

Решение уравнения (2) есть

$$\Phi = (A_0 \operatorname{ch} v_1 \theta + C_0 \operatorname{sh} v_1 \theta) \exp[i(pz - \omega t)]; \quad (4)$$

$$\psi_2 = (A_2 \operatorname{ch} v_2 \theta + C_2 \operatorname{sh} v_2 \theta) \exp[i(pz - \omega t)],$$

с обозначениями: $v_1 = \sqrt{p^2 - k_t^2} r$, $v_2 = \sqrt{p^2 - k_t^2} r$, p – волновое число кромочной волны, v_1 и v_2 – угловые волновые числа, i – мнимая единица. В дальнейших выкладках множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается.

Если распределение потенциалов задается функциями (4), то упомянутые выше граничные условия приводят к алгебраической системе четырех однородных уравнений для нахождения амплитуд A_0, A_2, C_0, C_2 . Условием существования нетривиальных решений этой системы уравнений является равенство нулю ее главного определителя, который представим в виде произведения $\Delta_s \Delta_{as}$. Эта система имеет решения при двух независимых условиях: $\Delta_s = 0$ и $\Delta_{as} = 0$, где элементы определителей $\Delta_s = |a_{gk}|$ и $\Delta_{as} = |b_{gk}|$ ($g, k = 1, 2$) имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11} \operatorname{cth} v_1 \theta_0 = (p^2 - 0,5k_t^2) \operatorname{ch} v_1 \theta_0; \\ a_{12} &= b_{12} \operatorname{cth} v_2 \theta_0 = \frac{2v_1 p}{r} i \operatorname{sh} v_2 \theta_0; \\ a_{21} &= b_{21} \operatorname{cth} v_2 \theta_0 = \frac{v_2^2}{r^2} p i \operatorname{ch} v_2 \theta_0; \\ a_{22} &= b_{22} \operatorname{cth} v_2 \theta_0 = -\frac{v_2}{r} (p^2 + \frac{v_2^2}{r^2}) \operatorname{sh} v_2 \theta_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Определители позволяют получить решения для поставленной задачи:

Решение 1:

$$U_z = A_0 i p \operatorname{ch} v_1 \theta - C_2 \frac{v_2}{r^2} \operatorname{ch} v_2 \theta; \quad (6)$$

$$U_\theta = A_0 \frac{v_1}{r} \operatorname{sh} v_1 \theta + C_2 i p \frac{v_2}{r} \operatorname{sh} v_2 \theta.$$

Решение 2:

$$U_z = C_0 i p \operatorname{sh} v_1 \theta - A_2 \frac{v_2}{r^2} \operatorname{sh} v_2 \theta; \quad (7)$$

$$U_\theta = C_0 \frac{v_1}{r} \operatorname{ch} v_1 \theta + A_2 i p \frac{v_2}{r} \operatorname{ch} v_2 \theta.$$

Следует также отметить, что смещения частиц в решении 1 симметричны относительно плоскости, проходящей через биссектрису угла клина, в другом решении – антисимметричны относительно той же плоскости.

Полученный определитель можно записать в компактном виде:

$$\frac{(p^2 + \beta^2)^2}{4\alpha\beta p^2} - \left[\frac{\operatorname{th} \beta r \theta}{\operatorname{th} \alpha r \theta} \right]^m = 0, \quad (8)$$

где $\alpha = \sqrt{p^2 - k_t^2}$, $\beta = \sqrt{p^2 - k_t^2}$, $m = 1$ – для антисимметричных волн, $m = -1$ – для симметричных волн.

Таким образом, получено решение системы уравнений, удовлетворяющее граничным условиям и уравнениям движения.

Определим характер изменения пространственной структуры поля по переменной r . Уравнения движения в этой постановке задачи принимают вид:

$$\Delta \Phi + k_t^2 \Phi = 0, \quad \Delta \psi_1 + k_t^2 \psi_1 = 0, \quad (9)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$;

граничные условия при $\theta = \pm \theta_0$:

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } \sigma_{r\theta} = \rho c_i^2 \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\rho c_i^2 \left[-\frac{k_i^2}{2} \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) \right], \quad \rho - \text{плотность среды.}$$

В [5] получено приближенное решение этой системы уравнений, что позволило выписать асимптотическое приближенное полученное решение в явном виде и проанализировать свойства волновой компоненты поля.

Из анализа решения этой задачи выяснено, что продольная составляющая поверхностной волны, направленная к ребру клина, не доходит до ребра. Вблизи кромки клина происходит наложение падающей и отраженной волн, сопровождающееся возникновением пульсирующего поля. Существенным является то, что в данном направлении энергия акустической волны не переносится.

Кромочная поверхностная волна локализуется у границы этой пробки (области, в которой отсутствуют продольные колебания), т.к. продольная составляющая поверхностной волны не пропустит эту волну к ребру. Протяженность этой пробки с увеличением угла клина изменяется, и траектория волны будет удаляться от ребра клина. При этом увеличивается локальная толщина клина (т.е. толщина клина в области траектории волны), что ведет к возрастанию скорости волны. Важно отметить, что эта область не исчезает при уменьшении угла клина до нуля.

На рис. 1 для момента времени, соответствующего максимуму колебаний стоячей волны, представлены зависимости амплитуды смещений в волнах от расстояния до ребра клина для углов клина $\alpha_1 = 5,7^\circ$ (сплошная линия) и $\alpha_2 = 2,9^\circ$ (пунктирная линия), где U_r – амплитуда смещений в релеевской волне, а штрихпунктиром отмечена область пробки.

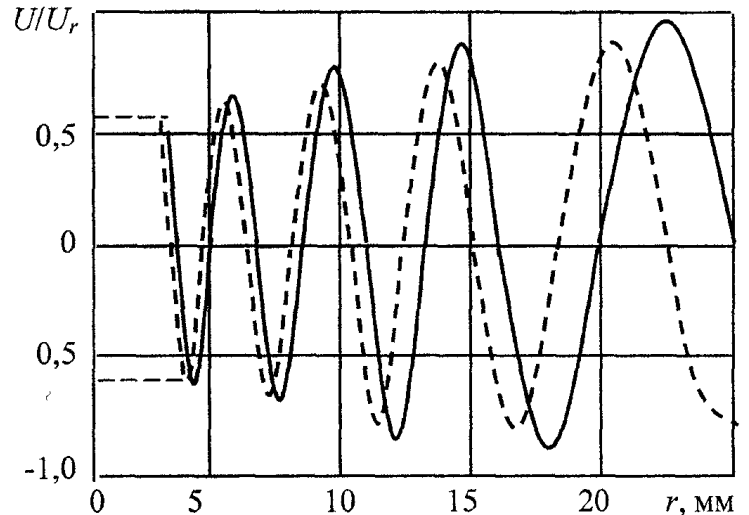


Рис. 1. Структура смещений в стоячей волне вблизи ребра

Структура волнового поля существенно зависит от координаты источника возбуждения. Вблизи границы пробки вследствие рефракции пространственная структура волнового поля имеет форму полусинусоиды [6]. Возбуждение частиц среды вдали от ребра клина приводит к увеличению числа осцилляций и скорости волны. Ширина волнового канала определяется количеством этих осцилляций. Отметим также, что максимумы амплитуд смещений в стоячей волне с увеличением угла клина отодвигаются от его ребра.

Скорости мод кромочных волн определяются подстановкой в (8) значений переменных r_k (рис. 2, 3), соответствующих координатам источника возбуждения волн. Решения уравнения (8) в окрестности ребра будут представлять дискретный спектр поля.

Отметим, что в данной постановке задачи при $k_r r \theta \gg 1$ второе слагаемое в (8) стремится к единице, и соотношение переходит в стандартное уравнение Рэлея. Физический смысл этого решения достаточно очевиден: на дальних расстояниях от ребра стоячая волна эволюционирует в две волны, бегущие по разным граням. Решения дисперсионного уравнения при этих значениях переменных $r\theta$ образуют непрерывный спектр поля.

Таким образом, анализ решения позволяет выделить две характерные области. Вдали от ребра решение задачи приводит к уравнению Рэлея. В области $r\theta < \lambda$ решение уравнений приобретает дискретный характер.

На рис. 4 представлены сплошными линиями теоретические зависимости скорости второй и шестой мод кромочных волн от угла клина (c_r – скорость релеевской волны), пунктирными линиями обозначены экспериментальные кривые из [1].

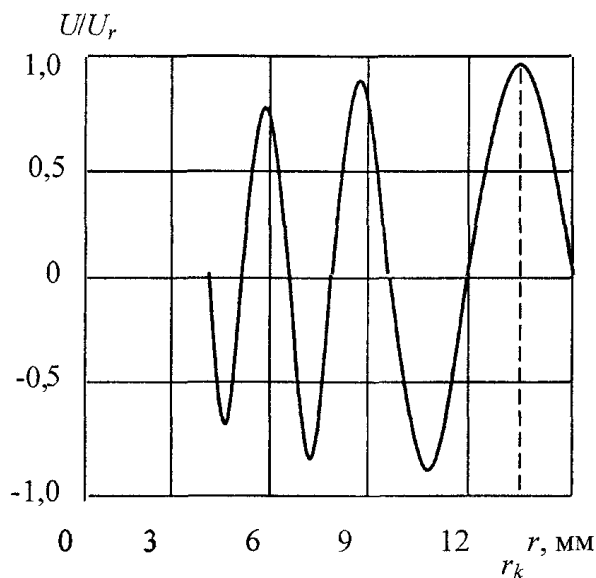


Рис. 2. Характер изменения амплитуды смещений в шестой волноводной моде от пространственной координаты

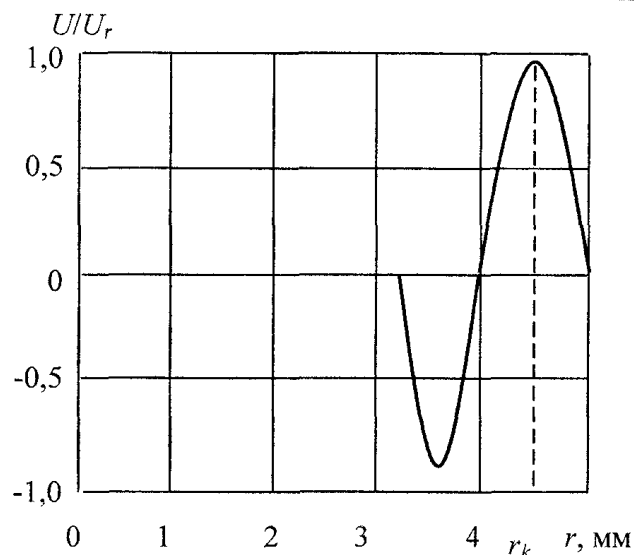


Рис. 3. Характер изменения амплитуды смещений во второй волноводной моде от пространственной координаты

Анализ результатов показал, что число мод антисимметричных волн в клине при определенном угле ограничено. Ширина волнового канала растет с уменьшением угла клина и с возрастанием номера моды. Увеличение угла клина ведет к сужению ширины каналов, и при больших углах ($\theta > 90^\circ$) эти каналы практически сливаются между собой. Этим объясняется отсутствие при этих углах клина экспериментальных кривых скоростей кромочной волны.

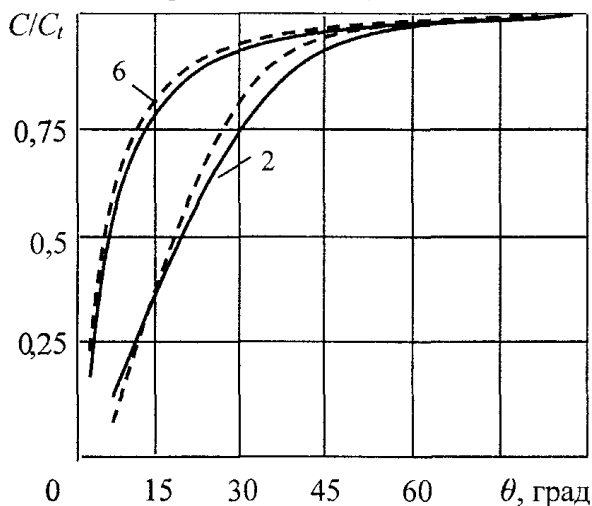


Рис. 4. Зависимости скорости шестой и второй волноводных мод от угла клина

Полученное решение позволяет рассчитать волновое поле вблизи окрестности ребра. Технически при возбуждении колебаний возникают два вида движений: по направлению к ребру клина и существующее только в начальный период времени до образования отраженной стоячей волны, и антисимметричное движение вдоль ребра. Закономерности пространственного изменения структуры поля при удалении от ребра существенно зависят от угла клина.

Симметричные волны являются неустойчивыми в волновом канале, так как вследствие рефракции они будут отклоняться от ребра клина. В заключение можно отметить, что удовлетворительное совпадение картины поля, возникающей в окрестности ребра с приводимыми расчетами, говорит о правомерности предложенной математической модели, объясняющей волноводный характер распространения волны.

Симметричные волны являются неустойчивыми в волновом канале, так как вследствие рефракции они будут отклоняться от ребра клина.

В заключение можно отметить, что удовлетворительное совпадение картины поля, возникающей в окрестности ребра с приводимыми расчетами, говорит о правомерности предложенной математической модели, объясняющей волноводный характер распространения волны.

Литература

1. Moss S.L., Maradudin A.A., Cunningham S.L. – Phys. Rev. B. – 1973. – V.8. – P. 2999.
2. Sharon T. M., Maradudin A.A., Cunningham S.L. – Phys. Rev. B. – 1973. – V.8. – P. 6024.
3. Lagasse P.E., Mason I.M. – Electron. Lettr. – 1972. – V.8. – P. 82.
4. Lagasse P.E. – IEEE Trans. Son. Ultrason. 1973. – V.20. – P. 354.
5. Толипов Х.Б. Двумерная задача распространения акустических колебаний в клине// ММ. – 2003. – Т.15. – №10. – С. 105–108.
6. Kh. B. Tolipov, S. Yu. Gurevich. Waveguide properties of the acute wedge plate – eleventh international congress on sound and vibration // 5–8 July 2004, St. Petersburg, Russia.