УДК 621.031:531.31 + 539.37

СИМВОЛИЧЕСКОЕ «ДЕЛЕНИЕ» ВЕКТОРОВ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

О.С. Садаков

Известно, что тензорное исчисление – это алгебра сложений и умножений. Однако при проведении выкладок и преобразований может оказаться удобной также и приведенная в заголовке условная промежуточная операция. В механике сплошной среды обычны операторы линейных функций – например, вектор-функции векторного аргумента. Такими операторами являются тензор напряжений, тензор дисторсии и другие. Работа с этими тензорами может быть облегчена, если ввести символическую операцию «дробь» (ниже мы будем кавычки опускать). В статье обсуждается это обозначение, впервые принятое в работе [1]. Показаны свойства дроби и дан краткий обзор основных понятий кинематики, использующий эту символическую запись. Мы ограничились случаем однородного напряженно-деформированного состояния и исключили пока наиболее запутанную картину скоростей изменения напряжений и деформаций.

1. Пусть задана функция
$$y = A \cdot x \tag{1}$$
(x – множество произвольных векторов, y – результаты их преобразования с помощью оператора A – двухвалентного тензора, точкой обозначается скалярное произведение). Тензор A можно условно обозначать в виде дроби
$$A = y/x. \tag{2}$$

Косая черта используется здесь в связи с некоммутативностью дроби: символ аргумента x должен быть ниже и правее. Возможно, оператор B функции $y = x \cdot B$ можно было бы обозначить $x\backslash y$, но, чтобы не усложнять, мы используем для B обычный знак транспонирования $B=(y/x)^{\mathrm{T}}$.

Удобство предлагаемого обозначения связано с его довольно очевидными и простыми свойствами. Например,
$$x/x = I \tag{3}$$
(I – единичный тензор, или тензор тождественного преобразования),
$$(z/y) \cdot (y/x) = z/x \tag{4}$$
(произведение операторов). Отсюда, в частности, следует, что $y/x \cdot x/y = I$, эти тензоры взаимно обратны. Кроме того,
$$(z + y)/x = z/x + y/x; \tag{5}$$
скаляры в числителе и в знаменателе сокращаются:
$$6y/(2x) = 3y/x, \tag{6}$$
справедливо и такое выражение (T – некоторый тензор):
$$T \cdot (y/x) = (T \cdot y)/x. \tag{7}$$

Легко показать, что если y/x равен z/u, то этому тензору можно придать и третий вид:
$$y/x = z/u = (y+z)/(x+u). \tag{8}$$

Для доказательства обозначим $A = y/x = z/u$, то есть
$$y = A \cdot x, \quad z = A \cdot u.$$

Сложив эти выражения, получим $y+z=A \cdot (x+u)$, или $A=(y+z)/(x+u)$. Напомним, что речь идет не о четырех векторах $x..u$, а о четырех множествах векторов, связанных между собой указанным образом.

2. Для определения тензора y/x достаточно знать судьбу трех аргументов (для определенности принято, что векторное пространство трехмерно; это пригодится ниже):
$$y_\alpha = A \cdot x_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Не обязательно, но удобно, чтобы векторы x_α были направлены вдоль ортов декартова базиса $\{e_i\}$ ($x_\alpha = x_\alpha e_\alpha$, x_α – длины этих векторов). Учитывая, что $A=A_i e_i$, где A_i – искомые проекции тензора ($A_i = A \cdot e_i$), получим

$$y_\alpha = A \cdot (x_\alpha e_\alpha) = A_\alpha x_\alpha$$

и, таким образом, зная три вектора x_α и три вектора y_α найдем

$$A = A_\alpha e_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} y_\alpha e_\alpha / x_\alpha. \qquad (9)$$

Это выражение в некоторой мере оправдывает принятое обозначение (2).

3. Переходя к анализу основных тензоров в механике деформируемого твердого тела, удобно рассмотреть вначале случай *однородного* напряженно-деформированного состояния.

Тензор напряжений может быть записан в виде дроби

$$\sigma = p/n, \qquad (10)$$

чтобы подчеркнуть смысл этого *оператора* линейной зависимости напряжения p на произвольной площадке от ориентации n (n – орт нормали) этой площадки, а также напомнить о необходимости знания напряжений на трех площадках для его определения. Последнее следует, в частности, из разложения тензора ни три диады (9):

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha e_\alpha \qquad (11)$$

(учтена единичность векторов n; p_α – напряжения на базисных площадках). В матричной записи координат тензора напряжений векторы p_α отображаются столбцами матрицы напряжений. Обсуждаемый тензор называется тензором напряжений Коши; предусматривается, что среда деформирована и материальные волокна, составляющие рассматриваемые площадки, могли измснить в предыстории свои ориентацию и размеры.

4. Наибольшую пользу, как нам представляется, дробь может оказать при анализе деформированного состояния, особенно, в случае отказа от гипотез малости смещений и деформаций. В этих геометрически нелинейных задачах наиболее нужна ясность при прослеживании сложной судьбы пучков материальных волокон (их положение в начальном, недеформированном состоянии будем характеризовать векторами l_0), пока они не попадут в текущее, актуальное состояние – l. Можно показать, что зависимость $l(l_0)$ является линейной.

Если линейность упомянутой выше функции $p(n)$ (10) следует из условий равновесия (и, естественно, из гипотезы сплошности среды), то линейность преобразования волокон l_0 в l вытекает из гипотезы сплошности и из упомянутого выше допущения об однородности деформированного состояния. При анализе неоднородного напряженно-деформированного состояния последнее допущение относится к бесконечно малой окрестности каждой рассматриваемой материальной точки и вытекает из положения о *дифференцируемости* функций, описывающих смещения.

Наиболее популярная количественная мера деформирования – оператор

$$F \equiv l/l_0 \qquad (12)$$

Он носит в научной литературе несколько необъяснимых названий (например, градиент деформации, градиент места); мы его, вместе с тремя его родственниками

$$D \equiv \Delta l/l_0 \qquad \Delta l \equiv l - l_0, \qquad D = F - I, \qquad (13)$$

$$H \equiv l_0/l = F^{-1}, \qquad (14)$$

$$K \equiv \Delta l/l = I - H \qquad (15)$$

будем называть тензором дисторсии, понимая под дисторсией деформирование, и жесткий поворот (обычно, то и другое вместе).

По аналогии с вектором напряжений, вектор $D \cdot n$ (n – единичный вектор) можно назвать вектором дисторсии; он представляет изменение Δn единичного волокна n в результате дисторсии:

$$D = \Delta n/n = \sum_{\alpha=1}^{3} (\Delta e_\alpha) e_\alpha, \qquad (16)$$

для его задания достаточно знать три вектора дисторсии – судьбу трех (не обязательно начально ортогональных, как e_i) волокон, естественно, линейно независимых. В матричной записи тензора D (в декартовом базисе) столбцы матрицы D_{ij} представляют векторы дисторсии: изменения Δe_α единичных волокон, которые вначале были направлены вдоль базисных осей e_α.

5. В случае больших деформаций удобнее работать с тензором F. Как и любой двухвалентный тензор, он всегда может быть факторизован, то есть представлен в виде произведения сим-

метричного и ортогонального тензора. Если в этом представлении симметричный тензор является единичным, то исходный тензор дисторсии является ортогональным и наоборот, если ортогональный равен $\boldsymbol{I}$, то тензор дисторсии симметричен и, значит, найдется такой декартов базис $\{\boldsymbol{c}_i\}$, в котором дисторсия принимает вид

$$\boldsymbol{F} = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \boldsymbol{c}_\alpha \tag{17}$$

где k_α – главные коэффициенты длины, отличающиеся от главных деформаций ε_α на единицу ($k_\alpha = 1+\varepsilon_\alpha$).

Другой крайний случай: тензор $\boldsymbol{F}$ ортогонален. В такой дисторсии деформация отсутствует, происходит жесткий поворот (тензор поворота обозначают обычно $\boldsymbol{R}$) всех волокон вокруг общей оси $\boldsymbol{n}$ на некоторый угол φ:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{nn} + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{nn})\cos\varphi + \boldsymbol{Э}\cdot\boldsymbol{n}\sin\varphi. \tag{18}$$

Здесь

$$\boldsymbol{Э} \equiv -p\delta_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k \tag{19}$$

– трехвалентный изотропный тензор, кососимметричный относительно любой пары индексов. В последнем выражении $\boldsymbol{e}_i$ – орты декартова базиса, δ_{ijk} – символы Веблена (1, 0 или –1 в зависимости от значений i, j и k), p – символ «правизны» этого базиса: 1 для правого и –1 для левого базиса. Этот тензор, называемый иногда тензором Леви-Чивитта, позволяет заменить векторное произведение двойным скалярным ($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{ab}\cdot\cdot\boldsymbol{Э}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{Э}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Э}\cdot\cdot\,\boldsymbol{ab}$).

Определитель тензора поворота равен единице, обратный ему тензор получается транспонированием (происходит простая замена угла φ на $-\varphi$).

Если мы знаем координаты тензора $\boldsymbol{R}$, то, сворачивая тензор скалярно и векторно, нетрудно получить ось поворота $\boldsymbol{n}$ и угол φ.

6. В общем случае дисторсия $\boldsymbol{F}$ представляет и деформирование, и жесткий поворот. Факторизация

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U} \tag{20}$$

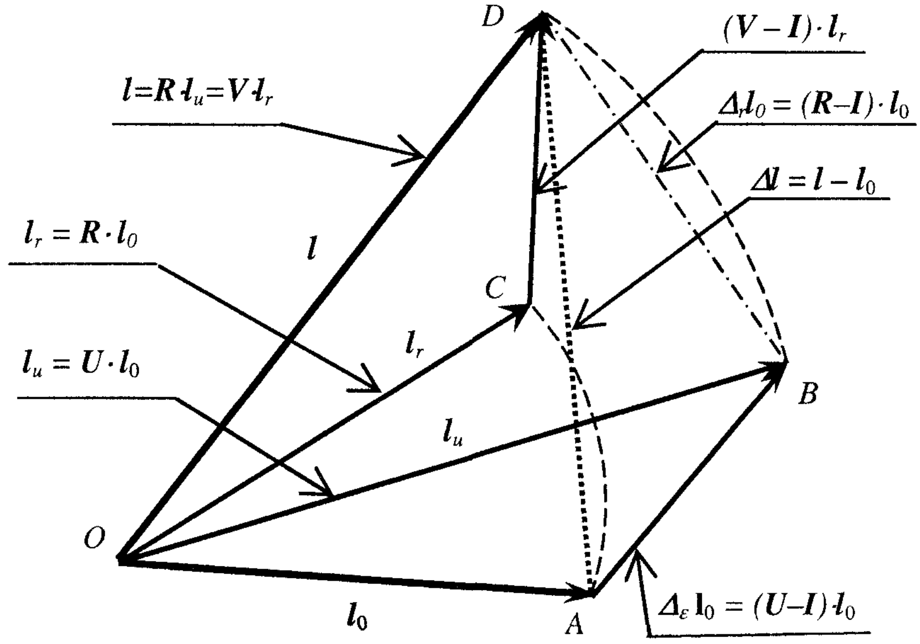
позволяет выделить эти два преобразования. Если начальное положение волокна обозначить $\boldsymbol{l}_0$ (см. рисунок), то произведение $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l}_0$ предстанет в виде двух движений ($\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{l}_0$): вначале происходит деформирование $\boldsymbol{l}_u=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{l}_0$ (волокно $\overline{OA}$ занимает положение $\overline{OB}$; если это волокно не отвечает главной оси деформации, то оно не только изменяет свою длину, но и поворачивается), затем происходит жесткий поворот всего тела (или всей окрестности) $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{l}_u$. Иначе говоря, записи (20) можно придать вид $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0=\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_u\cdot\boldsymbol{l}_u/\boldsymbol{l}_0$.

Подчеркнем, что речь не идет о судьбе одного волокна. Удобно представить пучок волокон одинаковой длины, но разных (всех возможных) направлений. Если их начала совмещены, то они заполняют вначале материальную сферу. Линейность преобразования (20) означает, что их новое положение отвечает эллипсоиду. Вначале сфера деформируется (тензор коэффициентов длины $\boldsymbol{U}= \boldsymbol{l}_u/\boldsymbol{l}_0$, соответствующий тензор деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_u=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{I}$), главные оси эллипсоида совпадают с главными осями тензора деформации. Затем происходит жесткий поворот $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_u$; эллипсоид поворачивается без деформации, занимая текущее положение $\boldsymbol{l}$. Главные оси эллипсоида отвечают новому положению главных волокон (деформации которых экстремальны), но направления этих волокон не совпадают с начальными.

Ничем не хуже другой взгляд на события: $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0=\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_r\cdot\boldsymbol{l}_r/\boldsymbol{l}_0=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}$: первое движение – жесткий поворот $\boldsymbol{l}_r/\boldsymbol{l}_0$ без деформирования ($\overline{OA}\to\overline{OC}$ на рисунке), второе – деформирование без жесткого поворота $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}+\boldsymbol{\varepsilon}_v$. Из однозначности факторизаций $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}$ следует, что ортогональные тензоры $\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_u$ и $\boldsymbol{l}_r/\boldsymbol{l}_0$ одинаковы ($\boldsymbol{R}$), а симметричные $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ – различны, хоть и имеют одинаковые главные значения $k_i = 1+\varepsilon_i$ (где ε_i – главные деформации). Они отличаются главными направлениями $\boldsymbol{c}_i$:

$$\boldsymbol{U} = k_i\,\boldsymbol{c}_i^u, \quad \boldsymbol{V} = k_i\,\boldsymbol{c}_i^v, \quad \boldsymbol{c}_i^v = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{c}_i^u. \tag{21}$$

Иногда говорят [2], что $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ – один и тот же тензор, но нам представляется очевидным, что, например, растяжение вдвое вдоль оси x или вдоль оси y – это две различные деформации. В частности, в анизотропном теле для этих двух деформаций потребуются различные нагрузки.



Основные тензоры дисторсии

7. В каждодневных прочностных расчетах (сопротивление материалов, теория упругости и даже теория пластичности и ползучести) принято упрощать картину деформирования, гипотетически полагая, что смещения, деформации и повороты волокон бесконечно малы. Это означает, что волокна l_0 и l неотличимы, и при анализе деформаций (геометрически линейный подход) опираются на тензор дисторсии $D=\Delta l/l$. Его делят на симметричное и кососимметричное слагаемые

$$D = \varepsilon + \theta, \tag{22}$$

то есть считают, что приращение Δl складывается из Δl_ε, связанного с деформацией ($\varepsilon = \Delta l_\varepsilon / l_0$), и Δl_θ вызванного жестким поворотом ($\theta = \Delta l_\theta / l_0$). Задачу оценки прочности научились решать, не привлекая к рассмотрению поворотов, и в расчетах фигурируют только деформации $\Delta l_\varepsilon / l_0$.

8. Полезно иметь в виду, что любой кососимметричный тензор можно представить в виде произведения

$$K = Э\cdot\omega, \tag{23}$$

где $Э$ – тензор Леви-Чивитта, ω – сопутствующий тензору K вектор (его можно определить, векторно сворачивая тензор K).

В частности, кососимметричный тензор θ, которым определяют жесткий поворот в геометрически линейной постановке задачи, представляет результат скалярного умножения тензора $Э$ на вектор, который называют вектором поворота. Естественно, лишь *бесконечно малый* поворот можно отображать вектором; тогда вектор результата двух поворотов представляет сумму векторов этих поворотов.

Нетрудно оценить ошибку от использования в линейном варианте (22) кососимметричного тензора $\Delta l/l_0$ вместо ортогонального (18) l/l_0. Из последнего следует вычесть единичный тензор, и ошибка определится *симметричным* слагаемым в $R-I$, равным $(I-nn)(1-\cos\varphi)$. Она наиболее заметна на волокнах, ортогональных n, и для последних характеризуется числом $(1-\cos\varphi)/\sin\varphi$, равным (при малых φ) $\varphi/2$. Таким образом, с ошибкой менее 1% мы можем пользоваться геометрически линейным вариантом до углов 2 %, то есть 1,15°.

Литература

1. Скаляр и тензор логарифмической деформации/ О.С. Буслаева, О.С. Садаков, А.А. Шапиро // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – Санкт-Петербург. – 2003. – 3 (33). – С.125–129.

2. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Finite Elements for Nonlinear Continua and Structures. McCormick School of Engineering and Applied Science Northwestern University Evanston, IL 60208 copyright 1996. Published by Wiley.

Поступила в редакцию 6 февраля 2005 г.