УДК 517.17+517.51

ПЕРИОД СУММЫ ДВУХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.Ю. Эвнин

В работе полностью решен вопрос, каким может быть основной период периодической функции, являющейся суммой двух периодических функций с известными основными периодами. Изучается также случай отсутствия основного периода у периодической суммы периодических функций.

Мы рассматриваем действительнозначные функции действительного переменного.

В энциклопедическом издании [1] в статье «Периодические функции» можно прочитать: «*Сумма периодических функций с разными периодами является периодической только тогда, когда их периоды соизмеримы*». Это утверждение справедливо для непрерывных функций[1], но не имеет места в общем случае. Контрпример весьма общего вида был построен в [4]. В данной статье мы выясняем, каким может быть основной период периодической функции, являющейся суммой двух периодических функций с известными основными периодами.

Предварительные сведения

Напомним, что функция f называется *периодической*, если для некоторого числа $T \neq 0$ при любом x из области определения $D(f)$ числа $x + T$ и $x - T$ принадлежат $D(f)$ и выполняются равенства $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$. При этом число T называют *периодом* функции.

Наименьший положительный период функции (если, конечно, он существует) будем называть *основным* периодом. Известен следующий факт.

Теорема 1. *Если у функции есть основной период T_0, то любой период функции имеет вид nT_0, где $n \neq 0$ – целое число.*

Числа T_1 и T_2 называют *соизмеримыми*, если существует такое число T_0, которое целое число раз «укладывается» и в T_1, и в T_2: $T_1 = n_1T_0$, $T_2 = n_2T_0$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. В противном случае числа T_1 и T_2 называют *несоизмеримыми*. Соизмеримость (несоизмеримость) периодов означает, таким образом, что их отношение есть число рациональное (иррациональное).

Из теоремы 1 следует, что у функции, имеющей основной период, любые два периода соизмеримы.

Классическим примером функции, не имеющей наименьшего периода, является *функция Дирихле,* равная 1 в рациональных точках, и нулю – в иррациональных. Любое рациональное число, отличное от нуля, является периодом функции Дирихле, а любое иррациональное число не является ее периодом. Как видим, и здесь любые два периода соизмеримы.

Приведем пример непостоянной периодической функции, имеющей несоизмеримые периоды.

Пусть функция $f(x)$ в точках вида $m + n\sqrt{2}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, равна 1, а в остальных точках равна нулю. Среди периодов этой функции есть 1 и $\sqrt{2}$.

Период суммы функций с соизмеримыми периодами

Теорема 2. *Пусть f и g – периодические функции с основными периодами mT_0 и nT_0, где m и n – взаимно простые числа. Тогда основной период их суммы (если он существует), равен $\dfrac{mnT_0}{k}$, где k – натуральное число, взаимно простое с числом mn.*

Доказательство. Пусть $h = f + g$. Очевидно, что число mnT_0 является периодом h. В силу теоремы 1 основной период h имеет вид $\dfrac{mnT_0}{k}$, где k – некоторое натуральное число. Предположим, что k не является взаимно простым с числом m, то есть $k = dk_1$, $m = dm_1$, где $d > 1$ – наи-

[1] Красивое доказательство того, что сумма любого конечного числа непрерывных функций с попарно несоизмеримыми периодами непериодична, содержится в статье [2] См. также [3].

больший общий делитель чисел m и k. Тогда период функции h равен $\dfrac{m_1 n T_0}{k_1}$, а функция $f = h - g$ имеет период $m_1 n T_0$, не являющийся кратным ее основного периода mT_0. Получено противоречие с теоремой 1. Значит, k взаимно просто с m. Аналогично, взаимно простыми являются числа k и n. Таким образом, k взаимно просто с mn. □

Теорема 3. *Пусть m, n и k – попарно взаимно простые числа, а T_0 – положительное число. Тогда существуют такие периодические функции f и g, что основные периоды f, g и $(f + g)$ равны соответственно mT_0, nT_0 и $\dfrac{mnT_0}{k}$.*

Доказательство. Доказательство теоремы будет конструктивным: мы просто построим соответствующий пример. Предварительно сформулируем следующий результат.

Утверждение. *Пусть $m \neq n$ – взаимно простые числа. Тогда функции*

$f_1 = \cos\dfrac{x}{m} + \cos\dfrac{x}{n}$ и $f_2 = \cos\dfrac{x}{m} - \cos\dfrac{x}{n}$ *имеют основным периодом число $2\pi mn$.*

Доказательство утверждения. Очевидно, что число $2\pi mn$ является периодом обеих функций. Легко можно проверить, что этот период основной для функции f_1. Найдем ее точки максимума.

$$f_1(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{m} = 1 \\ \cos\dfrac{x}{n} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi ms, & s \in \mathbf{Z} \\ x = 2\pi nt, & t \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Имеем $ms = nt$. Из взаимной простоты m и n следует, что s кратно n, т.е. $s = nl$, $l \in \mathbb{Z}$. Значит, $f_1(x) = 2 \Leftrightarrow x = 2\pi mnl$, $l \in \mathbb{Z}$, а расстояние между соседними точками максимума функции f_1 равно $2\pi mn$, и положительный период f_1 не может быть меньше числа $2\pi mn$.

Для функции f_2 применим рассуждения другого рода (которые подходят и для функции f_1, но менее элементарны). Как показывает теорема 1, основной период T функции f_2 имеет вид $\dfrac{2\pi mn}{k}$, где k – некоторое натуральное число, взаимно простое с m и n. Число T будет и периодом функции

$$m^2 f_2'' + f_2 = \left(\frac{m^2}{n^2} - 1\right)\cos\frac{x}{n},$$

все периоды которой имеют вид $2\pi nl$. Итак, $\dfrac{2\pi mn}{k} = 2\pi nl$, т.е. $m = kl$. Так как m и k взаимно просты, отсюда следует, что $k = 1$.

Теперь для доказательства теоремы 3 можно построить искомый пример.

Пример. Пусть m, n и k – попарно взаимно простые числа и хотя бы одно из чисел n или k отлично от 1. Тогда $n \neq k$ и в силу доказанного утверждения функции

$$f(x) = \cos\frac{x}{m} + \cos\frac{x}{k} \quad \text{и} \quad g(x) = \cos\frac{x}{n} - \cos\frac{x}{k}$$

имеют основные периоды $2\pi mk$ и $2\pi nk$ соответственно, а у их суммы

$$h(x) = f(x) + g(x) = \cos\frac{x}{m} + \cos\frac{x}{n}$$

основной период равен $2\pi mn$.

Если же $n = k = 1$, то подойдет пара функций

$$f(x) = 2\cos\frac{x}{m} + \cos x \quad \text{и} \quad g(x) = \cos x.$$

Их основные периоды, а также период функции $h(x) = 2\left(\cos\dfrac{x}{m} + \cos x\right)$, как легко проверить, равны соответственно $2\pi m$, 2π и $2\pi m$.

Обозначим $T = 2\pi k$. Для произвольных попарно взаимно простых чисел m, n и k указаны функции f и g такие, что основные периоды функций f, g и $f + g$ равны соответственно mT, nT и $\frac{mnT}{k}$. Условию теоремы удовлетворяют функции $f\left(\frac{T}{T_0}x\right)$ и $g\left(\frac{T}{T_0}x\right)$.

Период суммы функций с несоизмеримыми периодами

Следующее утверждение почти очевидно.

Теорема 4. *Пусть f и g – периодические функции с несоизмеримыми основными периодами T_1 и T_2, а сумма этих функций $h = f + g$ периодична и имеет основной период T. Тогда число T несоизмеримо ни с T_1, ни с T_2.*

Доказательство. С одной стороны, если числа T и T_1 соизмеримы, то функция $g = h - f$ имеет период, соизмеримый с T_1. С другой стороны, в силу теоремы 1 любой период функции g кратен числу T_2. Получаем противоречие с несоизмеримостью чисел T_1 и T_2. Несоизмеримость чисел T и T_2 доказывается аналогично. □

Замечательным, и даже в некотором роде удивительным, является тот факт, что справедливо и утверждение, обратное к теореме 4. Широко распространено заблуждение о том, что сумма двух периодических функций с несоизмеримыми периодами не может быть функцией периодической. На самом же деле это не так. Более того, период суммы может быть любым положительным числом, удовлетворяющим утверждению теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть T_1, T_2 и T – попарно несоизмеримые положительные числа. Тогда существуют такие периодические функции f и g, что их сумма $h = f + g$ периодична, а основные периоды функций f, g и h равны соответственно T_1, T_2 и T.*

Доказательство. Доказательство вновь будет конструктивным. Наши построения будут существенно зависеть от того, представимо или не представимо число T в виде рациональной комбинации $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ (α и β – рациональные числа) периодов T_1 и T_2.

I. T не является рациональной комбинацией T_1 и T_2.

Пусть $A = \{mT_1 + nT_2 + kT \mid m, n, k \in \mathbb{Z}\}$ – множество целых линейных комбинаций чисел T_1, T_2 и T. Отметим сразу, что если число представимо в виде $mT_1 + nT_2 + kT$, то такое представление единственно. Действительно, если $m_1T_1 + n_1T_2 + k_1T = m_2T_1 + n_2T_2 + k_2T$, то

$$(k_1 - k_2)T = (m_2 - m_1)T_1 + (n_2 - n_1)T_2,$$

и при $k_1 \neq k_2$ получаем, что T рационально выражается через T_1 и T_2. Значит, $k_1 = k_2$. Теперь из несоизмеримости чисел T_1 и T_2 непосредственно получаются равенства $m_1 = m_2$ и $n_1 = n_2$.

Важным является тот легко проверяемый факт, что множества A и дополнение к нему $\overline{A}$ замкнуты относительно прибавления чисел из A: если $x \in A$ и $y \in A$, то $x + y \in A$; если $x \in \overline{A}$ и $y \in A$, то $x + y \in \overline{A}$.

Положим, что во всех точках множества $\overline{A}$ функции f и g равны нулю, а на множестве A зададим эти функции следующим образом:

$$f(mT_1 + nT_2 + kT) = nT_2 + kT,$$
$$g(mT_1 + nT_2 + kT) = mT_1 - kT.$$

Поскольку, как было показано, по числу $x \in A$ коэффициенты m, n и k линейной комбинации периодов T_1, T_2 и T восстанавливаются однозначно, указанные задания функций f и g корректны.

Функция $h = f + g$ на множестве $\overline{A}$ равна нулю, а в точках множества A равна

$$h(mT_1 + nT_2 + kT) = mT_1 + nT_2.$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что число T_1 – период функции f, число T_2 – период g, а T – период h. Покажем, что эти периоды – основные.

Сначала отметим, что любой период функции f принадлежит множеству A. Действительно, если $0 \neq x \in A$, $y \in \overline{A}$, то $x + y \in \overline{A}$ и $f(x + y) = 0 \neq f(x)$. Значит, $y \in \overline{A}$ – не период функции f.

Пусть теперь не равные друг другу числа x_1, x_2 принадлежат A и $f(x_1) = f(x_2)$. Из определения функции f отсюда получаем, что $x_1 - x_2 = lT_1$, где l – некоторое ненулевое целое число. Стало быть, любой период функции f кратен T_1. Таким образом, T_1 – действительно основной период f.

Точно так же проверяются утверждения относительно T_2 и T.

Замечание. В книге [4] на с. 172–173 приводится другая общая конструкция для случая I.

II. T – рациональная комбинация T_1 и T_2.

Представим рациональную комбинацию периодов T_1 и T_2 в виде $T=\frac{p}{q}\left(k_1T_1+k_2T_2\right)$, где k_1 и k_2 – взаимно простые целые числа, $k_1T_1 + k_2T_2 > 0$, а p и q – натуральные числа. Введем в рассмотрение множество $B=\left\{\frac{mT_1+nT_2}{q}\;\middle|\; m,\ n\in\mathbf{Z}\right\}$.

Положим, что во всех точках множества $\overline{B}$ функции f и g равны нулю, а на множестве B зададим эти функции следующим образом:

$$f\left(\frac{mT_1+nT_2}{q}\right)=\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{k_2}+\sqrt{2}\left\{\frac{n}{p}\right\}+\left\{\frac{n}{q}\right\}+\left\{\frac{m}{q}\right\};$$

$$g\left(\frac{mT_1+nT_2}{q}\right)=-\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{k_1}+\sqrt{2}\left\{\frac{m}{p}\right\}-\left\{\frac{n}{q}\right\}-\left\{\frac{m}{q}\right\}.$$

Здесь, как обычно, $[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа x.

Функция $h=f+q$ на множестве $\overline{B}$ равна нулю, а в точках множества B равна

$$h\left(\frac{mT_1+nT_2}{q}\right)=\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{k_2}-\frac{\left[\frac{m}{p}\right]}{k_1}+\sqrt{2}\left(\left\{\frac{m}{p}\right\}+\left\{\frac{n}{p}\right\}\right).$$

Непосредственной подстановкой несложно проверить, что число T_1 – период функции f, число T_2 – период g, а T – период h. Покажем, что эти периоды – основные.

Любой период функции f принадлежит множеству B. Действительно, если $0 \neq x \in B$, $y \in \overline{B}$, то $f(x) \neq 0$, $f(x + y) = 0 \neq f(x)$. Значит, $y \in \overline{B}$ – не период функции f.

Итак, всякий период функции f имеет вид $T_f=\frac{s_1T_1+s_2T_2}{q}$, где s_1 и s_2 – целые числа. Пусть $x=\frac{m}{q}T_1+\frac{n}{q}T_2$, $x\in B$. Если $n = 0$, то $f(x)$ – рациональное число. Теперь из рациональности числа $f(x + T_f)$ вытекает равенство $\left\{\frac{s_2}{p}\right\}=0$. Значит, имеем равенство $s_2 = \lambda p$, где λ – некоторое целое число. Соотношение $f(x + T_f) = f(x)$ принимает вид

$$\frac{\lambda}{k_2}+\left\{\frac{n+\lambda p}{q}\right\}+\left\{\frac{m+s_1}{q}\right\}=\left\{\frac{n}{q}\right\}+\left\{\frac{m}{q}\right\}. \tag{1}$$

Данное равенство должно выполняться при всех целых m и n. При $m = n = 0$ правая часть (1) равна нулю. Поскольку дробные части неотрицательны, получаем отсюда, что $\frac{\lambda}{k_2}\le 0$, а при $m = n = q - 1$ сумма дробных частей в правой части равенства (1) не меньше суммы дробных частей слева. Значит, $\frac{\lambda}{k_2}\ge 0$. Таким образом, $\lambda = 0$ и $s_2 = 0$. Поэтому период функции f имеет вид $T_f=\frac{s_1T_1}{q}$, а равенство (1) переходит в

$$\left\{\frac{n}{q}\right\}+\left\{\frac{m+s_1}{q}\right\}=\left\{\frac{n}{q}\right\}+\left\{\frac{m}{q}\right\}. \tag{2}$$

При $m = n = 0$ получаем $\left\{\frac{s_1}{q}\right\} = 0$, т.е. s_1 делится на q, а любой период функции f кратен T_1. Доказано, что T_1 – основной период функции f.

Аналогичные рассуждения применимы и к функции g.

Перейдем теперь к функции h. Так же, как и выше, устанавливаем, что период функции h должен быть вида $T_h = \frac{s_1T_1 + s_2T_2}{q}$, где s_1 и s_2 – целые числа. Из соотношений

$$h(0) = 0 = h(T_h) = \frac{\left[\frac{s_2}{p}\right]}{k_2} - \frac{\left[\frac{s_1}{p}\right]}{k_1} + \sqrt{2}\left(\left\{\frac{s_1}{p}\right\} + \left\{\frac{s_2}{p}\right\}\right) \tag{3}$$

получаем, что числа s_1 и s_2 должны быть кратны p, т.е. при некоторых целых λ_1 и λ_2 имеем $s_1 = \lambda_1 p$, $s_2 = \lambda_2 p$. Тогда соотношение (3) можно переписать в виде

$$\frac{\lambda_2}{k_2} - \frac{\lambda_1}{k_1} = 0.$$

Из равенства $\lambda_2 k_1 = k_2\lambda_1$ и взаимной простоты чисел k_1 и k_2, вытекает, что λ_2 делится на k_2. Отсюда для некоторого целого числа t справедливы равенства $\lambda_2 = k_2 t$ и $\lambda_1 = k_1 t$, т.е. $T_h = \frac{pt}{q}(k_1T_1 + k_2T_2)$.

Показано, что любой период функции h кратен периоду $T = \frac{p}{q}(k_1T_1 + k_2T_2)$, который, таким образом, является основным. □

Отсутствие основного периода

Теорема 6. *Пусть T_1 и T_2 – произвольные положительные числа. Тогда существуют такие периодические функции f и g, что их основные периоды равны соответственно T_1 и T_2, а их сумма $h=f+g$ периодична, но не имеет основного периода.*

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

I. Периоды T_1 и T_2 несоизмеримы.

Пусть $A = \{mT_1 + nT_2 + kT \mid m,n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Q}\}$. Как и выше, легко показать, что если число представимо в виде $mT_1 + nT_2 + kT$, то такое представление единственно.

Положим, что во всех точках множества $\overline{A}$ функции f и g равны нулю, а на множестве A зададим эти функции следующим образом:

$$f(mT_1 + nT_2 + kT) = nT_2 + kT,\ g(mT_1 + nT_2 + kT) = mT_1 - kT.$$

Несложно убедиться в том, что число T_1 – основной период функции f, число T_2 – основной период g, и при любом рациональном k число kT – период функции $h = f + g$, у которой, таким образом, нет наименьшего периода.

II. Периоды T_1 и T_2 соизмеримы.

Пусть $T_1 = mT_0, T_2 = nT_0$, где $T_0 > 0$, m и n – натуральные числа. Введем в рассмотрение множество $B = \left\{\left(l + \sqrt{2}k\right)T_0 \mid l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Q}\right\}$.

Положим, что во всех точках множества $\overline{B}$ функции f и g равны нулю, а на множестве B зададим эти функции так:

$$f\left(\left(l + \sqrt{2}k\right)T_0\right) = \left\{\frac{l}{m}\right\} + \sqrt{2}k;\quad g\left(\left(l + \sqrt{2}k\right)T_0\right) = \left\{\frac{l}{n}\right\} - \sqrt{2}k.$$

Функция $h = f + g$ на множестве $\overline{B}$ равна нулю, а в точках множества B равна

$$h\left(\left(l + \sqrt{2}k\right)T_0\right) = \left\{\frac{l}{m}\right\} + \left\{\frac{l}{n}\right\}.$$

Нетрудно проверить, что число $T_1 = mT_0$ – основной период функции f, число $T_2 = nT_0$ – основной период g, в то время как среди периодов функции $h = f + g$ есть все числа вида $\sqrt{2}kT_0$, где k – произвольное рациональное число. □

В основе конструкций, доказывающих теорему 6, лежит несоизмеримость периодов функции $h = f + g$ с периодами функций f и g. Приведем в заключение пример таких функций f и g, что все периоды функций f, g и $f + g$ соизмеримы между собой, но у f и g есть основные периоды, а у $f + g$ – нет.

Пусть m – некоторое фиксированное натуральное число, M – множество несократимых нецелых дробей, числители которых кратны m. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in M; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x \in m\mathbb{Z}; \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } x \in \mathbb{Z} \setminus m\mathbb{Z}; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } x \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in M \cup m\mathbb{Z}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Легко видеть, что основные периоды функций f и g равны соответственно m и 1, в то время как сумма $f + g$ имеет периодом любое число вида m/n, где n – произвольное натуральное число, взаимно простое с m.

Литература

1. Математический энциклопедический словарь/ Гл. ред. Ю.В. Прохоров – М.: Сов. энциклопедия, 1988.

2. Микаэлян Л.В., Седракян Н.М. О периодичности суммы периодических функций// Математическое образование. – 2000. – № 2(13). – С. 29–33.

3. Геренштейн А.В., Эвнин А.Ю. О сумме периодических функций// Математика в школе. – 2002. – № 1. – С. 68–72.

4. Ивлев Б.М. и др. Сборник задач по алгебре и началам анализа для 9 и 10 кл. – М.: Просвещение, 1978.

Поступила в редакцию 18 августа 2004 г.