УДК 531.539

НЕМАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ И КРУГОВРАЩЕНИЯ МАЯТНИКА

Ю.П. Сердега

В работе рассмотрены немалые колебания и круговращения физического маятника. Найдены аппроксимирующие зависимости, позволяющие определять периоды немалых колебаний и круговращений маятника в инженерной практике, не прибегая к специальным таблицам, или трудоемким вычислениям.

Проведем исследование движения диска, который можно представить как физический маятник, если подвесить его, выбрав за ось подвеса любую точку за исключением центра масс, и рассмотрим движение этого тела при его ***немалых*** колебаниях и круговращениях (рис. 1).

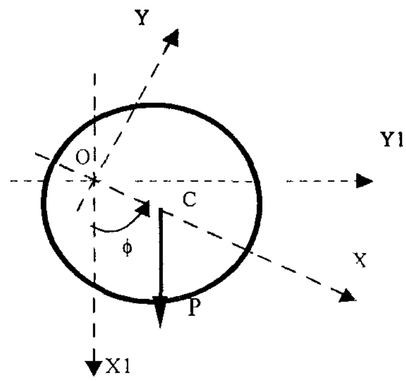

Рис. 1. Физический маятник

Начало неподвижной системы координат OX1Y1 совместим с осью подвеса Z, а оси подвижной системы проведем так, чтобы неподвижная ось X1 и подвижная X, проходящая через ось подвеса и центр масс, составляли угол отклонения маятника φ.

Дифференциальное уравнение движения физического маятника можно получить из закона изменения момента количества движения тела:

$$\ddot{\varphi}+\frac{mgr_c}{I_0}\sin\varphi=0. \qquad (1)$$

При малых колебаниях маятника, когда допустимо принять $\sin\varphi=\varphi$, решением дифференциального уравнения (1) является: $\varphi=\varphi_0\sin(\omega_0 t)$.

Здесь ω_0 – собственная частота колебаний маятника – $\omega_0=\sqrt{g/l_{np}}$;

l_{np} – приведенная длина маятника – $l_{np}=\dfrac{I_0}{r_c m}$;

I_0 – момент инерции маятника относительно оси подвеса;

m – масса физического маятника;

r_c – расстояние от оси подвеса до центра масс.

Соответственно, в этом случае период колебаний физического маятника – $T_0=2\pi\sqrt{l_{np}/g}$.

Но при ***немалых*** колебаниях маятника, когда угол φ **значительно** отличается от $\sin\varphi$ и аналитического решения дифференциального уравнения не существует, период колебания находят, используя таблицы специальных функций, или через поправочный коэффициент по формуле:

$$T=k_t\cdot T_0,$$

где k_t – поправочный коэффициент немалых колебаний:

$$k_t=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi)-\cos(\varphi_0)}}. \qquad (2)$$

Интеграл, входящий в это выражение, не относится к числу элементарных, однако его можно определить и, не прибегая к нахождению полного эллиптического интеграла первого рода по специальным таблицам, а рассчитать численным методом. На рис. 2 тонкой линией представлена зависимость поправочного коэффициента k_t, рассчитанная по формуле (2) этим методом.

Приближенное решение уравнения (2), когда разложение функции $\sin(\varphi)$ в ряд ограничено двумя членами, дает известное выражение поправочного коэффициента [1]:

$$k_{t2}(\varphi_0) = 1 + \frac{\varphi_0^2}{16}.$$

Анализ зависимости поправочного коэффициента k_t показывает, что она носит экспоненциальный характер, а потому может быть достаточно точно аппроксимирована функцией:

$$k_{te}(\varphi_0) = 1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\left[1 + \frac{e^{(\varphi_0/2\pi)^3}}{5{,}85 - 5(\varphi_0/2\pi)^3}\right]. \tag{3}$$

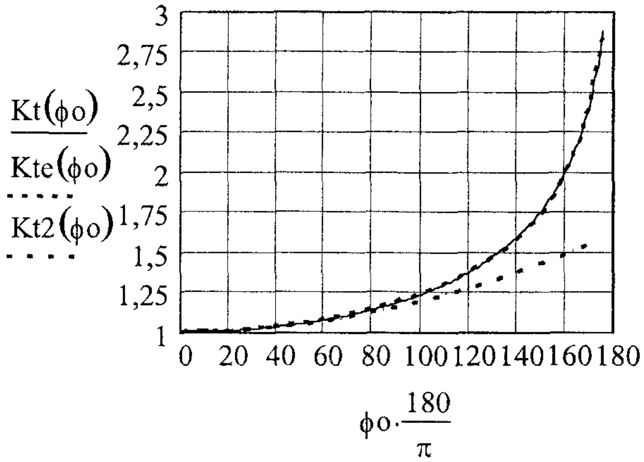

Рис. 2. Поправочные коэффициенты немалых колебаний

Погрешность расчета поправочного коэффициента немалых колебаний маятника функцией (3) зависит от начального отклонения – φ_0, но не превышает 1% даже при отклонениях до 176°, тогда как погрешность расчета с использованием известной зависимости $k_{t2}(\varphi_0)$, как видно из рис. 2, значительна уже при $\varphi_0 \geq 120°$.

В случаях, когда физический маятник совершает **круговращение**, закономерность изменения угловой скорости маятника в функции угла φ определяется согласно закону изменения кинетической энергии из уравнения

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2g}{l_{np}}(1 + \cos\varphi)}. \tag{4}$$

Период круговращения маятника зависит как от угловой скорости прохождения верхнего положения – ω, так и от собственной частоты колебаний – ω_0, и определяется неразрешимым в элементарных функциях интегралом:

$$T_k(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2\omega_0}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos\varphi + 0{,}5(\omega/\omega_0)^2}}. \tag{5}$$

Приближенное решение, которое получают, вводя эллиптические функции Якоби [1], может быть рекомендовано лишь для определения периода круговращения при значительных скоростях круговращения, причем период круговращения маятника – T_{kv} найден в нем через скорость прохождения нижнего положения – ω_m :

$$T_{kv} = \frac{2\pi}{\omega_m}\left[1 + \frac{g}{l_{np}}\left(\frac{1}{\omega_m}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{6}$$

Таким образом, в инженерной практике целесообразно прибегнуть к аппроксимирующим выражениям поправочного коэффициента круговращения – K_k и периоду гармонических колебаний маятника – T_0, для определения периода его круговращения по формуле:

$$T_{kv} = K_k \cdot T_0. \tag{7}$$

Исследования показывают, что закономерность изменения действительного значения поправочного коэффициента круговращения K_k, найденного численным путем, растет по мере снижения скорости прохождения верхнего положения ω и падает с ее увеличением (рис. 3). Если выразить ω_m через ω и ω_0, то можно получить, преобразуя выражение (6), следующую формулу поправочного коэффициента круговращения $K_1(\omega)$:

$$K_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \cdot \frac{5 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{4 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \tag{8}$$

Тонкая пунктирная линия, построенная по этой формуле, показывает, что она достаточно близка к действительным значениям (рис. 3) при скоростях $\omega/\omega_0 > 4$, но при малых скоростях, особенно если $\omega/\omega_0 < 1$, погрешность расчета растет и при $\omega/\omega_0 < 0{,}5$ уже превышает 30% (рис. 4).

Анализ изменения поправочного коэффициента круговращения K_k показывает, что если при малых значениях скоростей (в интервале $0 < \omega/\omega_0 < 1$), его аппроксимировать функцией $K_2(\omega)$:

$$K_2(\omega) = 0{,}643 \cdot e^{\frac{\pi}{2}\left[1-(\omega/\omega_0)^{0.3}\right]}, \tag{9}$$

а в интервале скоростей $1 < \omega/\omega_0 < 4$ – функцией $K_3(\omega)$:

$$K_3(\omega) = 0{,}643 \cdot e^{-(\omega/\omega_0-1)^{0{,}46}} + \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\frac{\omega_0}{\omega}\cdot\left[1-e^{-(\omega/\omega_0-1)^{0{,}46}}\right], \tag{10}$$

то погрешность расчета K_k по этим формулам в пределах рассматриваемого интервала, как видно из рис. 4, не превысит 1,2% (жирная пунктирная кривая).

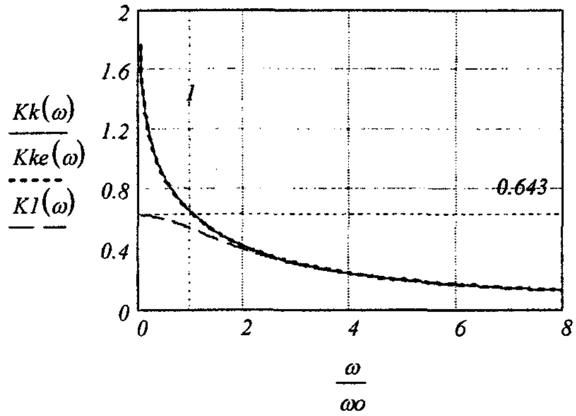

Рис. 3. Поправочные коэффициенты круговращения

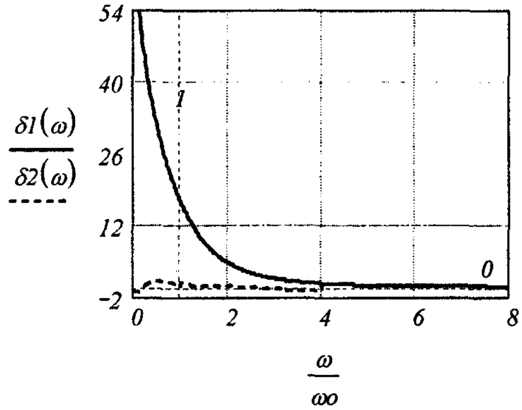

Рис. 4. Погрешность K_k по формулам (8)–(10)

Заключение

Найдены аппроксимирующие зависимости для определения периода немалых колебаний маятника в функции его начального угла отклонения, а также периода круговращения маятника в функции скорости прохождения верхнего положения. Дана оценка точности аппроксимирующих формул, рекомендуемых для применения в инженерной практике.

Литература

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1983. –Т. II.– С. 493–504.

Поступила в редакцию 12 января 2005 г.