УДК 519.633.6

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ

А.В. Геренштейн, Х.Б. Толипов

Для классической задачи Рэлея предложен иной подход к определению скорости поверхностной волны.

В работе [1] было получено решение задачи об установившихся колебаниях упругого полупространства, которое получило название поверхностной волны (или волны Рэлея).

Во всех обзорах и учебниках, где это решение излагается, скорость волны Рэлея определялась после получения явного решения. Однако для других областей (например, клина) получение решения в конечном виде весьма проблематично. Но так как исходные уравнения – линейные, с постоянными коэффициентами, то для определенных областей с помощью преобразования Лапласа можно перейти к уравнениям в изображениях и попытаться найти скорость интересующей нас волны (если скорости нет, то и волны нет). Это авторы и попытались сделать на примере классической задачи Рэлея.

Рассмотрим в плоской постановке задачу колебаний полупространства ($x > 0$), граница которого свободна от напряжений. Отыскиваем решения, не зависящие от переменной z и затухающие при $x \to \infty$.

Уравнения для смещений имеют вид:

$$\rho U_{tt} = (\lambda + \mu)(U_{xx} + V_{xy}) + \mu\,(U_{xx} + U_{yy}),$$
$$\rho V_{tt} = (\lambda + \mu)(U_{xy} + V_{yy}) + \mu\,(V_{xx} + V_{yy}), \tag{1}$$

где U и V – смещения, соответственно, вдоль осей x, y.

Краевые условия на поверхности (x = 0) имеют вид:

$$\sigma_{zz} = \lambda\,(U_x + V_y) + 2\,\mu\, U_x = 0,$$
$$\sigma_{xy} = \mu\,(U_y + V_x), \tag{2}$$

Предварительно сделаем замену, введя новые искомые функции:

$$U = \varphi_x + \psi_y,\ V = \varphi_y - \psi_x, \tag{3}$$

В этом случае уравнения (1) примут вид:

$$\rho\varphi_{tt} = (\lambda+2\mu)\,(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}),$$
$$\rho\psi_{tt} = \mu\,(\psi_{xx} + \psi_{yy}). \tag{4}$$

Краевые условия (2) при x = 0 принимают вид:

$$(\lambda+2\mu)\varphi_{xx} + \lambda\,\varphi_{yy} - 2\,\mu\,\psi_{xy} = 0.$$
$$2\,\varphi_{xy} - \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0.$$

Из уравнений (4) найдем φ_{zz} и ψ_{zz} и подставим в краевые условия. В итоге получим:

$$\frac{\rho}{2\mu}\varphi_{tt} - \varphi_{yy} + \psi_y = 0,$$
$$\frac{\rho}{2\mu}\psi_{tt} - \psi_{yy} + \varphi_{xy} = 0. \qquad (5)$$

Удобно изменить масштаб времени и координат (обезразмерив их)

$$kt\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \mapsto t,\ kx \mapsto x,\ ky \mapsto y$$

(k – волновое число) и обозначить:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = c^2, \qquad (c^2 > 2)\ .$$

В итоге уравнения примут вид:

$$\varphi_{tt} = c^2\,(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}),$$

$$\psi_{tt} = \psi_{xx} + \psi_{yy}. \qquad (6)$$

Граничные условия примут вид

$$\frac{1}{2}\varphi_{tt} - \varphi_{yy} + \psi_{xy} = 0,$$
$$\frac{1}{2}\psi_{tt} - \psi_{yy} + \varphi_{xy} = 0. \qquad (7)$$

Отыскивается решение вида:

$$\varphi = \varphi(x)\exp i(y - \omega t), \qquad \psi = i\psi(x)\exp(y - \omega t), \qquad (8)$$

Если v – скорость волны Рэлея, то $\omega = v\sqrt{\rho/\mu}$. Эту величину и надо определить.

После преобразований уравнения примут вид:

$$\varphi_{xx} + \frac{\omega^2 - c^2}{c^2}\varphi = 0,$$

$$\psi_{xx} + \left(\omega^2 - 1\right)\psi = 0, \qquad (9)$$

Конечно, система (9) легко решается, но наша задача – определить ω, не получая явного решения.

Краевые условия примут вид:

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)\varphi(0) - \psi_x(0) = 0,$$
$$\left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)\psi(0) + \varphi_x(0) = 0. \qquad (10)$$

Применим преобразование Лапласа:

$$\overline{\varphi}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\varphi(x)dx, \qquad \overline{\psi}(p) = \int_0^\infty e^{-px}\psi(x)dx.$$

Напомним, что при этом

$$\varphi(x) \leftrightarrow \overline{\varphi}\,(p),\ \ \varphi_x(x) \leftrightarrow p\,\overline{\varphi}\,(p) - \varphi(0),\ \varphi_x(x) \leftrightarrow p^2\,\overline{\varphi}\,(p) - p\varphi(0) - \varphi_x(0),$$

$$\psi(x) \leftrightarrow \overline{\psi}\,(p),\ \ \psi_x(x) \leftrightarrow p\,\overline{\psi}\,\ (p) - \psi\,(0),\ \psi_x(x) \leftrightarrow p^2\,\overline{\psi}\,\ (p) - p\,\psi\,(0) - \psi_x(0).$$

Получим уравнения в изображениях:

$$\left(p^2+\frac{\omega^2-c^2}{c^2}\right)\overline{\varphi}(p)=p\varphi(0)+\varphi_x(0),$$

$$\left(p^2+\omega^2-1\right)\overline{\psi}(p)=p\psi(0)+\psi_x(0).$$

$\varphi_x(0)$ и $\psi_x(0)$ выразим из краевых условий (10) через $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ и получим решение в изображениях:

$$\overline{\varphi}(p)=\frac{p\varphi(0+\left(0,5\omega^2-1\right)\varphi(0)}{p^2+\dfrac{\omega^2-c^2}{c^2}}, \tag{11}$$

$$\overline{\psi}(p)=\frac{p\psi(0)+\left(0,5\omega^2-1\right)\psi(0)}{\left(p^2+\omega^2-1\right)}. \tag{12}$$

Если $\omega^2\geq 1$, то в формуле (12) полюса чисто мнимые. При этом оригинал будет иметь слагаемые типа синуса и косинуса, т.е. решения не затухают на бесконечности.

Поэтому должно быть $\omega^2<1$.

Тогда в каждом из выражений (11), (12) один из полюсов будет положительный, другой отрицательный

Необходимо, чтобы вычеты в положительных полюсах были нулевыми (иначе получим экспоненциальный рост на бесконечности). При этом $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ не должны одновременно равняться нулю.

Надо найти вычет (или величину, пропорциональную вычету) для (11) – в точке $p=\sqrt{(c^2-\omega^2)/c^2}$, а для (12) – в точке $p=\sqrt{1-\omega^2}$, и приравнять эти вычеты нулю.

Получаем систему:

$$\frac{\sqrt{c^2-\omega^2}}{\omega}\varphi(0)+\frac{\omega^2-2}{2}\psi(0)=0, \tag{13}$$

$$\left(\frac{\omega^2-2}{2}\right)\varphi(0)+\sqrt{1-\omega^2}\psi(0)=0.$$

Однородная система относительно $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ должна иметь ненулевые решения, поэтому определитель должен равняться нулю.

Проводя несложные преобразования, приходим к известному уравнению:

$$\omega^6-8\omega^4+4\left(c^2+2\right)\omega^2-4c^2=0, \tag{14}$$

где $c^2=\lambda+2\mu/\mu$.

Как известно из [1–4] это уравнение имеет вещественный корень (относительно ω^2) $\omega^2<1$. При $\omega^2\geq 1$ вещественных корней нет.

Литература

1. Raylelgh, Lord (Strutt J.W.). On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc London Math. Soc. – 1885. – Vo1.17. – P. 4–11
2. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. – М.: И.Л., 1955.
3. Снеддон И.И., Бери Д.С. Классическая теория упругости. – М.: И.Л., 1961.
4. Ю.А. Амензаде. Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1976.

Поступила в редакцию 28 февраля 2005 г.