроксимации Паде–Чебышева представляется в виде

$$P(z) = q_1(z) P_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z) + q_2(z) P_{[\frac{n-\mu_2}{2}]}(z) + q_3(z) P_{[\frac{n-\mu_3}{2}]}(z), \qquad (8)$$

где $P_{[\frac{n-\mu_j}{2}]}(z)$ – числитель аппроксимации, знаменателем которой является $Q_{[\frac{n-\mu_j}{2}]}(z)$, R_l – коэффициенты вектора из $\ker S_{\mu_j+1}$, образующего соответствующий существенный многочлен, а многочлены $q_1(z), q_2(z), q_3(z)$ те же, что и в представлении знаменателя (7).

Формулы (7), (8) и дают параметризацию множества знаменателей и числителей аппроксимации Паде–Чебышева. Заметим, что для классических аппроксимаций Паде аналогичное представление числителей и знаменателей содержит не три слагаемых, как в (7), (8), а только одно.

3. Достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде–Чебышева

Из предыдущего пункта мы знаем, что числитель и знаменатель линейной аппроксимации Паде–Чебышева представляются в виде суммы трех слагаемых. Это и является причиной ее неединственности. Установим достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде–Чебышева.

Для этого выделим случай $\mu_1 \le n < \mu_2$, когда последние две суммы в (7), (8) будут пустыми. Тогда представление числителя и знаменателя содержит только одно слагаемое и линейная аппроксимация Паде–Чебышева равна $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{P_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z)\sum_{l=0}^{[\frac{n-\mu_1}{2}]} \alpha_l T_l(z)}{Q_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z)\sum_{l=0}^{[\frac{n-\mu_1}{2}]} \alpha_l T_l(z)} = \dfrac{P_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z)}{Q_{[\frac{n-\mu_1}{2}]}(z)}$, т.е. определяется единственным образом.

Итак, мы получили следующее достаточное условие единственности.

Теорема 3.1. [3] *Если индексы последовательности a_{n-m+1}^{n+2m} удовлетворяют условию $\mu_1 \le n < \mu_2$, то решение задачи линейной аппроксимации Паде–Чебышева единственно.*

Замечание 3.1. Нетрудно проверить, что следующие условия равносильны: матрица $S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ имеет полный ранг и индексы последовательности a_{n-m+1}^{n+2m} принимают значения $\mu_1 = n$, $\mu_2 = \mu_3 = n+1$, $\mu_4 = n+2$. Таким образом, условие $\mu_1 \le n < \mu_2$ выполняется в случае общего положения (матрица S_{n+1} имеет полный ранг). Это означает, что, как правило, линейная аппроксимация Паде–Чебышева оказывается единственной.

4. Устойчивость

В случае аппроксимаций Паде и связанной с ними задачи о структуре ядра теплицевых матриц необходимым и достаточным условием устойчивости индексов μ_1, μ_2 оказывается условие $\mu_2 - \mu_1 \le 1$ [4].

В этом параграфе мы собираемся показать, что условие $\mu_4 - \mu_1 \le 2$ является достаточным для устойчивости индексов $T+H$ последовательности, что в свою очередь приводит к устойчивости аппроксимации Паде–Чебышева. Точнее, мы собираемся доказать, что справедлива следующая.

Теорема 4.1. *Если индексы последовательности a_{n-m+1}^{n+2m} удовлетворяют условию $\mu_4 - \mu_1 \le 2$, то решение задачи линейной аппроксимации Паде–Чебышева существует, единственно и устойчиво.*

Скорее всего, это условие является и необходимым. Мы в этой статье ограничимся пока только доказательством достаточности.

Утверждение теоремы о существовании решения этой задачи не вызывает сомнений и уже отмечалось ранее.

Прежде, чем перейти к доказательству остальной части теоремы, приведем несколько лемм и предложений, которые будут нам полезны.

Всюду далее для матриц из $C^{k\times l}$ мы будем использовать максимальную столбцовую норму: $\| A\| = \max\limits_{1\le j\le l}\sum\limits_{i=1}^{k}|A_{ij}|$. Для числовой последовательности $a_M^N=\{a_M,a_{M+1},\dots,a_N\}$ введем $\| a_M^N\| = \sum\limits_{i=M}^{N}|a_i|$. Эту же норму будем использовать для производящего многочлена как по z^k, так и по $T_k(z)$ этой последовательности.

Предложение 4.1. *Если для индексов $T+H$ последовательности a_{n-m+1}^{n+2m}, возникающей в задаче нахождения знаменателя линейной аппроксимации Паде–Чебышева типа (n,m), выполняется условие*

$$\mu_4-\mu_1\le 2, \tag{9}$$

то индексы являются устойчивыми.

Пусть условие (9) выполнено. Тогда на самом деле $\mu_4-\mu_1=2$, и индексы принимают значения $\mu_1=n, \mu_2=\mu_3=n+1, \mu_4=n+2$.

Доказательство. Пусть для индексов $T+H$ последовательности, возникающей в задаче нахождения знаменателя линейной аппроксимации Паде–Чебышева типа (n,m), выполняется условие $\mu_4-\mu_1\le 2$.

Очевидно, что $\mu_4-\mu_1\ne 0$. Действительно, если бы это условие выполнялось, то все индексы были бы равны $n+1$. Это, в частности, означает, что $\dim\ker S_{n+1}=0$. С другой стороны, $\dim\ker S_{n+1}=m+1-\operatorname{rank} S_{n+1}$. Тогда $\operatorname{rank} S_{n+1}=m+1$, что невозможно, так как у этой матрицы всего m строк.

Значит, остаются возможными случаи $\mu_4-\mu_1=1$ и $\mu_4-\mu_1=2$.

Рассмотрим случай $\mu_4-\mu_1=1$. *A priori* возможны следующие значения индексов:

1. $\mu,\mu,\mu,\mu+1$, 2. $\mu,\mu,\mu+1,\mu+1$, 3. $\mu,\mu+1,\mu+1,\mu+1$.

Сумма всех индексов должна быть равна $4n+4$. Подсчитывая сумму индексов в каждом случае, убеждаемся, что это невозможно. Значит, остается лишь случай $\mu_4-\mu_1=2$.

В этом случае *a priori* возможны следующие значения индексов:

1. $\mu,\mu,\mu,\mu+2$, 2. $\mu,\mu,\mu+1,\mu+2$, 3. $\mu,\mu,\mu+2,\mu+2$,
4. $\mu,\mu+1,\mu+1,\mu+2$, 5. $\mu,\mu+1,\mu+2,\mu+2$, 6. $\mu,\mu+2,\mu+2,\mu+2$.

Из выражения для суммы индексов сразу следует, что случаи 1, 2, 5, 6 невозможны. Случаи 3 и 4 теоретически остаются возможными для значения $\mu=n$. Однако случай 3 все же не осуществляется.

Действительно, в этом случае индексы принимают значения $n,n,n+2,n+2$. Это, в частности, означает, что $\dim\ker S_{n+2}=2$. Тогда ранг этой матрицы равен m. Но это невозможно, так как матрица S_{n+2} имеет размеры $(m-1)\times(m+2)$.

Таким образом, если $\mu_4-\mu_1\le 2$, то индексы принимают значения $n,n+1,n+1,n+2$. Докажем, что такие индексы будут устойчивыми.

Из определения индексов следует, что матрица S_n обратима слева и S_{n+2} обратима справа.

Пусть $\tilde f(z)=f(z)+\varepsilon(z)$, где $\varepsilon(z)$ – малое возмущение аппроксимируемой функции $f(z)$. Пусть $\tilde a_0^{n+2m}$ – возмущенная a_0^{n+2m} последовательность, возникающая в задаче линейной аппроксимации Паде–Чебышева типа (n,m) этой функции $\tilde f(z)$. Тогда матрица $S_n(\tilde a_{n-m+1}^{n+2m})$ достаточно близка по норме к $S_n\equiv S_n(a_{n-m+1}^{n+2m})$, а матрица $S_{n+2}(\tilde a_{n-m+1}^{n+2m})$ к $S_{n+2}(a_{n-m+1}^{n+2m})$.

Тогда, в силу устойчивости свойства односторонней обратимости при малых возмущениях, матрица $S_n(\tilde a_{n-m+1}^{n+2m})$ обратима слева и $S_{n+2}(\tilde a_{n-m+1}^{n+2m})$ обратима справа. Значит, индексы возмущенной последовательности:

$$n \le \tilde{\mu}_1 \le \tilde{\mu}_2 \le \tilde{\mu}_3 \le \tilde{\mu}_4 \le n+2.$$

Докажем, что $\tilde{\mu}_1 = n$, $\tilde{\mu}_4 = n+2$. Из выражения для суммы индексов следует, что $\tilde{\mu}_1 \le n+1$. Предположим, $\tilde{\mu}_1 = n+1$, тогда $\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = n+1$, что невозможно, следовательно, $\tilde{\mu}_1 = n$. Аналогично, $\tilde{\mu}_4 = n+2$. Тогда $\tilde{\mu}_4 - \tilde{\mu}_1 \le 2$ и, по ранее доказанной части теоремы, индексы возмущенной последовательности равны $n, n+1, n+1, n+2$.

Итак, мы показали, что в случае $\mu_4 - \mu_1 \le 2$ индексы принимают значения $n, n+1, n+1, n+2$ и являются устойчивыми. Предложение доказано.

Из только что доказанного предложения 4.1 и теоремы 3.1 сразу получается

Следствие 4.1. Если $\mu_4 - \mu_1 \le 2$, то линейная аппроксимация Паде–Чебышева определяется единственным образом.

Утверждение теоремы 4.1 об единственности решения задачи линейной аппроксимации Паде–Чебышева также доказано. Перейдем к вопросу ее устойчивости.

Пусть $\tilde{f}(z) = f(z) + \varepsilon(z)$. Тогда последовательность $\tilde{a}_0^{n+2m}$, составленная из коэффициентов разложения в ряд по многочленам Чебышева функции $\tilde{f}(z)$, будет являться возмущением последовательности a_0^{n+2m}. Матрица $S_{n+1}(\tilde{a}_{n+m-1}^{n+2m})$, как и матрица $S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ также имеет полный ранг и одномерное ядро (в силу устойчивости свойства односторонней обратимости при малых возмущениях).

Как уже отмечалось в предложении 4.1, индексы устойчивы и, следовательно, совпадают для возмущенной и невозмущенной $T+H$ последовательности. Значит, решение задачи линейной аппроксимации типа (n,m) для функции $\tilde{f}(z)$ также существует и единственно.

Докажем устойчивость задачи линейной аппроксимации Паде–Чебышева, т.е., что при достаточно малых возмущениях $\varepsilon(z)$ линейные аппроксимации $\frac{P}{Q}$ для функции $f(z)$ и $\frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$ для функции $\tilde{f}(z)$ будут близки. Для этого докажем сначала устойчивость знаменателя аппроксимации Паде–Чебышева, затем ее числителя, и, наконец, устойчивость и самой аппроксимации.

Нам потребуются две леммы.

Лемма 4.1. (см., например, [5]) *Пусть A – обратимый справа оператор, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2. Пусть $A^\dagger$ – любой правосторонний обратный к A и $P_A = I - A^\dagger A$ – проектор на $\ker A$.*

Тогда для любого оператора B, удовлетворяющего неравенству $\|A-B\| < \frac{1}{2\|A^\dagger\|}$, справедливо: B – обратимый справа оператор и $B^\dagger = C^{-1}A^\dagger$ – правый обратный к B. Здесь $C = I - A^\dagger(A-B)$, $C^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(A^\dagger(A-B)\right)^j$.

Для проектора $P_B = I - B^\dagger B = C^{-1}P_A C$ на $\ker B$ выполняется следующее неравенство: $\|P_A - P_B\| \le \mathrm{const}\|A-B\|$.

Лемма 4.2. *Пусть a_{n-m+1}^{n+2m} – некоторая $T+H$ последовательность с индексами $n, n+1, n+1, n+2$. Тогда первый существенный многочлен $R_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_m z^m$ этой последовательности имеет отличный от нуля коэффициент α_d тогда и только тогда, когда матрица $S_{n+1,d+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$, полученная из $S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ вычеркиванием $(d+1)$-го столбца, обратима. Пусть это условие выполнено. Пронормируем $R_1(z)$ таким образом, чтобы $\alpha_d = 1$. Полученный многочлен будем называть d-нормированным. Тогда матрица*

$$P_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})=\begin{pmatrix}0 & \dots & \alpha_0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & \alpha_1 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & \alpha_m & \dots & 0\end{pmatrix},$$

где отличен от нуля лишь столбец с номером $d+1$, *является матрицей проектора на* $\ker S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$. *При этом* $P_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})=I_{m+1}-S_{n+1}^{\dagger}(a_{n-m+1}^{n+2m})S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$.

Здесь $S_{n+1}^{\dagger}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ *– правосторонняя обратная к* $S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$, *полученная из матрицы* $S_{n+1,d+1}^{-1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ *добавлением нулевой строки на место с номером* $d+1$.

Доказательство этой леммы незначительно отличается от доказательства аналогичного факта, приведенного в [6], и потому опущено.

Предложение 4.2. *Если для индексов* $T+H$ *последовательности* a_{n-m+1}^{n+2m}, *возникающей в задаче нахождения знаменателя линейной аппроксимации Паде–Чебышева типа* (n,m), *выполняется условие* $\mu_4-\mu_1\le 2$, *то знаменатель линейной аппроксимации Паде–Чебышева является устойчивым.*

Доказательство. Докажем вначале близость первых существенных многочленов $R_1(z)$ и $\tilde{R}_1(z)$ последовательностей a_{n-m+1}^{n+2m} и $\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m}$.

По d-нормированному первому существенному многочлену $R_1(z)$ составим проектор $P_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$ на ядро матрицы $S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$. В силу близости a_0^{n+2m} и $\tilde{a}_0^{n+2m}$ последовательностей матрицы $S_{n+1,d+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$, $S_{n+1,d+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$ из леммы 4.2 будут достаточно близки, значит матрица $S_{n+1,d+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$ будет также обратима и, следовательно, многочлен $\tilde{R}_1(z)$ будет также иметь ненулевой коэффициент $\tilde{\alpha}_d$.

Применим теперь лемму 4.1.

Положим $A=S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$, $B=S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$ и $A^{\dagger}=S_{n+1}^{\dagger}(a_{n-m+1}^{n+2m})$. Тогда $P_A=P_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})$. Очевидно, что $\left\|S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})\right\|\le 2\left\|a_{n-m+1}^{n+2m}\right\|\le 2\left\|a_0^{n+2m}\right\|$. Тогда $\left\|S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m}-\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})\right\|\le 2\left\|a_0^{n+2m}-\tilde{a}_0^{n+2m}\right\|$ и при достаточно малых возмущениях условие $\|A-B\|<\dfrac{1}{2\|A^{\dagger}\|}$ леммы 4.1. выполнено.

Докажем, что проектор P_B, построенный в этой лемме, совпадает с $P_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$. Для этого уточним структуру матриц C и C^{-1}.

Так как $C=I_{m+1}-S_{n+1}^{\dagger}(a_{n-m+1}^{n+2m})S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m}-\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$, то, поскольку $\left[S_{n+1}^{\dagger}(a_{n-m+1}^{n+2m})\right]_{d+1}$ – нулевая строка, получаем, что $(d+1)$-я строка матрицы C имеет вид $[C]_{d+1}=\begin{pmatrix}0\dots0 & \overset{d+1}{1} & 0\dots0\end{pmatrix}$. Ясно, что тот же вид имеет $(d+1)$-я строка матрицы $C^{-1}=I_{m+1}+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left(S_{n+1}^{\dagger}(a_{n-m+1}^{n+2m})S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m}-\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})\right)^{j}$.

Но тогда $P_B=C^{-1}P_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})C=\begin{pmatrix}0 & \dots & * & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & * & \dots & 0\end{pmatrix}$.

Здесь только $(d+1)$-й столбец является ненулевым и 1 стоит в $(d+1)$-й строке.

Так как P_B – проектор на $\ker S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$, то его $(d+1)$-й столбец принадлежит $\ker S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$, то есть совпадает с d-нормированным многочленом $\tilde{R}_1(z)$. Это означает, что $P_B = P_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})$.

Тогда получаем, что

$$\left\|R_1(z)-\tilde{R}_1(z)\right\| = \left\|P_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m}) - P_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m})\right\| \le$$

$$\text{const}\left\|S_{n+1}(a_{n-m+1}^{n+2m}) - S_{n+1}(\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m})\right\| \le \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|.$$

Близость первых существенных многочленов последовательностей a_{n-m+1}^{n+2m} и $\tilde{a}_{n-m+1}^{n+2m}$ доказана. Построим по многочленам $R_1(z)$, $\tilde{R}_1(z)$, а точнее по их коэффициентам R_{1_t}, $\tilde{R}_{1_t}$ (см. (5)), знаменатели $Q(z) \equiv Q_0(z)$ и $\tilde{Q}(z) \equiv \tilde{Q}_0(z)$. Покажем, что и они будут близки.

Действительно,

$$\left\|Q(z)-\tilde{Q}(z)\right\| = \left\|\sum_{t=0}^{m} 2\left(R_{1_t} - \tilde{R}_{1_t}\right)T_t(z)\right\| = 2\left\|R_1(z)-\tilde{R}_1(z)\right\| \le \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|. \tag{10}$$

Предложение доказано.

Предложение 4.3. *Если для индексов $T+H$ последовательности a_{n-m+1}^{n+2m}, возникающей в задаче нахождения знаменателя линейной аппроксимации Паде–Чебышева типа (n,m), выполняется условие $\mu_4 - \mu_1 \le 2$, то числитель линейной аппроксимации Паде–Чебышева является устойчивым.*

Доказательство. Числители $P, \tilde{P}$ получаются с помощью умножения векторов, составленных из коэффициентов знаменателей Q, $\tilde{Q}$ на матрицы $M, \tilde{M}$ (см. (4)). Легко видеть, что $\left\|M-\tilde{M}\right\| \le 3\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|$.

Тогда $\left\|P-\tilde{P}\right\| = \left\|MQ-\tilde{M}\tilde{Q}\right\| = \left\|MQ - M\tilde{Q} + M\tilde{Q} - \tilde{M}\tilde{Q}\right\| \le \left\|M\right\|\left\|Q-\tilde{Q}\right\| + \left\|\tilde{Q}\right\|\left\|M-\tilde{M}\right\|$.

В силу (10) имеем $\left\|\tilde{Q}\right\| \le \left\|Q\right\| + \left\|\tilde{Q}-Q\right\| \le \left\|Q\right\| + \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|$ и, при достаточно малом возмущении последовательности a_0^{n+2m}, получаем $\left\|\tilde{Q}\right\| < \frac{3}{2}\left\|Q\right\|$.

Тогда $\left\|P-\tilde{P}\right\| \le \text{const}\left\|M\right\|\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\| + \dfrac{9}{2}\left\|Q\right\|\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\| = \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|$.

Теперь мы можем доказать и устойчивость самих аппроксимаций.

Оценим $\left\|\dfrac{P}{Q} - \dfrac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}\right\| = \left\|\dfrac{P\tilde{Q} - Q\tilde{P}}{Q\tilde{Q}}\right\| = \left\|\dfrac{P\tilde{Q} - PQ + PQ - Q\tilde{P}}{Q\tilde{Q}}\right\| \le \dfrac{\left\|P\right\|}{\left\|Q\right\|\left\|\tilde{Q}\right\|}\left\|\tilde{Q}-Q\right\| + \dfrac{\left\|P-\tilde{P}\right\|}{\left\|\tilde{Q}\right\|}$.

В силу (10), при достаточно малых возмущениях последовательности a_0^{n+2m}, имеем $\dfrac{1}{\left\|\tilde{Q}\right\|} \le \dfrac{1}{\left\|Q\right\| - \left\|\tilde{Q}-Q\right\|} \le \dfrac{1}{\left\|Q\right\| - \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|} < \dfrac{2}{\left\|Q\right\|}$.

Тогда $\left\|\dfrac{P}{Q} - \dfrac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}\right\| < \dfrac{2\left\|P\right\|}{\left\|Q\right\|^2}\left\|\tilde{Q}-Q\right\| + \dfrac{2\left\|P-\tilde{P}\right\|}{\left\|Q\right\|} \le \text{const}\left\|a_0^{n+2m} - \tilde{a}_0^{n+2m}\right\|$.

Теперь теорема 4.1 полностью доказана.

Заключение

В статье получено достаточное условие существования, единственности и устойчивости решения задачи линейной аппроксимации Паде–Чебышева в терминах существенных индексов $T+H$ последовательности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 04-01-96006. О.Л. Ибряева также благодарит за финансовую поддержку Министерство образования и Правительство Челябинской области, грант № 003.01.06-04.БМ.

Литература

1. Adukov V.M. Generalized Inversion of Block Toeplitz Matrices// Linear Algebra and Its Applications. – 1998. – V. 274. – P. 85–124.

2. Адуков В.М., Ибряева О.Л. О структуре ядра теплиц-плюс-ганкелевых матриц // Вестник ЮУрГУ, Серия «Математика, физика, химия». – 2001. – № 7. – С. 3–12.

3. Ибряева О.Л. Достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде–Чебышева // Известия Челябинского научного центра. – 2002. – Вып. 4(17) – С. 1–5.

4. Heinig G., Jankowski P. Kernel structure of Block Hankel and Toeplitz Matrices and Partial Realization// Linear Algebra and Its Applications. – 1992. – V. 175. – C. 1–30.

5. Litvinchuk G.S., Spitkovski I.M. Factorization of measurable matrix functions. – Berlin.: Akademie-Verlag, 1987. – 372 p.

6. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Pade table // J. Approx. Theory. – 1997. – V. 88. – P. 354–369.

Поступила в редакцию 20 сентября 2004 г.