

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ В ЦИЛИНДРЕ, СОВЕРШАЮЩЕМ ЗАТУХАЮЩИЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Г.П. Вяткин, И.В. Елюхина

Проведен обзор и анализ возможностей существующих методик для моделирования и наблюдения вязкопластичного поведения среды, заполняющей совершающий крутильные колебания цилиндр. Изучены особенности течения идеальных сред, а также методология их численного моделирования. В рамках измеряемых в эксперименте параметров колебаний продемонстрирована степень соответствия приближенных моделей идеальной бингамовской жидкости.

Введение. Ранее были изучены возможности крутильно-колебательного метода по наблюдению и измерению неньютоновских, в т.ч. вязкопластичных (бингамовских), свойств [1]. В работе ставилась задача идентификации реологического типа среды – выявления эффектов (прежде всего, качественных), присущих именно бингамовским средам и связанных с появлением пластической составляющей в уравнении состояния. Поэтому интерес представляла идеальная вязкопластичная среда и, в частности, псевдопластичное (нелинейно вязкое) состояние не рассматривалось. В реальности среды, свойства которых обычно исследуются такими вискозиметрическими методами, скорее «жидко-», а не «вердоподобны», т.е. хоть и слабо, но текут при любой не равной нулю скорости сдвига. В связи с этим интересным представляется рассмотрение иных возможных моделей вязкопластичного поведения с различными значениями модельных коэффициентов, отражающих различную степень неньютоновости свойств.

Математическая формулировка задачи. Кратко напомним основные условия движения [1]. Пусть пустой цилиндр подвешен вдоль своей оси на упругой нити и совершает вокруг нее крутильные колебания с периодом τ_0 и декрементом затухания δ_0 . При заполнении его вязкопластичной средой изосинхронный режим колебаний в общем случае нарушается, и колебательный процесс можно охарактеризовать параметрами $\tau = 2\Delta T_\tau$ и $\delta = 2\ln|\alpha_1/\alpha_2|$, где ΔT_τ – разница между двумя соседними моментами времени, когда угловое смещение цилиндра α обращается в нуль; α_1, α_2 – соседние экстремальные значения α ($|\alpha_1| > |\alpha_2|$). Период $\tau > \tau_0$ вследствие того, что при увлечении жидкости стенками цилиндра возрастает эффективный момент инерции подвесной системы; $\delta > \delta_0$ в связи с дополнительной диссипацией механической энергии, обусловленной вязким трением в жидкости.

Математическую модель движения сосуда, непосредственно связанного с возбуждаемым им движением среды, для случая длинного цилиндра и прочих традиционных для метода допущениях представим в виде

– уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_{\xi\varphi}}{\partial \xi} + \frac{2\sigma_{\xi\varphi}}{\xi}; \quad (1)$$

– уравнение движения цилиндра

$$\frac{d^2 \alpha}{dT^2} + \frac{\delta_0}{\pi} \frac{d\alpha}{dT} + \alpha = P; \quad (2)$$

– начально-краевые условия для (1), (2):

$$U(\xi, 0) = 0, \quad U(\xi_0, T) = \frac{d\alpha}{dT} \xi_0, \quad U(0, T) = 0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \sim 6^\circ, \quad \left. \frac{d\alpha}{dT} \right|_{T=0} = 0; \quad (3)$$

– реологическое уравнение состояния вязкопластичной среды (модель Бингама – см. [2, 3, 4] и пр.)

$$\sigma_{\xi\varphi} = \begin{cases} (1 + Bm/D) D_{\xi\varphi} & \text{при } \sigma \geq Bm, \\ D_{\xi\varphi} = 0 & \text{при } \sigma < Bm; \end{cases} \quad (4)$$

где

$$P = -\frac{4}{\xi_0^2} A \sigma_{\xi\varphi} \Big|_{\xi=\xi_0}, \quad D_{\xi\varphi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi}, \quad A = \frac{MR^2}{2K}, \quad Bm = \frac{S_0}{\nu \rho q_0},$$

$$U = V/dq_0, \quad T = q_0 t, \quad \xi_0 = R/d, \quad \xi = r/d, \quad d = \sqrt{\nu/q_0}, \quad q_0 = 2\pi/\tau_0; \quad (5)$$

A – отношение момента инерции жидкости в вискозиметре ($MR^2/2$) и пустой подвесной системы (K); Bm – число Бингама; d – толщина пограничного слоя; D – безразмерный второй инвариант тензора скоростей деформации, для рассматриваемых условий течения $D = |D_{\xi\varphi}|$; $D_{\xi\varphi}$ – безразмерная $\xi\varphi$ -ая компонента тензора скоростей деформации; M – масса среды; P – момент сил, приложенных к цилиндру со стороны среды; q_0 – циклическая частота колебаний пустого цилиндра; R – внутренний радиус цилиндра; r – радиальная координата ($r = 0$ на оси цилиндра); t – время; V – азимутальная компонента скорости; α_0 – начальное угловое смещение цилиндра; φ – угловая координата; ν , ρ , S_0 – кинематическая вязкость, плотность и предел текучести среды соответственно; σ – безразмерный второй инвариант тензора напряжений; $\sigma_{\xi\varphi}$ – безразмерная $\xi\varphi$ -я компонента тензора напряжений; задача (1)–(4) решается численно.

Результаты и обсуждение. I. Идеальная вязкопластичная среда. Особенности течения жидкости и крутильных колебаний цилиндра. Прежде всего, остановимся на качественных особенностях движения цилиндра (см. также и в [1]), совершающего затухающие крутильные колебания, и заполняющей его идеальной вязкопластичной среды, а также выполним экскурс в способы моделирования такого движения, т.к. эти вопросы необходимы для дальнейшего понимания отклика параметров колебаний на течение не идеальной среды в сосуде.

При заполнении вискозиметра вязкопластичной средой около оси цилиндра всегда присутствует твердое ядро, где сдвиговые напряжения не превосходят предела текучести. В потоке также имеется тонкий твердотельный слой, возникающий у поверхности цилиндра, перемещающийся затем к ядру, граница которого движется в это время от центра, и при достижении ядра сливающийся с ним; в следующую четверть периода происходит обратное движение; далее в новом полупериоде при $\xi = \xi_0$ вновь образуется такой слой (в общем случае их может быть несколько) и т.д. Зависимость, к примеру, радиуса ядра ξ' от времени является периодической функцией; колебания $\xi' = \xi'(T)$ обычно нарастающие, а кривая, отражающая среднее значение, является вогнутой возрастающей функцией. Эти колебания не гармонические, даже если не учитывать резкий скачок ξ' при слиянии ядра и слоя, а спектр $\xi' = \xi'(T)$ в целом аналогичен таковому для $\alpha = \alpha(T)$ (основная частота $\xi' = \xi'(T)$ равна $4\pi/\tau^1$, где τ^1 – соответствует гармонике с наибольшей интенсивностью на спектре $\alpha = \alpha(T)$). В застойных, или твердотельных, зонах скорость U по координате ξ изменяется линейно: $dU/d\xi - U/\xi = 0$, и, в частности, в случае, когда твердое ядро заполняет весь объем вискозиметра, $U(\xi, T) = d\alpha/dT \cdot \xi$. Таким зонам соответствуют прямолинейные участки, начиная от $\xi = 0$, на профилях скорости сдвига и скорости среды, а также участки с искривлением профиля скорости сдвига при смене знака D .

С ростом номера колебания N в процессе затухания область «твердотельного» течения растет, и при $N \geq N_{ms}$ твердое ядро заполняет весь объем вискозиметра. В этом случае эффективный момент инерции системы достигает своей наибольшего значения ($MR^2/2 + K$), а вместе с ним наибольшим становится и период, прямо пропорциональный корню квадратному из этой величины. Значение δ тогда минимально и совпадает с δ_0 ввиду отсутствия диссипации меха-

нической энергии вследствие вязкого трения. Зависимость безразмерной частоты колебаний заполненного жидкостью цилиндра $\lambda = \tau / \tau_0$ от N является монотонно возрастающей и тем быстрее достигает значения λ_{me} (при $N \geq N_{me}$ режим колебаний так же изосинхронный, как и для ньютоновской среды), чем больше Bm . Зависимость $\delta = \delta(N)$ сначала растет до некоторого значения δ_m , одинакового для всех чисел Bm при прочих равных условиях, а затем сравнительно быстро падает до $\delta \sim \delta_0$. При увеличении числа Bm кривая $\delta = \delta(N)$ смещается к оси ординат и становится монотонно убывающей. В подобной ситуации наблюдаемые в эксперименте эффекты, связанные с вязкопластическим поведением среды, обусловлены, прежде всего, не гармоническим законом колебаний даже в отсутствии переходных процессов. Поэтому для большей наблюдаемости таких эффектов должна быть большей разница между значениями частоты $\lambda_1 = \lambda|_{N=1}$ и декремента $\delta_1 = \delta|_{N=1}$ в начале колебательного процесса и значениями λ_{me} и δ_m, δ_0 соответственно. К тому же, желательно, чтобы колебания затухали дольше, чем достигались значения δ_0 и λ_{me} , число N было достаточным, но в то же время чувствительности $\partial\lambda/\partial Bm$ и $\partial\delta/\partial Bm$ (а также и $\partial\lambda/\partial N, \partial\delta/\partial N$) имели высокие значения. Выбор оптимальных условий эксперимента можно выполнить аналогично приведенному, например, в [5].

Способы численного моделирования. Расчет по идеальной модели для вязкопластичной среды, так же как и учет конечной длины цилиндра, значительно усложняет численные формулировки и в общем случае не позволяет обеспечить требуемую точность и в ряде случаев сходимость к истинному устойчивому решению при заданных требованиях к эксперименту. Так, в частности, численные модели, основанные на определении на каждом временном слое радиуса твердого ядра вязкопластического течения аналогично выполняемому при стационарных течениях, к примеру, в капиллярной реометрии, не позволяют корректно промоделировать твердотельные прослойки, наличие которых изменяет напряжение на стенке цилиндра, внося зачастую существенные ошибки в закон колебаний. К тому же, при определенных условиях эксперимента и само определение радиуса ядра ξ' вызывает значительные трудности ввиду неоднозначности знака в распределении скорости сдвига вдоль радиуса цилиндра. Заметим также, что наличие слагаемых в системе уравнений цилиндра и среды, связанных с торцевыми эффектами (необходимых в случае не 'длинного' цилиндра), делает овраг функции качества, являющейся критерием соответствия расчетных и экспериментальных данных, на плоскости (ν, σ_0) еще более пологим и практически невозможным корректную оценку свойств среды при реализуемой на практике точности измеряемых параметров (подробнее о построении функции качества, планировании оптимального эксперимента и пр. – см., к примеру, [5]).

В связи с вышесказанным для описания идеального бингамовского поведения в качестве основной рабочей модели была выбрана модель bi-viscosity (см, например, [6, 7, 8]), обеспечивающая при решении этой внутренней гидродинамической задачи хорошую сходимость с идеальной вязкопластичной жидкостью. Напомним, что в модели движение нетекучей компоненты рассматривается как движение ньютоновской среды, вязкость которой намного превосходит вязкость текучей компоненты:

$$\sigma_{\xi\varphi} = \begin{cases} (1 + Bm/D)D_{\xi\varphi} & \text{при } D \geq D_0, \\ k_\sigma D_{\xi\varphi} & \text{при } D < D_0; \end{cases} \quad (6)$$

где $D_0 = Bm/(k_\sigma - 1)$ – значение D , соответствующее переходу среды между нетекучим состоянием и вязкопластическим течением; k_σ – модельный коэффициент; здесь пластическая вязкость равна 1, а ньютоновская – k_σ . В обсуждаемой задаче для лучшего соответствия модели (6) идеальному вязкопластичному поведению значение k_σ принималось достаточно высоким $\sim 10^3$ (обычно $k_\sigma \sim 10^2$). Такое приближение дает удовлетворительные результаты: при $k_\sigma \sim 10^3 \dots k_\sigma \sim 10^4$ расхождение в рассчитанных значениях параметров колебаний составляло даже в наихудшем случае менее 0,1 %.

II. Неидеальная вязкопластичная среда. Модели вязкопластичного поведения. При моделировании не идеального бингамовского поведения рассмотрим все возможные варианты:

1) модель bi-viscosity (6) с различными значениями модельного коэффициента k_σ ;

2) экспоненциальную зависимость эффективной вязкости от модуля скорости сдвига, предложенную в [9], и также, как и bi-viscosity, широко используемую на практике (см., например, [10, 11] и пр.)

$$\sigma_{\xi\varphi} = \left\{ 1 + \frac{Bm}{D} [1 - \exp(-mD)] \right\} D_{\xi\varphi}; \quad (7)$$

где m – параметр, контролирующий экспоненциальный рост напряжения, который обычно в расчетах при моделировании бингамовского поведения принимается $\sim 10^2$;

3) реологическое уравнение состояния нелинейно вязкой среды с показателем степенного реологического закона $n < 1$ (модель Оствальда – Вейля – см., например, [12])

$$\sigma_{\xi\varphi} = bD^{n-1}D_{\xi\varphi}; \quad (8)$$

где $b = q_0^{n-1}k/v\rho$, k – постоянная степенного реологического закона.

Для описания нелинейностей, возникающих на экспериментальных кривых течения бингамовских сред в диапазоне малых скоростей сдвига, используются модели нелинейного вязкопластичного поведения: Кессона, Балкли–Гершеля и пр., а также модель Шульмана, сочетающая в разных нелинейных мерах пластичность и нелинейную вязкость и обобщающую большинство известных моделей. Особенности колебательных процессов при заполнении вискозиметра такими средами (на примере реологической модели Балкли–Гершеля) были изучены в [1].

Далее примем следующие условия эксперимента: $\xi_0 = 10$, $A = 0,1$, $\delta_0 \leq 0,001$, и будем моделировать течение среды с числом Бингама $Bm = 0.5$. Для наглядности реологических схем расчета приведем также кривую течения – зависимость напряжения от модуля скорости сдвига (см. рис. 1), показывающую как приближает та или иная модель поведение реальной среды к идеальному вязкопластичному в диапазоне D , реализуемом в вискозиметре. Параметры моделей (6)–(8), принятые для расчетов, следующие:

- модель (6) (пунктирные линии на рис. 1 и далее): 1 – $kr = 10$, 2 – $kr = 100$;
- модель (7) (штрихпунктирные линии): 1 – $m = 10$, 2 – $m = 100$;
- модель (8) (сплошные линии): 1 – $b = 0,75$ и $n = 0,9$, 2 – $b = 1,25$ и $n = 0,7$.

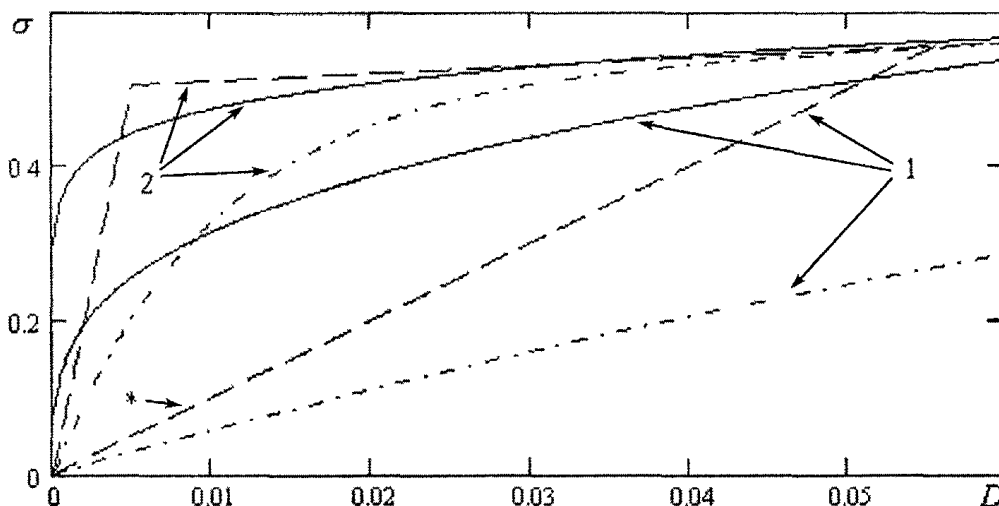


Рис. 1. Кривые течения неидеальных вязкопластичных сред

Изменение параметров колебаний при движении цилиндра. Зависимость параметров колебаний от их номера для сред со сложными реологическими свойствами продемонстрирована на рис. 2. В случае идеального вязкопластичного материала после установления ‘твердотельного’ режима течения (когда $N \geq N_{ms}$) значения $\delta \sim \delta_0$ и $\lambda \sim \lambda_{ms} = (1 + A)^{1/2}$ (повторим, что результаты расчетов по идеальной среде получены в рамках модели bi-viscosity с коэффициентом $k_\sigma \sim 10^3$

и приведены в [1]). В остальных расчетных ситуациях при $N \geq N_{me}$ еще присутствует диссипация вследствие вязкого трения, и $\delta > \delta_0$; а $\lambda < \lambda_{me}$, т.к. не вся жидкость внутри цилиндра выполняет роль «присоединенной» массы. Из рис. 2 можно увидеть какой степенью неньютоновости обладают среды с рассматриваемыми реологическими уравнениями состояния согласно этой особенности. Значения параметров колебаний при аналогичных условиях эксперимента для ньютоновской среды $\lambda_{ньют} \sim 1,014$ и $\delta_{ньют} \sim 0,069$, а $\lambda_{me} \sim 1,049$. Наилучшее приближение к идеальной бингамовской среде из представленных на рис. 1 вариантов обеспечивает модель bi-viscosity с $k_\sigma = 100$, что согласуется результатами, касающимися изменения параметров колебаний во времени (рис. 2а, б).

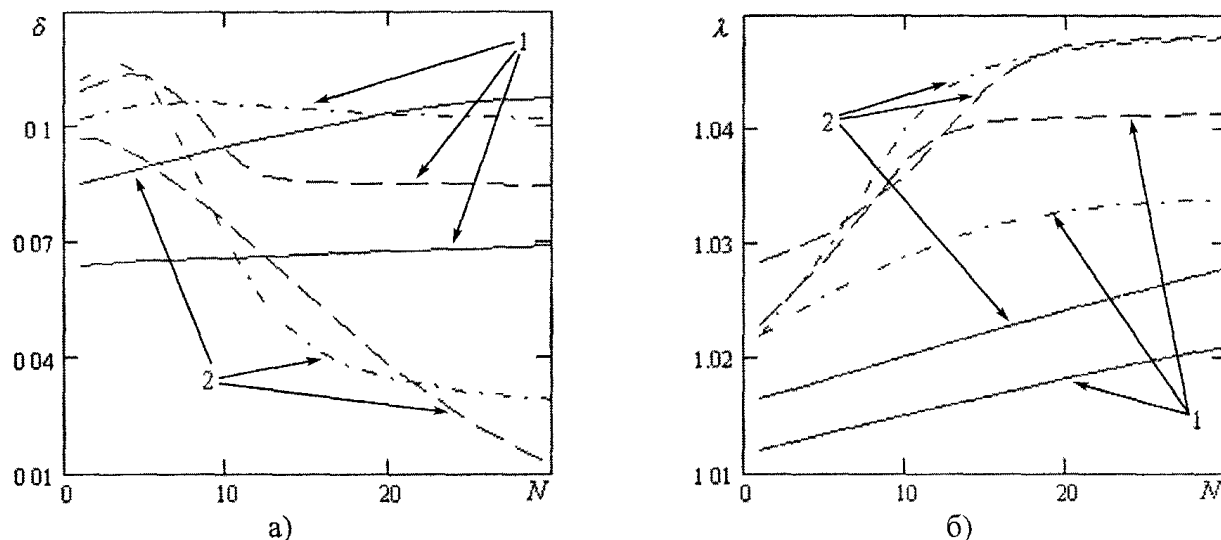


Рис. 2. Зависимость параметров колебаний от их номера

На зависимостях $\delta = \delta(N)$ и $\lambda = \lambda(N)$ (рис. 2а, б) имеются участки, где $\delta, \lambda \sim const$. Они, например, в модели bi-viscosity, отвечают вискозиметру, полностью заполненному нстекучей средой. В терминах модели (б) при низких значениях k_σ это участки, которым соответствует течение ньютоновской среды с вязкостью, равной k_σ . Так, при вязкости, равной $k_\sigma = 10$ (вместо 1) параметры колебаний при расчете по зависимости для ньютоновской среды $\lambda \sim 1,041$ и $\delta \sim 0,0856$ (соответствуют кривой течения (прямой), обозначенной знаком *, на рис. 1). При вязкости, равной 100, значения $\lambda \sim 1,0486$ и $\delta \sim 0,0113$, что отвечает величинам, указанным на рис. 2 а, б. Выход на режим с $\delta(N), \lambda(N) \sim const$ в случае проведенного расчета происходит быстрее при более низком k_σ . Это можно объяснить тем обстоятельством, что при меньшем k_σ интервал значений D , при которых вязкость постоянна, шире и к тому же в этом случае декремент затухания выше, что обеспечивает более быстрый выход при меньшем N . Участки $\delta, \lambda \sim const$ горизонтальны (к примеру, при $k_\sigma = 10$), т.е. как и в случае колебаний идеальной среды при $N \geq N_{me}$, но значения δ_0 и λ_{me} в этом случае не достигаются, т.к. такой вариант является слабым приближением идеальной бингамовской жидкости. Смещение кривых $\delta = \delta(N)$ и $\lambda = \lambda(N)$ с изменением модельного коэффициента в некотором смысле аналогично реализуемому при изменении числа Bm и прочих равных условиях для идеальных сред, т.е. чем сильнее влияние пластичности, тем больше смещается к оси ординат, а затем и вовсе исчезает, максимум функции $\delta = \delta(N)$; для сред с бóльшими модельными коэффициентами значения λ_1 и $\partial\lambda/\partial Bm$ выше и пр. Так, к примеру, с ростом k_σ (при $k_\sigma \sim 10^2$ и выше) происходит подобное смещение указанных кривых, и выход на режим с постоянными значениями частоты и декремента затухания обычно происходит быстрее.

При увеличении чисел Бингама при некотором $Bm = Bm'$ напряжение в среде становится недостаточным для сдвига, обеспечивающего возникновение текучей фазы, и с самого начала коле-

бательных процессов вискозиметр полностью заполнен твердой зоной. При таком сдвиге, хотя и малом даже для $N = 1$ (с ростом N при одном и том же режиме течения амплитуда $D = D(T)$ становится меньше), ввиду перестройки напряжений в потоке возможно существование течения и при $N > 1$. При малых Vm с ростом этого числа кривые $\delta = \delta(N)$ и $\lambda = \lambda(N)$ смещаются последовательно, а при Vm' происходит скачок и далее при всех Vm параметры колебаний для идеальной вязкопластичной среды $\delta \sim \delta_0$ и $\lambda \sim \lambda_{ms}$. При уменьшении Vm значения λ_1 и δ_1 приближаются к $\lambda_{ньюто}$ и $\delta_{ньюто}$, а при $Vm \ll 0,01$ они практически им равны (по рис. 2 можно проследить, как влияет наличие пластичных свойств на λ_1, δ_1). Зависимости параметров колебаний от их номера в этом случае также аналогичны приведенному на рис. 2 а, б: декремент сначала растет, а потом падает; период растет монотонно, начиная от $\lambda_{ньюто}$, и в процессе затухания колебаний реализуется больший интервал значений λ и δ .

Для ньютоновских сред (рис. 3 в [13]) величина λ уменьшается с ростом ξ_0 в основном на интервале $\xi_0 \in (2 \dots 12)$, а поведение δ зависит от величины ξ_0 : при $\xi_0 > \xi_{0\delta}$ с ростом ξ_0 декремент уменьшается, а при $\xi_0 < \xi_{0\delta}$ – растет, где $\xi_{0\delta} \sim 4,2$. Эти закономерности подтверждаются и в случае вязкопластичных сред. Так, представим последние среды с очень высокой вязкостью (в k_σ раз выше, чем у ньютоновской – см. (6)) и в качестве ξ_0 рассмотрим величину $\xi_{0bi} = \xi_0 / \sqrt{\tilde{k}_\sigma}$, где \tilde{k}_σ – усредненная по полупериоду кажущаяся вязкость. В процессе колебаний \tilde{k}_σ растет, и значение ξ_{0bi} уменьшается. Значение $\xi_{0bi} \sim 4,2$, и, к примеру, соответствует экстремуму $\delta = \delta(N)$ на рис. 2а. Заметим, что если с самого начала колебательных процессов реализуется значение $\xi_{0bi} < 4,2$, то зависимость $\delta = \delta(N)$ – монотонно убывающая.

Поясним эту качественную картину с иной стороны. Рассмотрим бингамовскую среду как псевдопластичную с реологическими свойствами, соответствующими (8). Тогда $\xi_{0nv} = \xi_0 / \sqrt{b\tilde{D}^{n-1}}$, где \tilde{D} – усредненное по полупериоду значение D при $\xi = \xi_0$. С ростом N амплитудное значение скорости сдвига уменьшается, и кажущаяся вязкость $b\tilde{D}^{n-1}$ растет, а значение ξ_{0nv} падает. Для ньютоновских сред при значениях $\xi_0 \rightarrow 0$ с уменьшением ξ_0 период растет слабо, а декремент при $\delta_0 \sim 0$ устремляется к нулю [13]. Также и для нелинейно вязких (псевдопластичных) сред в результате колебаний происходит выход на асимптотический режим, характеризуемый мало изменяющимися во времени значениями λ_{ac} . При уменьшении ξ_0 в интервале $\xi_0 \in (3 \dots 1)$ происходит сильное падение δ , что соответствует участку кривой $\delta = \delta(N)$ после максимума; при $\xi_0 \rightarrow 0$ значения декремента δ_{ac} соответствуют параметрам колебаний сильно вязкой среды.

Некоторые особенности течения вязкопластичных сред в цилиндре. С помощью реологической модели нелинейно вязкой среды можно наглядно объяснить распределение скорости течения вдоль радиуса цилиндра. Для таких сред можно выделить два вида течения: при вязкости больше и меньше ньютоновской, в зависимости от чего граница области развитого течения приближается или удаляется от цилиндра по сравнению с ньютоновской. При $n < 1$ кривые течения имеют выпуклость вверх, к оси напряжений (рис. 1), при $n > 1$ – вниз, а для ньютоновской среды, при $n = 1$, это прямые. Вязкость (кажущаяся, определяемая отношением напряжения и скорости сдвига) при малых скоростях сдвига в случае $n < 1$ имеет значение выше, чем для среды с $n = 1$, до точки пересечения кривой, ей соответствующей, с прямой, отвечающей $n = 1$, а с ростом D становится ниже. Глубина проникновения пропорциональна кажущейся вязкости bD^{n-1} , которая для псевдопластичных сред при данных условиях эксперимента (когда $D < 1$) падает с ростом n и D . Это означает, что для дилатантных сред (с $n > 1$) область развитого течения находится вблизи стенки цилиндра и при численном моделировании расчеты необходимо проводить в интервале $\xi \in [\xi_1, \xi_0]$, где ξ_1 определяется как $U(0 \dots \xi_1, T) \sim 0$, а для псевдопластичных – в ряде

случаев брать большее число точек у оси цилиндра. Для бингамовской жидкости (как и для псевдопластичной) также характерен рост области развитого течения по сравнению с ньютоновской, что хорошо можно наблюдать, к примеру, при колебаниях тела в безграничной среде. Это обусловлено, прежде всего, увлечением жидкости твердыми прослойками. Заметим, что если напряжение сдвига между «твердотельным» слоем и ядром недостаточно для возникновения течения в этой области, то при N , близком к N_{mv} , «твердотельная» фаза может быть представлена только ядром (с присоединенным к нему слоем).

Заключение. Итак, в настоящей работе обсуждены особенности приложения, в т.ч. численного моделирования, существующих вариантов описания вязкопластичного идеального и не идеального поведения жидкости применительно к среде, заполняющей совершающий затухающие крутильные колебания цилиндр, а именно: моделей Бингама, bi-viscosity, Папанастасио и Оствальда – Вейля. В терминах измеряемых в эксперименте параметров продемонстрирована наблюдаемость неньютоновских свойств (для ньютоновских сред в отсутствии переходных процессов параметры колебаний не изменяются во времени), а также показано, насколько существующие модели могут служить приближением для идеального бингамовского поведения.

Литература

1. Елюхина И.В., Вяткин Г.П., Бескачко В.П. Новые возможности крутильно-колебательного метода Швидковского Е.Г.: идентификация реологической принадлежности среды // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2003. – Вып. 3. – № 6(22). – С. 108–115.
2. Bird R.B., Dai G.C., Yarusso B.J. The rheology and flow of viscoplastic materials // Rev. in Chem. Eng. – 1983. – № 1. – P. 1–70.
3. Barnes H.A. The yield stress – a review or «panta roi» – everything flows? // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 1999. – № 81. – P. 133–178.
4. Shelukhin V.V. Bingham viscoplastic as a limit of non-newtonian fluids // J. Math. Fluid Mech. – 2002. – № 4. – P. 109–127.
5. Вяткин Г.П., Елюхина И.В. Разработка методов параметрической идентификации сред Оствальда–Вейля по результатам вибрационной реометрии // Вестник ЮУрГУ. Серия «Металлургия». – 2004. – Вып. 4. – № 8(37). – С. 22–27.
6. Keentok M., Milthorpe J.F., O'Donovan E. On the shearing zone around rotating vanes in plastic liquids: theory and experiment // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 1985. – № 17. – P.23–35.
7. Alkhatib M.A.M, Wilson S.D.R The development of Poiseuille flow of a yield-stress fluid // J. Non-Newtonian Fluid. Mech. – 2001. – № 100. – P. 1–8.
8. Beverly C.R., Tanner R.I. Numerical analysis of three-dimensional Bingham plastic flow // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 1992. – V. 42. – P. 85–115.
9. Papanastasiou T.C. Flows of materials with yield // J. Rheol. – 1987. – № 31. – P. 385–404.
10. Smyrniotis D.N., Tsamopoulos J.A. Squeeze flow of Bingham plastics // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 2001. – № 100. – P. 165–190.
11. Blackery J., Mitsoulis E. Creeping motion of a sphere in tubes filled with a Bingham plastic material // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 1997. – № 70. – P. 59–77.
12. Fang P., Manglik R.M., Jog M.A. Characteristics of laminar viscous shear-thinning fluid flows in eccentric annular channels // J. Non-Newt. Fluid Mech. – 1999. – № 84. – P. 1–17.
13. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.

Поступила в редакцию 26 января 2005 г.