

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Е.В. Харитонова

В работе рассматривается модель измерений, построенная на базе анализа обратной многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, приводящая к исследованию интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Регуляризации процедуры получения решения осуществляется методом невязки.

Одной из проблем теории и практики динамических измерений является проблема оперативного оценивания детектируемого сигнала в условиях, когда входной сигнал трудно поддается прямому измерению, а выходной содержит значительную часть динамической погрешности (например, при измерении импульсных или других, быстро меняющихся во времени, сигналов).

Существует несколько различных подходов к решению этой задачи, Среди них анализ амплитудно-фазовых характеристик системы, методы коррекции, методы модельного контроля и др.

В настоящей работе рассматривается модель измерений, построенная на базе анализа обратной многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, приводящая к исследованию интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для регуляризации процедуры получения решения используется классический метод А.Н. Тихонова.

Существенное упрощение собственно процедуры регуляризации решения и оценивания параметра регуляризации достигается за счет использования конечно-элементных конечномерных аппроксимаций.

1. Введение

Задачи, возникающие в теории динамических измерений, могут быть условно разделены на две группы – задачи восстановления сигнала и задачи анализа динамической погрешности. Первая из упомянутых задач – определение входного сигнала, искаженного средствами измерений, – в общей постановке, представляет собой обратную задачу теории измерений, которая может быть сформулирована как задача решения операторного уравнения

$$A \cdot u(t) = x(t)$$

относительно функции $u(t)$ при неточно заданных операторе A и правой части $x(t)$. Известно (например [2],[3]), что в таких задачах обратный оператор A^{-1} как правило неограничен, что приводит к неустойчивости численных процедур решения указанного уравнения.

В подавляющем большинстве случаев метод невязки [2] Тихонова А.Н. (или метод регуляризации, например, метод квазирешений [3] Иванова В.К. и т.п.) дает возможность получения приближенного регуляризованного решения указанной задачи с одновременной оценкой точности получаемого решения.

Важно для приложений случае, когда функции $u(t)$ и $x(t)$ связаны дифференциальным соотношением $L[x(t)] = u(t)$, $L[.]$ – дифференциальный оператор, приведенное выше операторное уравнение представляет собой интегральное уравнение первого рода (Вольтерра или Фредгольма – в зависимости от постановки задачи), методы решения которого хорошо изучены в теории (например [2, 4, 9] и цитированная там литература).

Тем не менее, численная реализация того или иного метода регуляризации по-прежнему является довольно тонкой задачей, и эффективность применяемых алгоритмов напрямую связана с избранным способом дискретизации задачи. Априори, дискретизация задачи может быть осуществлена в следующих направлениях:

- дискретизация интегрального уравнения с последующей регуляризацией полученной системы алгебраических уравнений;
- построение минимизирующего функционала с последующей его дискретизацией проекционными методами (например, методом Ритца);

$$L(x) = u, \quad U_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (7)$$

однозначно разрешима для любой непрерывной правой части $u(t)$, $t \in [a, b]$ и справедлива формула

$$x(t) = \int_a^b G(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где $G(t, \tau)$ – функция Грина дифференциального оператора (4), определяемая следующими условиями:

1. $G(t, \tau)$ – непрерывна и непрерывно-дифференцируема по переменной x вплоть до $(n-2)$ -го порядка включительно.

2. $\forall \tau \in [a, b]$ $G(t, \tau)$ обладает непрерывными производными порядков $n-1$ и n по переменной x в каждом из интервалов $[a, \tau)$ и $(\tau, b]$. При этом производная $(n-1)$ порядка имеет в точке $x = \tau$ скачок, равный 1 (в общем случае – равный $\frac{1}{a_n(t)}$, где $a_n(t)$ – коэффициент при старшей производной в (3)):

$$\left. \frac{\partial^{n-1} G(t, \tau)}{\partial t^{n-1}} \right|_{t=\tau+} - \left. \frac{\partial^{n-1} G(t, \tau)}{\partial t^{n-1}} \right|_{t=\tau-} = 1. \quad (9)$$

3. В каждом из интервалов $[a, \tau)$ и $(\tau, b]$ функция Грина $G(t, \tau)$ является решением краевой задачи (4).

4. Функция Грина определяется единственным образом, если только выполнено условие однозначной разрешимости задачи (4).

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – фундаментальная система решений однородного уравнения $L(x) = 0$.

Тогда

$$\forall t \in [a, \tau): G(t, \tau) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tau) \varphi_i(t); \quad \forall t \in (\tau, b]: G(t, \tau) = \sum_{i=1}^n \beta_i(\tau) \varphi_i(t).$$

Условия непрерывности функции Грина и первых ее $(n-2)$ производных дают:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [\alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)] \varphi_i(\tau) = 0 \\ \sum_{i=1}^n [\alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)] \varphi_i'(\tau) = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n [\alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)] \varphi_i^{(n-2)}(\tau) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Из условия на скачок $(n-1)$ производной в точке $t = \tau$, получаем:

$$\sum_{i=1}^n [\alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)] \varphi_i^{(n-1)}(\tau) = -1. \quad (11)$$

Уравнения (10) и (11) образуют систему n линейных уравнений относительно неизвестных разностей $\alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$, определитель которой

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n] = \Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

в силу линейной независимости функций $\varphi_j(\tau)$.

Краевые условия (4) примененные к функции Грина дают:

$$U_j(G(t, \tau)) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Подробнее, в силу линейности функционалов $U_j(x)$, получаем:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \mu_i(\tau) U_j(\varphi_i(t)) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \right. \quad (12)$$

$$\text{где } \mu_i(\tau) = \begin{cases} \alpha_i(\tau), & t \in [a, \tau) \\ \beta_i(\tau), & t \in (\tau, b] \end{cases}$$

Положим $\gamma_i(\tau) = \alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$. Значения $\gamma_i(\tau)$ однозначно определяются упомянутой выше системой (10)–(11). Поэтому система (12) является системой n линейных (относительно, например $\alpha_i(\tau)$) уравнений ($\beta_i = \gamma_i - \alpha_i$), определитель которой $U = \|U_j(\varphi_i)\|$ не равен нулю в силу принятых допущений. Следовательно, она однозначно разрешима, чем и завершается построение функции Грина краевой задачи (4).

Функция Грина будет задаваться соотношением

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tau) \varphi_i(t), & a \leq t < \tau; \\ \sum_{i=1}^n \beta_i(\tau) \varphi_i(t), & \tau < t \leq b. \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим уравнение n -го порядка с краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} L(x) &= x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x = u \\ U_j(x) &= x(t_j), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Здесь $t_j \in [a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Пусть τ выбрана так, что $t_k < \tau < t_{k+1}$. Тогда

$$G(t, x) = \begin{cases} \sum \alpha_i \varphi_i(t), & t < \tau \\ \sum \beta_i \varphi_i(t), & t > \tau \end{cases}$$

Полагая, как и выше $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$, запишем условия непрерывности (10) - (11):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \gamma_i(\tau) \varphi_i^{(k)}(\tau) = 0, & k = 1, \dots, n-2; \\ \sum_{i=1}^n \gamma_i(\tau) \varphi_i^{(n-1)}(\tau) = -1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\gamma_i(\tau) = \frac{\omega_i(\tau)}{\omega(\tau)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

где $\omega(\tau)$ – определитель Вронского фундаментальной системы решений однородного уравнения

(14), $\omega_i(\tau)$ – определители, получающиеся из $\omega(\tau)$ заменой i -го столбца столбцом $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\omega_i(\tau) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & 0 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & 0 & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & -1 & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}_{t=\tau}$$

Краевые условия (12) в рассматриваемом случае запишутся в виде:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tau)\varphi_i(t_s) = 0 & s = 1, \dots, k; \\ \sum_{i=1}^n \beta_i(\tau)\varphi_i(t_s) = 0 & s = k + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Учитывая выражения β_i через γ_i и α_i , приходим к системе

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tau)\varphi_i(t_s) = 0 & s = 1, \dots, k; \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tau)\varphi_i(t_s) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(\tau)\varphi_i(t_s) & s = k + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (16)$$

Полагая $u(p_1, \dots, p_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1(p_1) & \varphi_2(p_1) & \dots & \varphi_n(p_1) \\ \varphi_1(p_2) & \varphi_2(p_2) & \dots & \varphi_n(p_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(p_n) & \varphi_2(p_n) & \dots & \varphi_n(p_n) \end{vmatrix}$, получаем решение системы (16) в виде

$$\alpha_i(\tau) = \frac{u_i}{u(t_1, \dots, t_n)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (17)$$

где

$$u_i = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & 0 & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & 0 & \dots & \varphi_n(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_k) & \varphi_2(t_k) & \dots & 0 & \dots & \varphi_n(t_k) \\ \varphi_1(t_{k+1}) & \varphi_2(t_{k+1}) & \dots & \sum_{j=1}^n \gamma_j(\tau)\varphi_j(t_{k+1}) & \dots & \varphi_n(t_{k+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_n) & \varphi_2(t_n) & \dots & \underbrace{\sum_{j=1}^n \gamma_j(\tau)\varphi_j(t_n)}_{i\text{-й столбец}} & \dots & \varphi_n(t_n) \end{vmatrix}$$

4. Регуляризация

Как уже отмечалось выше, задача (2) относится к классу задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных.

Для нахождения ее решения применим метод регуляризации А.Н. Тихонова [2]. При этом задача решения интегрального уравнения заменяется задачей минимизации функционала $M^\alpha = \|Au - \tilde{x}\|^2 + \alpha \|\Omega\|^2$, где Ω – стабилизирующий оператор, в настоящей работе взятый в виде

$$\Omega = \int_b^a [p(\tau)u^2(\tau) + q(\tau)u'(\tau)] d\tau,$$

α – параметр регуляризации, который определяется из условия минимума невязки и зависит от точности задания правой части уравнения (2).

5. Основные расчетные соотношения

Известно [2–5], что переход к дискретному аналогу нахождения регуляризованных приближенных решений уравнения (2) можно осуществить различными способами. В настоящей работе принят следующий метод: вариационная задача метода невязки дискретизируется конечно-элементными аппроксимациями с последующим анализом уравнения Эйлера дискретной задачи. Решения этой задачи с соответствующим образом подобранным параметром регуляризации и принимается за приближенное решение рассматриваемой задачи.

Подробнее, положим

$$u_n(t) = \sum_{i=0}^n u_i^n \lambda_i(t),$$

где $\lambda_i(t)$ – базис Лагранжа конечно-элементных аппроксимаций [6, 7]. В дальнейшем ограничимся использованием подпространств кусочно-линейных функций, где $\lambda_i(t)$ задаются соотношениями

$$\lambda_i(t) = \begin{cases} 0, & t < t_{i-1} \cup t > t_{i+1}; \\ \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}, & t_{i-1} \leq t \leq t_i; \\ \frac{t-t_{i+1}}{t_i-t_{i+1}}, & t_i < t \leq t_{i+1}. \end{cases}$$

При этом функционал $M^\alpha(u)$ заменится функцией $M^\alpha(u_n(t)) = M^\alpha(u_0, u_1, \dots, u_n)$, где u_i^n – значения функции $u_n(t)$ в узлах

$$M^\alpha = \int_a^b \left(\int_a^b G(t, \tau) \sum_{i=1}^n u_i^n \lambda_i(\tau) d\tau - \tilde{y}(t) \right)^2 dt + \alpha \int_a^b \left[p \left(\sum_{i=1}^n u_i^n \lambda_i(\tau) \right)^2 + q \left(\sum_{i=1}^n u_i^n \lambda_i'(\tau) \right)^2 \right] d\tau.$$

Обозначив через $A_i(t)$ интеграл $\int_a^b G(t, \tau) \lambda_i(\tau) d\tau$, получим

$$M^\alpha = \int_a^b \left(\begin{pmatrix} u_0^n \\ \vdots \\ u_n^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_0^2 & \dots & A_0 A_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n A_0 & \dots & A_n^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0^n \\ \vdots \\ u_n^n \end{pmatrix} - 2 \sum_{i=1}^n u_i^n A_i(t) \tilde{y} + \tilde{y}^2 \right) dt +$$

$$+ \alpha \begin{pmatrix} u_0^n \\ \vdots \\ u_n^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \int_a^b (p \lambda_0^2 + q \lambda_0'^2) d\tau & \dots & \int_a^b (p \lambda_0 \lambda_n + q \lambda_0' \lambda_n') d\tau \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b (p \lambda_n \lambda_0 + q \lambda_n' \lambda_0') d\tau & \dots & \int_a^b (p \lambda_n^2 + q \lambda_n'^2) d\tau \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0^n \\ \vdots \\ u_n^n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=0}^n M_{ij} u_i^n u_j^n - 2 \sum_{i=0}^n W_i u_i^n + Y;$$

$$M_{ij} = \int_a^b \left[A_i A_j + \alpha (p \lambda_i \lambda_j + q \lambda_i' \lambda_j') \right] d\tau, \quad i, j = \overline{0, n};$$

$$W_i = \int_a^b A_i(t) \tilde{y}(t) dt, \quad Y = \int_a^b \tilde{y}^2 dt.$$

Необходимое условие минимума функционала M^α запишется в виде

$$\frac{\partial M^\alpha}{\partial u_s^n} = \sum_{i=0}^n M_{is} u_i^n - 2W_s = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n.$$

В итоге получаем систему $(n+1)$ линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^n M_{is} u_i^n = 2W_s, \quad s = \overline{0, n},$$

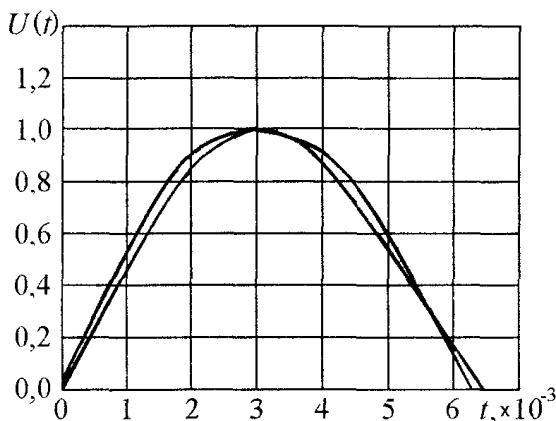
в форме

$$\sum_{i=0}^n u_i^n \cdot 2 \int_a^b \left(\int_a^b G(t, \tau) \lambda_i(\tau) d\tau \right) \left(\int_a^b G(t, \tau) \lambda_s(\tau) d\tau \right) + \alpha (p \lambda_i \lambda_s + q \lambda_i' \lambda_s') d\tau = 2 \int_a^b \left(\tilde{y}(t) \int_a^b G(t, \tau) \lambda_s(\tau) d\tau \right) dt,$$

которая и подлежит решению.

6. Результаты счета

Предлагаемый алгоритм решения задачи восстановления сигнала был опробован на модельном [8] примере датчика второго порядка, описываемого уравнением: $\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = u(t)$, где $a_0 = 10\,000$, $a_1 = 100$.



Постоянная времени датчика принималась равной $T = 0,01$, коэффициент демпфирования $\xi = 0,5$. При моделировании на вход датчика подавался импульсный сигнал в виде полуволны синусоиды $u(t) = \sin 500t$. На выходе датчика дополнительно присутствовало приведенное гармоническое одночастотное шумовое воздействие $v(t) = 0,05 \sin 5000t$.

На рисунке приведены результаты восстановления функции $u(t)$ ($n = 100$).

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ-УРАЛ 04-01-96073.

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Линейные некорректные задачи и их приложения. – М.: Наука. 1978.
4. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука. 1978.
5. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука. 1986.
6. Деклу Ж. Метод конечных элементов. – М.: Мир, 1976.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
8. Грановский В.А. Динамические измерения. – Л.: Энергоатомиздат, 1984.
9. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1978.

Поступила в редакцию 13 декабря 2004 г.