

# О СТРУКТУРЕ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ДИФРАКЦИИ РЭЛЕЕВСКОЙ ВОЛНЫ НА ОГРАНИЧИВАЮЩЕЙ ПЛОСКОСТИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ПОД УГЛОМ К ПОВЕРХНОСТИ

*Х.Б. Толипов*

**В рамках линейной теории упругости рассматривается взаимодействие рэлеевской волны с плоской поверхностью. Построено спектральным методом решение задачи о генерации возмущений, вызываемых падающей волной. Полученные выражения описывают пространственные структуры дифрагированных волн, согласующиеся с известными измерениями.**

## 1. Введение

Интерес к изучению рассеяния рэлеевских волн на наклонной поверхности, стимулированный пионерскими экспериментальными работами [1, 2], вызван как логикой развития теории упругости, так и необходимостью решения акустических прикладных задач дефектоскопии, сейсмологии и др. Отметим, что эта задача интересна как с математической точки зрения, так и с физической.

Поверхность, по которой распространяется рэлеевская волна, и наклонная плоскость образуют угловую область, в которой при набегании волны возникают сложные акустические процессы. В результате дифракции с наклонной плоскостью падающего поля возникают как поверхностные, так и расходящиеся объемные волны, структура которых зависит от углового положения плоскости. Генерация этих волн является результатом совместного действия и конкуренции продольных и сдвиговых составляющих рэлеевской волны, вызываемых первичной волной и представляет собой интересное явление, позволяющее глубже понять свойства рэлеевских волн и наблюдать их новые проявления. Поскольку закономерности изменения структуры дифрагированных волн зависят от структуры профиля волновых возмущений, представляет большой интерес исследование этой задачи для различных углов наклона плоскости.

Набегающая на плоскость волна вызывает возмущение поверхности, которое можно рассматривать как источник вторичных волн. Излучающая часть плоскости, расположенной под произвольным углом к поверхности, совершает периодические движения с частотой  $\omega$  набегающей на наклонную плоскость волны. Волновой вектор падающей волны  $k_r$  составляет некоторый угол  $\theta$  с направлением движения волны деформаций на плоскости, характеризуемой волновым числом  $k_r$ , такой, что

$$\cos \theta = k_r / k_r. \quad (1)$$

Учитывая, что  $k = \omega/v$ , соотношение (1) для дальнейшего анализа удобно переписать в виде:

$$\cos \theta = v_r / v_r.$$

Если скорость движущихся возмущений превышает фазовую скорость звука  $v$  в упругой среде, то волновой вектор излучаемых волн  $k$ , образует с вектором скорости  $v$  угол  $\theta_0$ , причем

$$\cos \theta_0 = v / v_r. \quad (2)$$

Угол  $\theta_0$  принимает вещественное значение лишь в том случае, если выполняется неравенство  $v_r > v$ , т.е. скорость источника превосходит фазовую скорость сдвиговой волны в среде. В этом случае возникает объемная волна с азимутальным направлением  $\theta_0$ , определяемым тоже соотношением (1).

Наибольший интерес представляет движение источника возмущений при скоростях меньших фазовых скоростей волн в среде.

Угол  $\theta_0$  при этих скоростях принимает мнимое значение, а пространственная структура сдвиговой волны будет описываться выражением [3]:

$$U = U_0 \exp(ikx) \exp(-\sqrt{k^2 - k_r^2})z, \quad (3)$$

с переменной  $z$  направленной вглубь среды. Аналогичные соотношения будут характеризовать поле продольных волн, характеризуемых волновым вектором  $k_e$ . Полученное выражение представляет собой произведение осциллирующей функции, определяемой формой падающего на плоскость поля, и экспоненциально затухающей функции, которую можно интерпретировать как пограничный волновой слой, описываемый пространственным масштабом  $\lambda$ , зависящим от фазовой скорости волны в среде:

$$\lambda = (k^2 - k_t^2)^{-0,5}.$$

Скорость этой волны снижается по двум причинам. Во-первых, в твердых телах на границе сред происходит взаимная трансформация продольных волн в сдвиговые. Поэтому при распространении поверхностной волны, состоящей из сдвиговых и продольных составляющих, плотность энергии волны монотонно падает, т.к. сдвиговая волна движется медленнее продольной.

Во-вторых, согласно выражению (3) с уменьшением скорости волны толщина пограничного волнового слоя растет. При этом происходит перестройка его пространственной структуры, т.к. плотность энергии волны снижается, рассредоточиваясь по большему объему. Скорость волны монотонно уменьшается до тех пор, пока скорости продольной и сдвиговой составляющих не выровняются, соответственно скорости рэлеевской волны. Этот эффект является специфическим в твердых телах и не имеет аналогов в других средах.

Введем параметр просачивания, определяемый соотношением:

$$\theta_0 = \arccos(k_r \lambda),$$

который можно рассматривать в качестве меры баланса между эффектами просачивания рэлеевской волны на наклонную плоскость и генерации объемных волн. Таким образом, согласно вышесказанному, можно выделить две характерные области. При  $\theta < \theta_0$  падающая волна проходит на наклонную плоскость с неизменной пространственной структурой, а при  $\theta > \theta_0$  происходит преобразование в объемные волны, сопровождающееся перестройкой структур волн.

Вторичные волны в силу неоднородности возмущающих сил можно представить в виде набора спектра пространственных гармоник Фурье. Можно сказать, что наличие этой неоднородности приводит к появлению поверхностных и объемных волн (сдвиговых и продольных) с другими направлениями волнового вектора  $k$ , соответственно решение будет представлено линейной комбинацией волн вида (3) с различными направлениями  $k$ . Отметим, что в этой задаче рассеяние вызвано, в основном, не изменением упругих свойств среды, а неоднородностью падающей волны. Трансформация первичной волны в объемные является основным механизмом, определяющим потери энергии колебаний при переходе рэлеевской волны на наклонную плоскость.

## 2. Решение задачи

Рассмотрим полуплоскость, связанная с декартовой системой координат  $(\varepsilon, \eta)$ , с осью  $\eta$ , направленной вглубь среды, по которой распространяется плоская монохроматическая волна перпендикулярно линии излома с наклонной плоскостью.

Задача определения дифрагированного поля, возбуждаемого падающей волной, сводится к вычислению смещений  $U_e$  и  $U_t$ , удовлетворяющих уравнениям:

$$\Delta U_e + k_e^2 U_e = 0, \quad \Delta U_t + k_t^2 U_t = 0, \quad (4)$$

и граничным условиям:

$$\sigma_{xz} = -\sigma_{xz}^{\circ}, \quad \sigma_{zz} = -\sigma_{zz}^{\circ} \quad \text{при } z = 0. \quad (5)$$

Здесь обозначено  $c_b, c_b$  – скорости распространения соответственно продольных и поперечных волн,  $\omega$  – круговая частота,  $\sigma_{xz}^{\circ}$  и  $\sigma_{zz}^{\circ}$  – напряжения, вызываемые смещениями падающей рэлеевской волны, рассматриваемые затем как источник вторичных волн,  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламэ.

Таким образом, система уравнений (4) с граничными условиями (5) полностью описывает пространственную структуру поля на плоскости.

Если ввести продольный и поперечный потенциалы, связанные со смещениями соотношениями

$$U_e = \text{grad } \Phi, \quad U_t = \text{rot } \psi,$$

то систему уравнений (4), (5) можно переформулировать в следующем виде:

$$\Delta\Phi + k_t^2\Phi = 0, \quad \Delta\psi + k_t^2\psi = 0. \quad (6)$$

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{k_t^2}{2}\Phi + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} = -\sigma_{zz}^{\circ}, \quad (7)$$

$$2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\sigma_{xz}^{\circ},$$

Колебания на наклонной плоскости возбуждаются плоской рэлеевской волной, описываемой выражениями:

$$\Phi = \exp[i(k_r\varepsilon - \omega t) - q\eta], \quad (8)$$

$$\psi = p \exp[i(k_r\varepsilon - \omega t) - s\eta], \quad (9)$$

где  $q = \sqrt{k_r^2 - k_t^2}$ ,  $s = \sqrt{k_r^2 - k_t^2}$ ,  $p = -\sqrt{\frac{q}{s}}i$ .

При установившемся режиме колебаний, который и рассматривается дальше, зависимость всех величин от времени носит гармонический характер. Общий множитель  $\exp(-i\omega t)$  в дальнейших выкладках опускается.

Решение задачи будем рассматривать для малых углов  $\theta$  ( $\theta < 90^\circ$ ). В этом случае, что принципиально важно, структура набегающей на плоскость волны остается неизменной.

Введем локальную систему координат  $(x, z)$ , связанную с наклонной плоскостью, в которой ось  $z$  направлена вглубь среды.

С учетом преобразований [4], тензоры напряжений на плоскости в системе координат  $(x, z)$  принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{\circ} &= \sigma'_{zz} \sin(\theta) + \sigma_{xz} \cos(\theta), \\ \sigma_{zz}^{\circ} &= \sigma_{zz} \cos(\theta) + \sigma'_{xz} \sin(\theta), \end{aligned} \quad (10)$$

с обозначениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= P(k_{1x}) \exp(ik_{1x}x) + pQ(k_{2x}) \exp(ik_{2x}x), \\ \sigma_{zz} &= R(k_{1x}) \exp(ik_{1x}x) + pS(k_{2x}) \exp(ik_{2x}x), \\ \sigma'_{xz} &= P(k_{1z}) \exp(ik_{1z}z) + pQ(k_{2z}) \exp(ik_{2z}z), \\ \sigma'_{zz} &= R(k_{1z}) \exp(ik_{1z}z) + pS(k_{2z}) \exp(ik_{2z}z). \end{aligned}$$

В этих выражениях проекции продольной и сдвиговой составляющих волнового вектора падающей волны на соответствующие оси координат  $x$  и  $z$

$$k_{1x}(\theta) = k_r \cos \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_t^2} \sin \theta, \quad k_{2x}(\theta) = k_r \sin \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_t^2} \cos \theta, \quad (11)$$

$$k_{1z}(\theta) = k_r \cos \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_t^2} \sin \theta, \quad k_{2z}(\theta) = k_r \sin \theta + i\sqrt{k_r^2 - k_t^2} \cos \theta,$$

выражаются в комплексном виде, где действительная часть определяет скорость волны, а мнимая – амплитуду колебаний.

Волновое поле в этой задаче описывается формулами:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(k) e^{-ikx} dk, \quad \psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(k) e^{-ikx} dk. \quad (12)$$

Применяя к системе (3), (4) преобразование Фурье по  $x$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi^*}{dz^2} + (k_t^2 - k^2)\Phi^* &= 0, & \frac{d^2\psi^*}{dz^2} + (k_t^2 - k^2)\psi^* &= 0, \\ 2kqi\Phi^* - k^2\psi^* - s^2\psi^* &= \left[ \frac{P(k_{1x})}{k - k_{1x}} + p \frac{Q(k_{2x})}{k - k_{2x}} \right] \cos(\theta) + \left[ \frac{R(k_{1z})}{k - k_{1z}} + p \frac{S(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right] \sin(\theta), \\ \left( k^2 - \frac{k_t^2}{2} \right) \Phi^* + ksi\psi^* &= \left[ \frac{R(k_{1x})}{k - k_{1x}} + p \frac{S(k_{2x})}{k - k_{2x}} \right] \cos(\theta) + \left[ \frac{P(k_{1z})}{k - k_{1z}} + p \frac{Q(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right] \sin(\theta), \end{aligned} \quad (13)$$

где спектральные плотности потенциалов определяются в виде:

$$\Phi^*(k, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k, x) e^{ikx} dx, \quad \psi^*(k, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k, x) e^{ikx} dx.$$

Применение обратного преобразования Фурье, дает соотношения, связывающие комплексные амплитуды потенциалов с углом клина:

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} & \left\{ \frac{\left[ \left( \frac{P(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{Q(k_{1x})}{k - k_{2x}} \right) S(k_r) + \left( \frac{R(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{S(k_{2x})}{k - k_{2x}} \right) Q(k_r) \right]}{4k^2 qs - (k^2 + s^2)^2} \cos(\theta) + \right. \\ & \left. + \frac{\left[ \left( \frac{P(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{Q(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right) S(k_r) + \left( \frac{R(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{S(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right) Q(k_r) \right]}{4k^2 qs - (k^2 + s^2)^2} \sin(\theta) \right\} \exp(qz) dk, \quad (14) \\ \psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} & \left\{ \frac{\left[ \left( \frac{P(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{Q(k_{1x})}{k - k_{2x}} \right) R(k_r) + \left( \frac{R(k_{1x})}{k - k_{1x}} - p \frac{S(k_{2x})}{k - k_{2x}} \right) P(k_r) \right]}{4k^2 qs - (k^2 + s^2)^2} \cos(\theta) + \right. \\ & \left. + \frac{\left[ \left( \frac{P(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{Q(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right) R(k_r) + \left( \frac{R(k_{1z})}{k - k_{1z}} - p \frac{S(k_{2z})}{k - k_{2z}} \right) P(k_r) \right]}{4k^2 qs - (k^2 + s^2)^2} \sin(\theta) \right\} \exp(sz) dk. \end{aligned}$$

Полученные выражения дают богатую количественную и качественную информацию о структуре дифрагированного поля. Гармоники с  $k = k_r$  описывают поле рэлеевских волн, с  $k < k_r$  – поле объемных волн и с  $k_r > k > k_l$  поле поверхностных волн с сильнозатухающими по направлению движения волны амплитудами смещений. Полное акустическое поле представляет сумму падающей и дифрагированных волн. Полученные выражения справедливы для углов  $\theta > \theta_0$ , поскольку при  $\theta < \theta_0$ , как было замечено выше, имеет место вырождение задачи.

Интегралы вида (14) часто возникают в задачах дифракции и вычисляются в явном виде.

### 3. Излучение объемных волн

Применение метода перевала к интегральному представлению решения приводит к формулам для диаграмм направленности расходящихся объемных волн [5]. Заметим, что излучатель не формирует поле уходящих объемных волн, когда угловое положение плоскости меньше параметра просачивания. Окончательные выражения для смещений сдвиговых и продольных волн в силу их громоздкости не приводятся. На рис. 1, 2 показаны распределения по азимутальным углам  $\gamma$  амплитуд продольной и поперечной волн соответственно (кривые 1–4 относятся к углам  $\theta$  равным  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $80^\circ$  соответственно). Сравнительный анализ кривых, представленных на этих рисунках, показывает, что при углах  $\gamma$ , близких к  $\theta_0$ , наблюдается высокий уровень амплитуд смещений. При уменьшении угла клина происходят как изменение амплитуды смещений волны, так и небольшое смещение максимума угловой зависимости амплитуды от угла  $\gamma$ .

Для понимания физических факторов, определяющих поведение волн как функции углового расположения наклонной плоскости, рассмотрим более подробно характерный случай: падение рэлеевской волны на плоскость, составляющей с поверхностью прямой угол. Угол  $\theta$  является вещественным, что придает вычисляемым параметрам структуры волн реально наблюдаемые величины, и позволяет лучше понять свойства рэлеевской волны. В этом примере возникает очень интересный эффект, который в рамках известных представлений объяснить не представляется

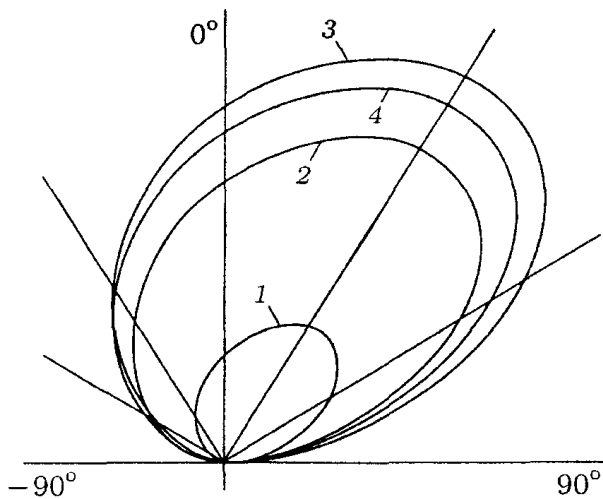


Рис. 1. Азимутальное распределение амплитуд продольных волн

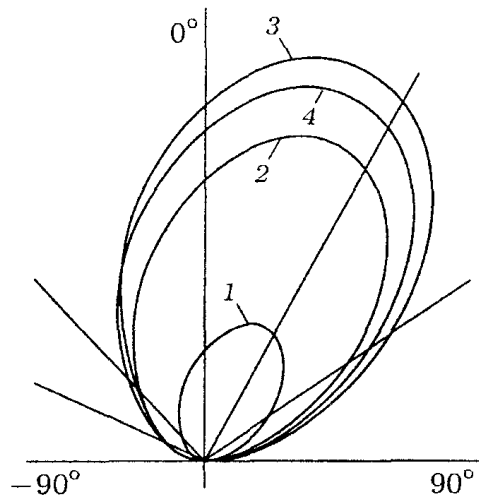


Рис. 2. Азимутальное распределение амплитуд поперечных волн

возможным. Волна падает на плоскость по нормали, а отражение максимальной амплитуды объемной волны происходит под углом примерно  $\theta_0$  (рис. 3). В классическом случае при отражении волн амплитуда волновых возмущений на границе сред неизменна, что приводит к выполнению закона Снеллиуса. В данном случае амплитуда источника вторичных волн по мере движения убывает, что отражается на характере изменения амплитуд фурье-гармоник, формирующих объемные волны. С изменением угла  $\theta$  изменяется характер поведения амплитуд фурье-гармоник, и происходит угловое смещение максимума амплитуды. Как известно, распространение упругих волн связано с движением энергии колебаний в деформируемой среде. Векторы лучевых скоростей (потоков энергии) при волноводном распространении связаны с направлением движения волны.

С физической точки зрения векторы плотностей потоков энергии определяют направления движения фронтов волн. В рэлеевской волне лучевая скорость направлена вдоль границы среды, а фазовая определяется направлением нормали к фронту волны, которая составляет угол  $\theta_0$ . К этому выводу можно прийти, если рассмотреть огибающую рэлеевской волны (рис. 4.). Движения частиц среды в этой волне происходят по эллипсам, с экспоненциально убывающими с глубиной амплитудами колебаний. С помощью простых расчетов, нетрудно убедиться, что направление движения волны составляет угол  $\theta_0$  с нормалью к ее фронту.

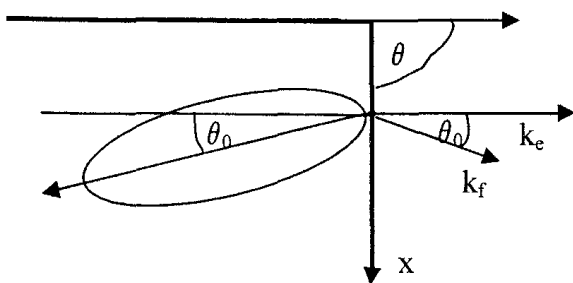


Рис. 3. Картина поля сдвиговой волны для  $\theta = 90^\circ$

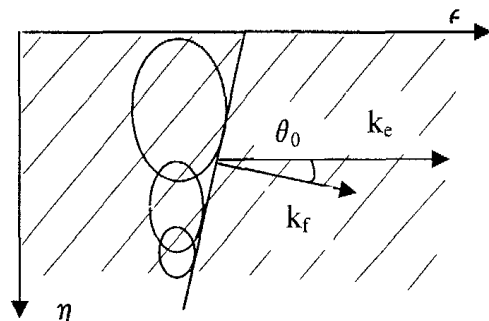


Рис. 4. Фронт волны Рэлея

#### 4. Определение поля рэлеевских волн

Вычеты в полюсах подынтегрального выражения дают рэлеевские волны, распространяющиеся вдоль поверхности плоскости [6]. Структура решения, в основном, определяется физическими представлениями. Из сказанного выше следует, что решение задачи надо находить для не-



Следовательно, отраженная волна, сформированная на плоскости, проходит в обратном направлении через излом на поверхность, в которой амплитуда волны определится выражением:

$$R_1(\theta) = R(\theta)V(\theta).$$

## 5. Заключение

В данном сообщении мы подробно рассмотрели физические аспекты возникновения поля поверхностных и объемных волн, вызываемые неоднородной волной. Однако полученные формулы, правильно описывая это явление, содержат и другую полезную информацию. Полученные формулы определяют не только качественные особенности дифрагированного поля, но и осуществляют количественные уточнения распределения амплитуд поля. Точная количественная информация здесь очень важна, поскольку направление максимума поля дифрагированных объемных волн определяется волновым вектором фазовой скорости поверхностной волны, зависящей от упругих свойств среды.

## Литература

1. Кнорфф Л., Ганги А. // Geophysics. – 1960. – V. 25. – P. 1203.
2. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966. – 165с.
3. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 335 с.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712с.
5. Толипов Х.Б., Гуревич С.Ю. Особенности дифракции поверхностных волн на ребре клина // ПМТФ. – 2003. – №5. – С.161–168.
6. Толипов Х.Б. Дифракция поверхностной волны на ребре клина// Дефектоскопия. – 2002. – №7. – С.21–27.

*Поступила в редакцию 24 февраля 2005 г.*