

# ОБ УРАВНЕНИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ПОЛИНОМИАЛЬНО ОГРАНИЧЕННОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ РЕЗОЛВЕНТОЙ

А.С. Макаров

В работе изучается абстрактное линейное дифференциальное уравнение соболевского типа с необратимым оператором при производной, относительная резольвента которого может иметь полиномиальный рост на бесконечности. Установлено существование разрешающей аналитической  $S$ -полугруппы этого уравнения и доказано существование и единственность решения задачи Коши при начальных данных из некоторого множества.

1. Пусть  $U$  и  $F$  – банаховы пространства, оператор  $L:U \rightarrow F$  линейный и непрерывный, т.е.  $L \in L(U, F)$ , а оператор  $M: \text{dom}M \rightarrow F$  замкнутый и линейный с областью определения  $\text{dom}M$  плотной в  $U$ .

Следуя [1], введем  $L$ -резольвентное множество оператора  $M$   $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C}: \exists (\mu L - M)^{-1} \in L(F, U)\}$ . Для  $\mu \in \rho^L(M)$  определим правую и, соответственно, левую  $L$ -резольвенты оператора  $M$   $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L$  и  $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ . Правая и левая  $L$ -резольвенты являются аналитическими функциями на  $L$ -резольвентном множестве. Справедливы правое и, соответственно, левое  $L$ -резольвентные тождества [1]:

$$R_\mu^L(M) - R_\lambda^L(M) = (\lambda - \mu) R_\mu^L(M) R_\lambda^L(M); \quad (1)$$

$$L_\mu^L(M) - L_\lambda^L(M) = (\lambda - \mu) L_\mu^L(M) L_\lambda^L(M). \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует коммутруемость операторов  $R_\mu^L(M)$ ,  $R_\lambda^L(M)$ ,  $L_\mu^L(M)$ ,  $L_\lambda^L(M)$ .

Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$Lu = Mu. \quad (3)$$

Уравнение (3) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R_\mu^L(M)u = (\mu L - M)^{-1} Mu \quad (4)$$

и

$$L_\mu^L(M)u = M(\mu L - M)^{-1} f, \quad (5)$$

рассматриваемых, соответственно, в пространствах  $U$  и  $F$ .

В случае существования обратного оператора  $L^{-1}$  уравнение (3) сводится к уравнению

$$u = Su, \quad (6)$$

где  $S = L^{-1}M$ . Уравнение вида (6) при условии, что резольвента оператора  $S$  имеет не более, чем степенной рост на бесконечности, изучалось, например, в работах [2, 3]. В данной статье уравнение (3) рассматривается при предположении, что ядро  $\ker L \neq \{0\}$  и  $L$ -резольвента оператора  $M$  имеет на бесконечности подстепенной рост.

2. Пусть  $\theta \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  и сектор  $S_{\theta, \sigma} = \{\mu \in \mathbb{C}: |\arg(\mu - \sigma)| < \theta, \mu \neq \sigma\} \subset \rho^L(M)$ .

Рассмотрим однопараметрические семейства  $\{U^t, t \geq 0\}$  и  $\{F^t, t \geq 0\}$  линейных операторов, действующих в пространствах  $U$  и  $F$  соответственно, которые определяются равенствами

$$U^t = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu t}}{(\mu - a)^n} R_\mu^L(M) d\mu, \quad F^t = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu t}}{(\mu - a)^n} L_\mu^L(M) d\mu. \quad (7)$$

Здесь  $n \in \mathbb{N}$ , контур

$$\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C}: \mu = \sigma_0 - |x| + ix \operatorname{tg} \theta, x \in \mathbb{R}\} \subset S_{\theta, \sigma},$$

$\sigma_0 > 0, \sigma_0 > \sigma, a > \sigma_0$ , направление на  $\Gamma$  против часовой стрелки. Далее предполагается, что правая и левая  $L$ -резольвенты оператора  $M$  удовлетворяют условию

A). Существуют такие числа  $R > 0, \varepsilon > 0$  и  $K > 0$ , не зависящее от  $\mu$ , что при  $|\mu| > R$  ( $\mu \in \rho^L(M)$ )

$$\max \left( \left\| \frac{R_\mu^L(M)}{(\mu - a)^n} \right\|, \left\| \frac{L_\mu^L(M)}{(\mu - a)^n} \right\| \right) \leq \frac{K}{|\mu|^{1+\varepsilon}}.$$

При условии A) интегралы в (7) сходятся абсолютно и равномерно относительно  $t \geq 0$ , поэтому  $U^t \in L(U), F^t \in L(F)$ . Семейства операторов  $\{U^t, t \geq 0\}$  и  $\{F^t, t \geq 0\}$  можно рассматривать как реализации семейства линейных ограниченных операторов  $\{S^t, t \geq 0\}$  в банаховом пространстве  $B$ . Обозначим  $S^0 = C, C \in L(B)$ .

**Определение 1.** Однопараметрическое семейство  $\{S^t, t \geq 0\}$  линейных ограниченных операторов называется  $C$ -полугруппой, если

$$1) S^t S^s = S^{t+s} C, s, t \geq 0.$$

Если при этом выполняется еще условие

$$2) \exists Q > 0, w \in \mathbb{R} \text{ такие, что } \forall t > 0 \quad \|S^t\| \leq Q e^{wt},$$

то  $C$ -полугруппа называется экспоненциально ограниченной.

В отличие от принятого определения  $C$ -полугруппы [4] здесь не требуется сильной непрерывности полугруппы, инъективности оператора  $C$  и плотности в  $B$  области значений  $\operatorname{im} C$  оператора  $C$ .

Из условия 1) определения 1 следует, что  $S^t S^s = S^s S^t$ , в частности  $S^t C = C S^t$ .

**Теорема 1.** Семейства  $\{U^t, t \geq 0\}$  и  $\{F^t, t \geq 0\}$  образуют экспоненциально ограниченные  $C$ -полугруппы.

**Доказательство.** Для проверки равенства 1 в определении 1 для  $U^t$  можно вместо контура  $\Gamma$  в интегралах (7) взять контур  $\Gamma'$ , полученный параллельным переносом  $\Gamma$  вправо, но так, чтобы точка  $a$  оставалась правее  $\Gamma'$ . Тогда используя равенство (1) и изменив порядок интегрирования, найдем:

$$\begin{aligned} U^s U^t &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} e^{\mu s} \frac{R_\lambda^L(M) R_\mu^L(M)}{(\lambda - a)^n (\mu - a)^n} d\mu d\lambda = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda - a)^n} R_\lambda^L(M) d\lambda \int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s} d\mu}{(\mu - a)^n (\mu - \lambda)} + \\ &+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s}}{(\mu - a)^n} R_\mu^L(M) d\mu \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{(\lambda - a)^n (\lambda - \mu)} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda(t+s)}}{(\lambda - a)^{2n}} R_\lambda^L(M) d\lambda, \end{aligned}$$

так как по теореме о вычетах

$$\int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s} d\mu}{(\mu - a)^n (\mu - \lambda)} = \frac{2\pi i e^{\lambda s}}{(\lambda - a)^n}, \quad \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{(\lambda - a)^n (\lambda - \mu)} = 0.$$

Так же можно показать, что

$$U^{s+t} U^0 = U^{s+t} C = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda(t+s)}}{(\lambda - a)^{2n}} R_\lambda^L(M) d\lambda.$$

Поэтому условие 1 выполняется. Для доказательства неравенства в пункте 2 определения 1 заметим, что на контуре  $\Gamma \operatorname{Re} \mu < \sigma_0$ . Поэтому, в силу абсолютной сходимости интегралов (7),

$$\|U^t\| \leq e^{t\sigma_0} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\| \frac{R_\mu^L(M)}{|\mu - a|^n} \right\| |d\mu| = Q e^{t\sigma_0}.$$

Аналогично доказывается утверждение для  $F^t$  с использованием равенства (2).  $\blacktriangle^1$

<sup>1</sup> Знак  $\blacktriangle$  обозначает завершение доказательства.

Для  $C$ -полугруппы  $U^t$  оператор  $C = U^0$  будем обозначать  $C_U$ , для  $F^t - C_F = F^0$ , т.е.

$$C_U = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_{\mu}^L(M)}{(\mu - a)^n} d\mu, \quad C_F = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{L_{\mu}^L(M)}{(\mu - a)^n} d\mu. \quad (8)$$

3. Уравнения (3), (4) и (5) можно рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$Gv = Bv, \quad (9)$$

где  $G \in L(B)$ , оператор  $B: \text{dom}B \subset B \rightarrow B$  линеен, замкнут, плотно определен в  $B$ ,  $B$  – банахово пространство.

Решением уравнения (9) назовем функцию  $v \in C([0, +\infty); B) \cap C^{\infty}((0, +\infty); B)$ , удовлетворяющую этому уравнению.

**Определение 2.** Отображение  $S^* \in C^{\infty}((0, +\infty); L(B))$  называется разрешающей  $C$ -полугруппой уравнения (9), если:

- 1)  $S^* : (0, +\infty) \rightarrow L(B)$  –  $C$ -полугруппа;
- 2)  $\forall x \in B$  функция  $x(t) = S^t x$  является решением уравнения (9).

$C$ -полугруппа  $S^* : (0, +\infty) \rightarrow L(B)$  называется аналитической, если она продолжима в некоторый сектор комплексной плоскости, содержащий положительную полуось.

**Теорема 2.** Существуют разрешающие аналитические экспоненциально ограниченные  $C$ -полугруппы уравнений (4) и (5).

**Доказательство.** Искомые  $C$ -полугруппы задаются равенствами (7). Интегралы (7) допускают аналитическое продолжение в сектор  $\Sigma = \{\tau \in C: |\arg \tau| < \theta - \frac{\pi}{2}\}$ , так как при  $\mu \in \Gamma$  и  $\tau \in \Sigma$   $\cos(\arg \mu + \tau) < 0$  и поэтому возможно дифференцирование по параметру под знаком интеграла. При любом  $u_0 \in U$  вектор-функция  $u(t) = U^t u_0$  удовлетворяет уравнению (4):

$$\begin{aligned} R_{\mu}^L(M)u - (\mu L - M)^{-1}Mu &= (\mu L - M)^{-1}(Lu - Mu) = \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} (\mu L - M)^{-1} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda - a)^n} (\lambda L - M)(\lambda L - M)^{-1} Lu_0 d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что  $f(t) = F^t f_0$  является решением уравнения (5) при любом  $f_0 \in F$ . ▲

Так же как для обычных резольvent [5], для правой и левой  $L$ -резольventы оператора  $M$  имеют место равенства

$$(R_{\mu}^L(M))^{(k)} = (-1)^k k! (R_{\mu}^L(M))^{k+1}, \quad (10)$$

$$(L_{\mu}^L(M))^{(k)} = (-1)^k k! (L_{\mu}^L(M))^{k+1}. \quad (11)$$

Вычислим оператор  $C_U$  для  $C$ -полугруппы  $U^t$ . Для этого воспользуемся замкнутым контуром, состоящем из дуги  $l_r$  окружности с центром в точке  $a$  и радиуса  $r > R$ , где  $R$  – число, фигурирующее в условии А), и части  $\Gamma_r$  контура  $\Gamma$ , содержащейся внутри окружности. Тогда, в силу (10),

$$\begin{aligned} C_U = U^0 &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_{\mu}^L(M)}{(\mu - a)^n} d\mu = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{R_{\mu}^L(M)}{(\mu - a)^n} d\mu = \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \left( \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r \cup l_r} \frac{R_{\mu}^L(M)}{(\mu - a)^n} d\mu - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{l_r} \frac{R_{\mu}^L(M)}{(\mu - a)^n} d\mu \right) = \\ &= (-1)^{n+1} \operatorname{Res}_{\mu=a} \frac{R_{\mu}^L(M)}{(\mu - a)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} (R_a^L(M))^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} (-1)^{n-1} (n-1)! (R_a^L(M))^n = (R_a^L(M))^n. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл по  $\Gamma_r \cup l_r$  вычислен с помощью вычетов с учетом направления по часовой стрелке на контуре, предел второго интеграла по  $l_r$  в силу условия А) равен нулю. Аналогично показывается, что  $C_F = (L_a^L(M))^n$ .

**4. Рассмотрим задачу Коши**

$$v(0) = v_0 \tag{12}$$

для уравнения (9). Для уравнений (6) и (7) начальное условие (12) сводится, соответственно, к виду

$$u(0) = u_0, \tag{13}$$

$$f(0) = f_0. \tag{14}$$

**Теорема 3.** Для любого  $u_0 \in \text{im}C_U$  ( $f_0 \in \text{im}C_F$ ) задача Коши (13) ((14)) для уравнения (4) ((5)) разрешима.

**Доказательство.** Пусть  $u_0 \in \text{im}C_U$ , т.е.  $u_0 = C_U z_0$  для некоторого  $z_0 \in U$ . Тогда в силу теоремы 2, функция  $u(t) = U^t z_0$  является решением уравнения (4). Условие (13)  $u(0) = U^0 z_0 = C_U z_0 = u_0$  также выполняется. ▲

Так как  $C$ -полугруппы  $U^*$  и  $F^*$ , определяемые равенствами (7), в силу теоремы 2 экспоненциально ограниченные, то можно вычислить их преобразования Лапласа. Вычислим преобразование Лапласа  $L_\mu(U)$   $C$ -полугруппы  $U^*$ . Изменив порядок интегрирования и применив теорему о вычетах, получим при  $\text{Re } \mu > a > \text{Re } \lambda$

$$\begin{aligned} L_\mu(U) &= \int_0^\infty e^{-\mu t} U^t dt = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda^L(M) \frac{d\lambda}{(\lambda - a)^n} \int_0^\infty e^{(\lambda - \mu)t} dt = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R_\lambda^L(M) d\lambda}{(\lambda - a)^n (\mu - \lambda)} = \\ &= (-1)^n \text{Res}_{\lambda=a} \frac{R_\lambda^L(M)}{(\lambda - \mu)(\lambda - a)^n} + (-1)^n \text{Res}_{\lambda=\mu} \frac{R_\lambda^L(M)}{(\lambda - \mu)(\lambda - a)^n} = \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \left( \frac{R_\lambda^L(M)}{\lambda - \mu} \right)^{(n-1)} \Big|_{\lambda=a} + (-1)^n \frac{R_\mu^L(M)}{(\mu - a)^n}. \end{aligned} \tag{15}$$

Вычислим в (15) первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \left( \frac{R_\lambda^L(M)}{\lambda - \mu} \right)^{(n-1)} \Big|_{\lambda=a} &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i ((\lambda - \mu)^{-1})^{(n-1-i)} \Big|_{\lambda=a} (R_\lambda^L(M))^{(i)} \Big|_{\lambda=a} = \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (-1)^{n-1-i} (n-1-i)! (a - \mu)^{-(n-1-i)} (-1)^i i! (R_a^L(M))^{i+1} = \\ &= - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(R_a^L(M))^{i+1}}{(a - \mu)^{n-i}} = - \frac{R_a^L(M)}{(a - \mu)^n} \sum_{i=0}^{n-1} (a - \mu)^i (R_a^L(M))^i. \end{aligned} \tag{16}$$

Для вычисления последней суммы воспользуемся равенством:

$$(I - (a - \mu)R_a^L(M)) \sum_{i=0}^{n-1} (a - \mu)^i (R_a^L(M))^i = I - (a - \mu)^n (R_a^L(M))^n. \tag{17}$$

Справедливо равенство  $I - (a - \mu)R_a^L(M) = (aL - M)^{-1}(\mu L - M)$ , в котором оператор, стоящий справа, можно считать определенным на всем пространстве  $U$  в силу замкнутости  $M$  и плотности  $\text{dom } M$  в  $U$ .

Если  $\mu \in \rho^L(M)$ , то  $\exists (\mu L - M)^{-1}$  и, следовательно, существует

$$(I - (a - \mu)R_a^L(M))^{-1} = (\mu L - M)^{-1}(aL - M).$$

Тогда из (17) следует, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a - \mu)^i (R_a^L(M))^i = (\mu L - M)^{-1}(aL - M)(I - (a - \mu)^n C_U). \tag{18}$$

Подставив (18) в (16), получим

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \left( \frac{R_\lambda^L(M)}{\lambda - \mu} \right) \Big|_{\lambda=a}^{(n-1)} &= -\frac{1}{(a-\mu)^n} (aL - M)^{-1} L(\mu L - M)^{-1} (aL - M) (I - (a-\mu)^n C_U) = \\ &= -\frac{1}{(a-\mu)^n} R_\mu^L(M) (I - (a-\mu)^n C_U). \end{aligned}$$

Из равенства (15) имеем окончательно:  $L_\mu(U) = C_U R_\mu^L(M)$ . Аналогично можно получить равенство  $L_\mu(F) = C_F R_\mu^L(M)$ , справедливое при  $\operatorname{Re} \mu > a$ .

**Лемма 1.** При  $\operatorname{Re} \mu > a$  справедливо неравенство

$$\max(\|L_\mu(U)\|, \|L_\mu(F)\|) \leq \frac{Q}{\operatorname{Re} \mu - \sigma_0}, \tag{19}$$

где постоянная  $Q$  не зависит от  $\mu$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 1  $\|U^t\| \leq Q_1 e^{t\sigma_0}$ ,  $\|F^t\| \leq Q_2 e^{t\sigma_0}$ . Тогда

$$\|L_\mu(U)\| \leq Q_1 \int_0^\infty e^{-t\operatorname{Re} \mu} e^{t\sigma_0} dt = \frac{Q_1}{\operatorname{Re} \mu - \sigma_0}.$$

Аналогично  $\|L_\mu(F)\| \leq \frac{Q_2}{\operatorname{Re} \mu - \sigma_0}$ . Положив  $Q = \max(Q_1, Q_2)$ , получим неравенство (19).  $\blacktriangle$

Вектор  $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$  будем называть собственным вектором оператора  $L$ . Упорядоченное множество  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  векторов из  $U$  называется цепочкой  $M$ -присоединенных векторов вектора  $\varphi_0$ , если  $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$ ,  $q = 0, 1, \dots$  и  $\varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}$ ,  $q = 1, 2, \dots$  [1]. Порядковый номер вектора в цепочке называется его высотой, а порядковый номер последнего вектора, в случае конечной цепочки, называется высотой этой цепочки. Линейная оболочка  $M$ -присоединенных векторов оператора  $L$  называется его  $M$ -корневым линеалом. В [6] доказано, что  $M$ -корневой линеал оператора  $L$  состоит только из  $M$ -присоединенных векторов оператора  $L$  и нуля.

**Лемма 2.** Если  $\varphi_q$   $M$ -присоединенный вектор вектора  $\varphi_0$  высоты не больше  $q$ , то  $(-1)^q (R_a^L(M))^{q-1} R_\mu^L(M) \varphi_q = \varphi_0$ . Вектор  $\varphi_q$   $M$ -присоединенный вектор оператора  $L$  высоты не больше  $q$  точно тогда, когда  $(R_a^L(M))^q R_\mu^L(M) \varphi_q = 0$ .

Доказательство проводится почти так же, как доказательство аналогичного утверждения в [6].

**Лемма 3.** Длины всех цепочек  $M$ -присоединенных векторов оператора  $L$  ограничены числом  $n$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_{n+1}$  —  $M$ -присоединенный вектор вектора  $\varphi_0$  высоты  $n+1$ . Тогда в силу леммы 2

$$\varphi_0 = (-1)^{n+1} (R_\mu^L(M))^n R_\mu^L(M) \varphi_{n+1} = (-1)^{n+1} L_\mu(U) \varphi_{n+1},$$

где  $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ . Отсюда. В силу (19), имеем:

$$\|\varphi_0\| \leq \|L_\mu(U)\| \cdot \|\varphi_{n+1}\| \leq \frac{Q}{\operatorname{Re} \mu - a} \|\varphi_{n+1}\| \rightarrow 0$$

при  $\operatorname{Re} \mu \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\varphi_0 = 0$ . Что противоречит выбору  $\varphi_0$ .  $\blacktriangle$

**Лемма 4.** Справедливы равенства

$$\ker L_\mu(U) \cap \operatorname{im} L_\mu(U) = \{0\}, \tag{20}$$

$$\ker L_\mu(F) \cap \operatorname{im} L_\mu(F) = \{0\}. \tag{21}$$

**Доказательство.** Пусть ненулевой вектор  $\varphi$ , принадлежит левой части равенства (20). Тогда  $\exists \psi \in U$  такой, что  $\varphi = (R_a^L(M))^n R_\mu^L(M) \psi \in \ker L_\mu(U)$ . Следовательно,

$$(R_a^L(M))^{2n} (R_\mu^L(M))^2 \psi = 0.$$

В силу леммы 2 это означает, что вектор  $\psi$  является  $M$ -присоединенным вектором оператора  $L$  высоты не больше  $2n+1$ . Но по лемме 3 его высота не больше  $n$ . Поэтому  $\varphi = (R_a^L(M))^n R_\mu^L(M)\psi = 0$ .

Пусть  $f$  принадлежит теперь левой части равенства (21). Тогда  $f = (L_a^L(M))^n L_\mu^L(M)g, g \in F$ . Кроме того  $(L_a^L(M))^n L_\mu^L(M)f = 0$ . Следовательно,  $(L_a^L(M))^{2n} (L_\mu^L(M))^2 g = 0$  или  $(R_a^L(M))^{2n} (R_\mu^L(M))^2 (aL - M)^{-1} g = 0$ , т.е.  $(aL - M)^{-1} g \in \ker (R_a^L(M))^{2n} (R_\mu^L(M))^2$ . Это означает согласно лемме 2, что вектор  $(aL - M)^{-1} g$  является  $M$ -присоединенным высоты не больше  $2n+1$ . Но его высота не может быть больше  $n$ . Поэтому  $(R_a^L(M))^n R_\mu^L(M)(aL - M)^{-1} g = 0$  или, применив к последнему равенству оператор  $L, f = (L_a^L(M))^n L_\mu^L(M)g = 0$ .  $\blacktriangle$

**Определение 3.** Замкнутое множество  $\Phi \subset B$  называется фазовым пространством уравнения (9), если

- 1) любое решение  $v$  уравнения (9) лежит в  $\Phi$ , т.е.  $\forall t > 0 \ v(t) \in \Phi$ ;
- 2) для любого  $v_0$  из некоторого плотного в  $\Phi$  множества  $\Phi_0$  существует единственное решение задачи Коши  $v(0) = v_0$  для уравнения (9).

Обозначим  $U^1 (F^1)$  замыкание  $\text{im}L_\mu(U) (\text{im}L_\mu(F))$ .

**Теорема 4.** Пусть операторы  $L$  и  $M$  удовлетворяют условию А). Тогда  $U^1 (F^1)$  является фазовым пространством уравнения (4) ((5)).

**Доказательство.** Если  $u$  – решение уравнения (4), то, как показано в [7],  $\forall \lambda \in \rho^L(M), \forall k \in N$

$$u = (R_\lambda^L(M))^k \left( \lambda - \frac{d}{dt} \right)^k u.$$

Положив здесь  $\lambda = a, k = n$  и использовав это равенство при  $\lambda = \mu$  и  $k = 1$ , получим:

$$u = (R_a^L(M))^n \left( a - \frac{d}{dt} \right)^n R_\mu^L(M) \left( \mu - \frac{d}{dt} \right) u = (R_\lambda^L(M))^n R_\mu^L(M) \left( a - \frac{d}{dt} \right)^n \left( \mu - \frac{d}{dt} \right) u.$$

Отсюда следует, что  $u \in \text{im}L_\mu(U) \subset U^1$ . Пусть  $u_0 \in \text{im}L_\mu(U)$ , т.е.  $u_0 = C_U R_\mu^L(M)x_0, x_0 \in U$ . Тогда функция  $u(t) = U^t R_\mu^L(M)x_0$  в силу теоремы 3 является решением задачи Коши  $u(0) = u_0$  для уравнения (4). Докажем единственность этого решения. Пусть  $v$  – другое решение задачи Коши  $v(0) = u_0$  для уравнения (4). Рассмотрим на  $[0, t]$  функцию  $w(s) = U^{t-s} R_\alpha^L(M)v(s)$ . Найдем

$$\begin{aligned} w'(s) &= R_\alpha^L(M) \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\mu(t-s)} \frac{R_\mu^L(M)}{(\mu - a)^n} (v'(s) - \mu v(s)) d\mu = \\ &= R_\alpha^L(M) \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu - a)^n} (R_\mu^L(M)v'(s) - \mu R_\mu^L(M)v(s)) d\mu = \\ &= R_\alpha^L(M) \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu - a)^n} (R_\mu^L(M)v'(s) - (\mu L - M)^{-1} Mv(s) - v(s)) d\mu = \\ &= R_\alpha^L(M) \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu - a)^n} (R_\mu^L(M)v'(s) - (\mu L - M)^{-1} Mv(s)) d\mu - R_\alpha^L(M) \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu - a)^n} d\mu = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $w(0) = w(t)$ , т.е.

$$U^t R_\alpha^L(M)v(0) = C_U R_\alpha^L(M)v(t) \text{ или } U^t R_\alpha^L(M)C_U R_\mu^L(M)x_0 - C_U R_\alpha^L(M)v(t) = 0.$$

Отсюда

$$C_U R_\alpha^L(M)(U^t R_\mu^L(M)x_0 - v(t)) = C_U R_\alpha^L(M)(u(t) - v(t)) = 0.$$

Поэтому  $u(t) - v(t) \in \ker L_\alpha(U)$ . Кроме того, как показано выше,  $u(t) - v(t) \in \operatorname{im} L_\mu(U) = \operatorname{im} L_\alpha(U)$ . Тогда в силу равенства (20),  $u(t) = v(t)$ . Доказательство для уравнения (5) проводится аналогично. ▲

#### Литература

1. Свиридчук Г.А. К общей теории полугрупп операторов// УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 4 (298). – С. 47–74.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 275 с.
3. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. – М.: Наука, 1999. – 175 с.
4. Мельникова И.В., Филинков А.И. Интегрированные полугруппы и  $C$ -полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач// УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 6(300). – С. 11–150.
5. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИИЛ, 1962.
6. Федоров В.Е. Полугруппы и группы операторов с ядрами. – Челябинск: ЧелГУ, 1988. – 78 с.
7. Федоров В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений типа Соболева: Дисс....канд. физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 1996.

*Поступила в редакцию 30 ноября 2004 г.*