УДК 517.957:539.374

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В.Л. Дильман

В работе при некоторых допущениях получены приближенные математические модели напряженного состояния поперечной пластически деформируемой мягкой прослойки цилиндрического образца, в форме краевых задач для систем уравнений гиперболического типа, в том числе с постоянными на характеристиках римановыми инвариантами, что позволяет перенести метод характеристик на некоторые случаи осесимметричной деформации неоднородных сред.

1. Введение. Задачи, приводящие к осесимметричному напряженно-деформированному состоянию (НДС), возникают при экспериментальном исследовании свойств материалов (растяжение и сжатие стержневых цилиндрических образцов, деформирование под действием осевой силы и внутреннего давления трубчатых образцов), при изучении НДС поперечных прослоек (мягких и твердых) в таких образцах и при исследовании шейки. Известные точные решения [1, 2] относятся к гипотетическим состояниям и практически бесполезны в реально возникающих задачах. Попытки получения приближенных решений [3–5] основаны на использовании упрощающих условий и допущений (нередко противоречащих друг другу [5]) инженерного характера и не содержат анализа допускаемых ошибок. Существенной трудностью исследования осесимметричного НДС является негиперболичность соответствующей системы уравнений [1]. Однако и в ряде частных случаев, когда система уравнений гиперболична, инварианты Римана не постоянны на характеристиках, а их дифференциалы вдоль последних зависят от искомых функций, что не позволяет получить метод характеристик, аналогичный методу решения плоских задач теории пластичности [6]. Один из путей преодоления указанной трудности – замена системы уравнений НДС пластической среды на приближенную на основе некоторых физических гипотез, соответствующих изучаемой ситуации, и математического анализа априорных свойств решений.

В работе рассматривается НДС мягкой поперечной прослойки в сплошном цилиндрическом образце под осевой нагрузкой. Цель работы – получение и исследование упрощенных систем уравнений пластического равновесия материала прослойки и материала твердой части образца вблизи прослойки. На основе этого исследования можно судить о развитии напряженного состояния в прослойке и прилежащих к ней участках с ростом нагрузки вплоть до потери несущей способности образца.

В работе под прослойкой понимается участок цилиндрического образца, расположенный между двумя ортогональными оси образца плоскостями. Предполагается, что материал прослойки (П) и основной металл (ОМ) образца идеально упругопластичный с идентичными упругими свойствами, но разными пределами текучести: $k^{п}$ и $k^{ом}$ соответственно, $k^{п} < k^{ом}$, причем выполняются обычные в таких случаях допущения [6]. $K = k^{п} / k^{ом}$, коэффициент механической неоднородности, полагается ненамного большим единицы ($K = 1,05...1,50$). Такой диапазон значений K наиболее характерен для сварных соединений. В качестве уравнения пластичности принято условие Мизеса. Полученные результаты переносятся на упрочняемые материалы (с изотропным упрочнением) заменой в условии полной пластичности пределов текучести на пластические постоянные, характеризующие моменты потери пластической устойчивости металлом слоя и основным металлом [7].

2. Гипотеза плоских сечений. НДС пластической среды, как известно [1; 6], при осесимметричной деформации определяется в предположениях теории течения системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0; \tag{2}$$

$$(\sigma_r-\sigma_\varphi)^2+(\sigma_\varphi-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6\tau_{rz}^2=6; \tag{3}$$

$$\frac{\dfrac{\partial v_r}{\partial r}-\dfrac{v_r}{r}}{\sigma_r-\sigma_\varphi}=\frac{\dfrac{\partial v_z}{\partial z}-\dfrac{\partial v_r}{\partial r}}{\sigma_z-\sigma_r}=\frac{\dfrac{\partial v_r}{\partial z}+\dfrac{\partial v_z}{\partial r}}{2\tau_{rz}}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \tag{5}$$

Здесь под σ_r, σ_φ, σ_z и τ_{rz} понимаются безразмерные аналоги радиального, кольцевого, осевого нормальных напряжений и радиально-осевого касательного напряжения, полученные из соответствующих напряжений делением на предел текучести; v_r, v_φ и v_z – условные скорости перемещений (определяются с точностью до постоянного множителя). Система (1)–(5) содержит шесть независимых уравнений относительно шести неизвестных и, в этом смысле, замкнута. Рассматривая прослойку, носителем этой системы считаем прямоугольник ABB_1A_1: $r\in[-1;1]$, $z\in[\chi;\chi]$, – осевое сечение прослойки. Здесь χ – относительная толщина прослойки, то есть отношение ее толщины к диаметру. Сторона AA_1 пусть лежит на свободной поверхности, AB – на контактной, BB_1 – на другой свободной поверхности.

Помимо очевидных граничных условий

$$\sigma_r(1,z)=0,\ \tau_{rz}(1;z)=0,\ \tau_{rz}(0;z)=0,\ \tau_{rz}(r;0)=0 \tag{6}$$

(считаем внешнее давление отсутствующим), можно еще найти (в принципе, как функцию достигнутой внешней нагрузки) наибольшее на контактной поверхности $z=\chi$ значение α $(0<\alpha\le 1)$ касательных напряжений в каждый момент нагружения:

$$\max|\tau_{rz}|=\alpha,\ r\in[0;1], \tag{7}$$

Фактически α характеризует отклонение напряженного состояния прослойки от простого под действием внешней нагрузки и, тем самым, уровень достигнутой внешней нагрузки. Его максимальное значение α^* определяется НДС всего соединения, в том числе тем, произойдет ли вовлечение ОМ в пластическое деформирование, и зависит количественно от коэффициента механической неоднородности K. Граничных условий (6) и (7) недостаточно для однозначного решения системы (1)–(5), поэтому необходимо привлечение дополнительных гипотез, предугадывающих внутреннее состояние материала. Для не очень толстой мягкой прослойки ($\chi=0{,}1...0{,}7$), в силу сдерживающего влияния ОМ, можно предположить, что в каждой точке прослойки скорость перемещения в направлении оси образца не зависит от расстояния до оси:

$$v_z=W(z), \tag{8}$$

где W – неизвестная функция одной переменной. Это предположение назовем гипотезой плоских сечений (ГПС).

Лемма 1. Равносильны утверждения:

1) Выполняется ГПС;

2) $\xi_r=\xi_\varphi$;

3) $\sigma_r=\sigma_\varphi$.

Здесь $\xi_r=\dfrac{\partial v_r}{\partial r}$, $\xi_\varphi=\dfrac{v_r}{r}$ – радиальные и кольцевые скорости деформации. Из леммы 1 легко следует

Лемма 2. При выполнении ГПС система (1)–(5) приобретает вид (знак плюс в уравнении (11) соответствует растяжению, знак минус – сжатию):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}=0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=-\frac{\tau_{rz}}{r}; \tag{10}$$

$$\sigma_z - \sigma_r = \pm\sqrt{3}\sqrt{1-\tau_{rz}^2}\ ; \tag{11}$$

$$\frac{3W'(z)}{\sigma_z - \sigma_r} = -\frac{rW''(z)}{2\tau_{rz}}\ ; \tag{12}$$

$$v_r = -rW'(z)/2\ . \tag{13}$$

Система уравнений (9)–(13) является математической моделью НДС пластической прослойки при осесимметрической деформации и гипотезе плоских сечений (8).

Следствия. 1. При выполнении ГПС задача становится квазистатически определимой, так как система (9)–(11) содержит три уравнения относительно трех неизвестных напряжений, то есть замкнута в напряжениях.

2. При выполнении ГПС система (9)–(13), и поэтому система (1)–(5), имеют гиперболический тип. Действительно, система (9)–(11) сводится к системе из двух уравнений (рассматривается случай растяжения)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0\ ; \tag{14}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} - \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{\tau_{rz}}{r}\ ; \tag{15}$$

причем собственные числа матрицы этой системы действительны и различны.

3. Система (14), (15) не является однородной относительно частных производных, поэтому инварианты Римана [8] не постоянны вдоль характеристик. Это обстоятельство требует дальнейшего упрощения системы уравнений пластического равновесия (14), (15).

3. Моделирование однородной системы уравнений пластического равновесия. Введем обозначение $Z(z) = -\sqrt{3}W''(z)\left(6W'(z)\right)^{-1}$. Из (12) и (11) следует

$$\tau_{rz} = t\big/\sqrt{1+t^2}\ ,\ t = tZ(z)\ . \tag{16}$$

Если в разложении

$$t\big/\sqrt{1+t^2} = t - t^3/2 + 3t^5/8 - \dots\ |t| < 1$$

ограничиться только первым членом, ошибка в формуле

$$\tau_{rz} = t = rZ(z)\ . \tag{17}$$

составит, например, при $\alpha = 1/4$ около 3 %. При больших значениях α лучше зависимость (16) аппроксимировать степенной функцией

$$\tau_{rz} = bt^a = br^a Z^a(z),\ \ 0 < a < 1\ . \tag{18}$$

Временно обозначим

$$f(t) = t\big/\sqrt{1-t^2}\ ,\ \ g(t) = bt^a\ . \tag{19}$$

Так как наибольшая точность аппроксимации требуется в окрестности свободной поверхности прослойки, где функцию $f(t)$, в силу (19), (16) и (7), принимает значение α, как нетрудно подсчитать, при значении аргумента $t = \beta = \alpha(1-\alpha^2)^{-0,5}$, для нахождения параметров a и b функции $g(t)$ (19), положим $f(\beta) = g(\beta)$, $f'(\beta) = g'(\beta)$. Решая эту систему, получаем

$$a = 1-\alpha^2,\ \ b = \sqrt{1-\alpha^2}\left(\alpha\big/\sqrt{1-\alpha^2}\right)^{\alpha^2}\ . \tag{20}$$

Заметим, что при аппроксимации касательных напряжений τ_{rz} по формулам (17) и (18)

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = a\frac{\tau}{r}\ , \tag{21}$$

причем $a = 1$ в случае (17). Заменив правую часть в (15) по формуле (21), получим в качестве приближенной математической модели напряженного состояния пластичной прослойки систему, состоящую из уравнения (14) и уравнения

$$\frac{a+1}{a}\frac{\partial\tau}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{\sqrt{3}\,\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial\tau}{\partial z}=0. \tag{22}$$

В нормальной матричной форме система (14), (22) имеет вид

$$\frac{\partial\bar\sigma}{\partial r}+A\frac{\partial\bar\sigma}{\partial z}=\bar 0, \tag{23}$$

где $\bar\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_r\\ \tau\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{a}{a+1} & -\dfrac{\sqrt{3}\,a\tau}{(a+1)\sqrt{1-\tau^2}}\end{pmatrix}$, $\bar 0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, и является упрощенной приближенной математической моделью для напряженного состояния пластического слоя в случае осесимметричной деформации. Собственные числа матрицы A вычисляются по формулам

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\sqrt{3}a\tau\pm\sqrt{4a(a+1)-a(a+4)\tau^2}}{2(a+1)\sqrt{1-\tau^2}}. \tag{24}$$

При $a=1$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\sqrt{3}\tau\pm\sqrt{8-5\tau^2}}{4\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dz}{dr}=\lambda_i,\ i=1;2, \tag{25}$$

со знаком плюс в (24) – ξ-характеристики (пусть это будет λ_1), со знаком минус – η-характеристики. Угол γ наклона ξ-характеристики к оси Or зависит от значения τ в точке вычисления: $\operatorname{tg}\gamma=\lambda_1$.

Собственные векторы, соответствующие собственным значениям (24), имеют вид $\bar l_i=(1;\lambda_i)$, $i=1;2$. В характеристической форме [8] система (23) записывается в виде

$$\bar l_i\left(\frac{\partial\bar\sigma}{\partial r}+\lambda_i\frac{\partial\bar\sigma}{\partial z}\right)=0,\ i=1;2,$$

а в инвариантной форме [8]

$$\frac{\partial I_i}{\partial r}+\lambda_i\frac{\partial I_i}{\partial z}=0,\ i=1;2, \tag{26}$$

$$I_i=\sigma_r+\mu_i,\ i=1;2, \tag{27}$$

где $\mu_i=\mu_i(\tau)$ – произвольная первообразная функции λ_i $(i=1;2)$. На характеристиках уравнения (26) запишутся в виде

$$\frac{dI_i}{dr}=0,\ i=1;2,$$

где дифференцирование ведется в направлении характеристик. Следовательно, инварианты Римана I_i (27) постоянны на характеристиках:

$$I_i=\sigma_r+\mu_i=\mathrm{const},\ i=1;2. \tag{28}$$

Можно считать, в силу (24),

$$\mu_i=-\frac{\sqrt{3}}{2(a+1)}\int_0^\tau\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\pm\sqrt{\frac{a}{a+1}}\int_0^\tau\frac{\sqrt{1-\dfrac{a+4}{4(a+1)}\tau^2}}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2(a+1)}\left(\sqrt{1-\tau^2}-1\right)\pm\sqrt{\frac{a}{a+1}}E\left(\arcsin\tau;\sqrt{\frac{a+4}{4(a+1)}}\right), \tag{29}$$

где через $E(\varphi;m)$ обозначен эллиптический интеграл второго рода [9]. Здесь $\varphi = \arcsin\tau$, $m = 0{,}5\sqrt{(a+4)/(a+1)}$.

Пусть CA и CA_1 – ξ- и η-характеристики, выходящие на свободную поверхность AA_1 в угловых точках сечения прослойки A и A_1; C – точка их пересечения. По условию (6), $\sigma_r = 0$ и $\tau_{rz} = 0$ на поверхности AA_1, поэтому для любой точки D внутри или на границе треугольника ACA_1, в силу (28),

$$\sigma_r(D) + \mu_i(D) = 0, \quad i = 1;2.$$

Из (29) легко вывести, что $\tau(D) = 0$ и $\sigma_r(D) = 0$; тогда по (11), $\sigma_z(D) = \sqrt{3}$. Таким образом, в треугольнике ACA_1 реализуется равномерное напряженное состояние, причем в этом треугольнике, в силу (24), $\lambda_{1,2} = \sqrt{a/(a+1)}$, а уравнения характеристик (25) имеют вид

$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{a/(a+1)},$$

откуда

$$z = \pm\sqrt{a/(a+1)}\; r + c$$

(плюс у ξ-характеристик). В частности, расстояние от точки C – вершины треугольника равномерного напряженного состояния, – до свободной поверхности AA_1 равно $\sqrt{(a+1)/a}\,\chi$, а угол наклона ξ-характеристики в треугольнике ACA_1

$$\gamma = \operatorname{arctg}\sqrt{a/(a+1)}.$$

4. Случай малых касательных напряжений. При значениях α порядка нескольких десятых можно найти несложные приближенные аналитические выражения для функций ν_i и, как следствие, для напряжений и уравнений характеристик. Используя разложение в степенной ряд степени бинома [9], получаем по формуле (29)

$$\mu_i \approx \pm\sqrt{\frac{a}{a+1}}\,\tau - \frac{\sqrt{3}}{4(a+1)}\tau^2$$

причем относительная ошибка в этом приближенном равенстве оценивается величиной $0{,}125a(a+1)^{-1}\tau^2$ и при $a = 1$ и $\alpha \le 0{,}3$ имеет порядок 0,6 %, а при $\alpha \le 0{,}5$ – около 1,5 % (при $a < 1$ погрешность еще меньше). Вдоль характеристик инварианты Римана постоянны и имеют вид

$$\sigma_r \pm \sqrt{\frac{a}{a+1}}\,\tau - \frac{\sqrt{3}}{4(a+1)}\tau^2 = \text{const}.$$

Отсюда следует, что во всех точках η-характеристики, выходящей на свободную поверхность,

$$\sigma_r \cong \sqrt{\frac{a}{a+1}}\,\tau + \frac{\sqrt{3}}{4(a+1)}\tau^2, \quad \sigma_z \cong \sqrt{\frac{a}{a+1}}\,\tau - \frac{\sqrt{3}(2a+1)}{4(a+1)}\tau^2 + \sqrt{3}. \qquad (30)$$

Аналогично выводятся приближенные уравнения характеристик (плюс соответствует ξ-характеристикам)

$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{\frac{a}{a+1}} - \frac{\sqrt{3}a}{2(a+1)}\tau \pm \sqrt{\frac{a}{a+1}}\,\frac{3a}{8(a+1)}\tau^2 - \frac{\sqrt{3}a}{4(a+1)}\tau^3 + \ldots .$$

С ростом осевой нагрузки растут касательные напряжения в прослойке. В момент потери пластической устойчивости [7] параметр α достигает своего наибольшего значения α^*. Если OM вблизи прослойки вовлекается в пластическую деформацию, зависимость (30) позволяет, с помощью методики [10], вычислить α^* как функцию от K. Опуская промежуточные выкладки, приведем результат для случая $a = 1$ аппроксимация касательных напряжений формулой (17):

$$\alpha^* = \sqrt{\frac{3}{2}}(K-1)\left(1 + \frac{9}{16}\,\frac{(K-1)^2}{K}\right)$$

или, при малых $K-1$, $\alpha^* \approx 1,22(K-1)$. При часто встречающихся в сварных соединениях значениях механической неоднородности $K \le 1,2$ ошибка в последней формуле не более 2 %. Знание α^* позволяет [11] однозначно определить τ_{rz} в форме (16) решением системы уравнений (9)–(11) (в [11] соответствующая методика применялась в случае кольцевой прослойки в составе трубчатого образца).

Литература

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехиздат. – 1956. – 407 с.

2. Аннин Б.А., Бытев В.О., Сенашов С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. – Новосибирск: Наука. – 1985. – 140 с.

3. Бриджмен П. Исследование больших пластических деформаций и разрыва. – М.: Иностранная литература. – 1955. – 444 с.

4. Давиденков Н.Н., Спиридонова Н.И. Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца// Заводская лаборатория. – 1945. – № 6. – С. 583–593.

5. Бакши О.А., Качанов Л.М. О напряженном состоянии пластичной прослойки при осесимметрической деформации// Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 2. – С. 134–137.

6. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. – М.: Наука. – 1966. – 231 с.

7. Дильман В.Л. Потеря пластической устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки в предположениях теории течения// Обозрение прикл. и промышл. математики. –2001. – Т. 8. – Вып. 1. – С. 158–159.

8. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука. – 1978. – 688 с.

9. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука. – 1973. – 228 с.

10. Дильман В.Л., Остсемин А.А. Анализ методом линий скольжения вязкой прочности сварного соединения с подрезом прямошовных труб большого диаметра// Пробл. прочности. – 2004. – № 3. – С. 72–82.

11. Дильман В.Л., Остсемин А.А. О напряженно-деформированном состоянии пластического кольца при растяжении// Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 2. – С. 109–120.

Поступила в редакцию 1 декабря 2004 г.