Математика

УДК 517.53

ОБ ОЦЕНКЕ КОНСТАНТЫ В ТЕОРЕМЕ БУСЛАЕВА – ГОНЧАРА – СУЕТИНА

В.М. Адуков

Пусть $\Upsilon_{m,\sigma}$ – класс мероморфных функций, для радиусов m-мероморфности которых выполняется условие $R_m < R_{m+1}$ и для которых доминирующие полюсы лежат в вершинах правильного σ-многоугольника. В работе предложен метод построения всех функций $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$, для которых не существует подпоследовательности m-й строки таблицы Паде, равномерно сходящейся к $a(z)$ на компактах, принадлежащих кругу m-мероморфности и не содержащих полюсов $a(z)$. На основе этого получены оценки константы из теоремы Буслаева – Гончара – Суетина.

1. Введение

Пусть $a(z)$ – аналитическая в окрестности $z=0$ функция, $D_m = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R_m\}$ – круг m-мероморфности функции $a(z)$, т.е. максимальный открытый круг с центром в нуле, в который $a(z)$ продолжается как мероморфная функция, имеющая не более m полюсов. Дж. Бейкером и П. Грейвс-Моррисом была высказана гипотеза (см., например, [1]), что *для любых $a(z)$ и m существует подпоследовательность аппроксимаций Паде $\pi_{n,m}(z)$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, m-й строки таблицы Паде для $a(z)$, равномерно сходящаяся к $a(z)$ на компактах, принадлежащих D_m и не содержащих полюсов $a(z)$*. В.И. Буслаевым, А.А. Гончаром и С.П. Суетиным [2] показано, что данное предположение справедливо для всех мероморфных функций при $R_m = \infty$. В общем же случае гипотеза оказалась неверной, как показывает следующий простой контрпример, приведенный этими авторами.

Пусть

$$a(z) = \frac{1+\sqrt[3]{2}z}{1-z^3}.$$

Тогда $R_0 = R_2 = 1$ и при $m=2$ полюсы ζ_n аппроксимаций Паде $\pi_{n,2}(z)$ легко вычисляются: $\zeta_n = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$ при $n = 0(\mathrm{mod}\,3)$, $\zeta_n = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt[3]{2}}$ при $n = 1(\mathrm{mod}\,3)$, и $\zeta_n = \frac{-1 \pm 3}{\sqrt[3]{2}}$ при $n = 2(\mathrm{mod}\,3)$. Таким образом, при любом n функция $\pi_{n,2}(z)$ имеет хотя бы один полюс, модуль которого не превосходит $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Поэтому не существует подпоследовательности $\pi_{n,2}(z)$ равномерно сходящейся в круге $|z| \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, компактно принадлежащем $D_0 = D_2 = \{z \,|\, |z| < 1\}$.

Кроме того, в этой статье показано, что имеет место ослабленный вариант гипотезы Бейкера и Грейвс-Морриса с заменой круга $|z| < R_m$ на круг $|z| < c_m R_m$, где $0 < c_m < 1$ – константа, зависящая только от m. В частности, из приведенного выше примера следует оценка $c_2 \le \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0,7937005\ldots$. Задача о вычислении этой константы или о как можно более точной ее оценке, а также задача описания класса функций, для которых гипотеза Бейкера и Грейвс-Морриса выполняется, пока еще не решены.

Пусть для радиусов m-мероморфности функции $a(z)$ справедливо неравенство $R_m < R_{m+1}$. Легко видеть, что это имеет место тогда и только тогда, когда в замкнутом круге $|z| \le R_m$ лежит ровно $m+1$ полюсов и на окружности $|z| = R_m$ имеется хотя бы один полюс. Тогда к строке с номером m применима теория, развитая в статье [3]. В [4] на основе этой теории получены некоторые достаточные условия выполнимости гипотезы Бейкера – Грейвс-Морриса.

В данной работе для класса $\Upsilon_{m,\sigma}$, состоящего из мероморфных функций, для которых $R_m < R_{m+1}$ и доминирующие полюсы лежат в вершинах правильного σ-многоугольника, мы укажем способ построения всех контрпримеров к гипотезе Бейкера – Грейвс-Морриса. Это позволит нам получить оценки константы c_m в данном классе.

2. Построение контрпримеров в классе $\Upsilon_{m,\sigma}$

Пусть $z_1,\ldots,z_\ell$ – полюсы $a(z)$ в круге $|z| \le R_m$ кратностей $s_1,\ldots,s_\ell$, соответственно; $s_1 + \ldots + s_\ell = m+1$. Предполагается, что на окружности $|z| = R_m$ лежит хотя бы один полюс $a(z)$. Асимптотическое поведение последовательности $\pi_{n,m}(z)$ при $n \to \infty$ в этом случае в основном определяется арифметической природой *доминирующих полюсов* $z_1,\ldots,z_\nu$ функции $a(z)$. Доминирующими полюсами мы называем те полюсы $a(z)$, лежащие на окружности $|z| = R_m$, которые имеют максимальную кратность. В работе [3] найдены пределы всех сходящихся подпоследовательностей $\pi_{n,m}(z)$ и показано, что предельные точки множества полюсов последовательности $\left\{\pi_{n,m}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ состоят из полюсов $z_1,\ldots,z_\ell$ функции $a(z)$ и множества $N_{\mathbf{F}}$ дополнительных предельных точек, состоящего из нулей семейства многочленов $\omega(z,\tau) = \sum_{j=1}^{\nu} C_j \Delta_j(z)\tau_j$, $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_\nu) \in \mathbf{F}$. Здесь $\mathbf{F}$ – монотетическая подгруппа тора $\mathbf{T}^\nu$, полученная замыканием циклической группы с образующей $\left(e^{2\pi i\Theta_1},\ldots,e^{2\pi i\Theta_\nu}\right)$; $2\pi i\Theta_j$ – аргумент z_j. Эта группа явно найдена в [3]. Коэффициенты C_j вычисляются следующим образом:

$$C_j = \frac{1}{(s_j - 1)! z_j^{s_j - 1} D_j^2(z_j) A_j}, \tag{1}$$

где $D_j(z) = \frac{D(z)}{(z-z_j)^{s_j}}$, $D(z) = (z-z_1)^{s_1} \cdots (z-z_\ell)^{s_\ell}$ и A_j – коэффициент при $(z-z_j)^{-s_j}$ в разложении $a(z)$ в ряд Лорана в окрестности полюса $z = z_j$. Многочлены $\Delta_j(z)$ определяются следующим образом: $\Delta_j(z) = \frac{\Delta(z)}{(z-z_j)^{s_j}}$, $\Delta(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_\nu)$. Геометрия множества $N_{\mathbf{F}}$ во многих важных случаях описана в [3].

Если $R_m < R_{m+1}$, то по теореме 1 из [4] контрпримеры надо искать, когда число доминирующих полюсов ν не меньше 3. Вышеприведенный контрпример из [2] построен для рациональной функции в случае, когда $R_2 < R_3$, $\nu = 3$ и доминирующие полюсы лежат в вершинах правильного треугольника ($\sigma = 3$).

Мы будем строить контрпримеры в классе мероморфных функций, для которых $R_m < R_{m+1}$ и доминирующие полюсы которых лежат в вершинах правильных σ-многоугольников. Обозначим этот класс через $\Upsilon_{m,\sigma}$. Напомним, что, если $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$, то по теореме 2.7 из [3] множество $N_{\mathbf{F}}$ совпадает с множеством нулей последовательности многочленов $\omega_j(z) = \sum_{k=1}^{\nu} C_k \Delta_k(z) z_k^j$,

$j = 0,1,...,\sigma - 1$, или, что то же самое, с множеством нулей последовательности рациональных дробей $f_j(z) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{C_k z_k^j}{z - z_k}$. Здесь ν ($\nu \le \sigma$) – число доминирующих полюсов.

Прежде всего, выясним, какими должны быть комплексные числа $\zeta_0, \zeta_1, ..., \zeta_{\sigma-1}$, чтобы существовала мероморфная функция $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$, для которой ζ_j является корнем многочлена $\omega_j(z)$.

Предположим, что такая функция $a(z)$ существует и $z_1, ..., z_\nu$ – ее доминирующие полюсы. Если $1, \varepsilon, ..., \varepsilon^{\sigma-1}$ – система корней степени σ из единицы, то по условию $z_1, ..., z_\nu$ лежат в точках $\varepsilon^k z_1$, $0 \le k \le \sigma - 1$. Пусть $z_j = \varepsilon^{k_j} z_1$, $j = 1, ..., \nu$. Определим ненулевой вектор $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_\sigma)^t$, положив $\alpha_{k_j} = C_j$ для $j = 1, ..., \nu$ и $\alpha_k = 0$ для остальных значений k. Тогда справедливы следующие равенства:

$$f_j(\zeta_j) = z_1^{j-1} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\alpha_k \varepsilon^{jk}}{\lambda_j - \varepsilon^k} = 0, \qquad j = 0,1,...,\sigma - 1,$$

где $\lambda_j = \frac{\zeta_j}{z_1}$. Поэтому ненулевой вектор α принадлежит ядру следующей матрицы:

$$\Lambda_\sigma(\lambda_0, ..., \lambda_{\sigma-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_0 - 1} & \frac{1}{\lambda_0 - \varepsilon} & \cdots & \frac{1}{\lambda_0 - \varepsilon^{\sigma-1}} \\ \frac{1}{\lambda_1 - 1} & \frac{\varepsilon}{\lambda_1 - \varepsilon} & \cdots & \frac{\varepsilon^{\sigma-1}}{\lambda_1 - \varepsilon^{\sigma-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_{\sigma-1} - 1} & \frac{\varepsilon^{\sigma-1}}{\lambda_{\sigma-1} - \varepsilon} & \cdots & \frac{\varepsilon^{(\sigma-1)^2}}{\lambda_{\sigma-1} - \varepsilon^{\sigma-1}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, числа $\zeta_0, \zeta_1, ..., \zeta_{\sigma-1}$ должны быть такими, чтобы выполнялось равенство $\det \Lambda_\sigma(\lambda_0, ..., \lambda_{\sigma-1}) = 0$.

Наоборот, возьмем любое $\sigma \ge 3$ и пусть $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{\sigma-1}$ – любой набор чисел, удовлетворяющих уравнению $\det \Lambda_\sigma(\lambda_0, ..., \lambda_{\sigma-1}) = 0$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_\sigma)^t$ – любой ненулевой вектор из ядра матрицы $\Lambda_\sigma(\lambda_0, ..., \lambda_{\sigma-1})$. Обозначим через ν, $\nu \le \sigma$, число ненулевых координат этого вектора. Выберем любое целое число $m \ge \nu$ и любые действительные числа $0 < R_m < R_{m+1}$. Положим $C_j = \alpha_{k_j} \ne 0$, $z_j = \varepsilon^{k_j} R_m e^{i\varphi}$, φ – любое действительное число, $j = 1, ..., \nu$. Тогда точки $z_1, ..., z_\nu$ лежат в вершинах правильного σ-угольника, а число $\zeta_j = \lambda_j z_1$ является корнем многочлена

$$\omega_j(z) = \sum_{k=1}^{\nu} C_k \Delta_k(z) z_k^j, \qquad j = 0, ..., \sigma - 1.$$

Выберем произвольно различные точки $z_{\nu+1}, ..., z_\ell$, принадлежащие замкнутому кругу $|z| \le R_m$, и припишем точкам $z_1, ..., z_\ell$ кратности $s_1 \ge ... \ge s_\ell$ так, чтобы выполнялись условия $s_1 + ... + s_\ell = m + 1$ и $s_1 = ... = s_\nu > s_{\nu+1}$. По формулам (1) восстановим по $C_1, ..., C_\nu$ старшие лорановские коэффициенты $A_1, ..., A_\nu$, оставшиеся лорановские коэффициенты можем выбрать произвольным образом. По вышеуказанным данным восстановим правильную рациональную дробь $r(z)$. Пусть $b(z)$ – любая аналитическая в круге $|z| < R_{m+1}$ функция. Тогда мероморфная функция $a(z) = b(z) + r(z)$ принадлежит классу $\Upsilon_{m,\sigma}$, множество нулей набора многочленов $\omega_j(z)$, $j = 0, ..., \sigma - 1$, является для нее множеством $N_{\mathbf{F}}$, причем ζ_j – один из корней многочлена $\omega_j(z)$.

Множество всех векторов $(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})$ таких, что $\det\Lambda_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})=0$ и $|\lambda_j|<1$ для всех $j=0,...,\sigma-1$, обозначим через G_σ. Ясно, что каждый вектор из G_σ порождает по описанной выше процедуре функцию, являющуюся контрпримером к гипотезе Бейкера – Грейвс-Морриса, причем каждый контрпример из класса $\Upsilon_{m,\sigma}$ может быть построен таким способом. Таким образом, рациональные функции $r(z)$, доставляющие контрпримеры в классе $\Upsilon_{m,\sigma}$, параметризуются по существу точкой множества G_σ. Однако надо быть уверенным в том, что это множество не пусто для любого σ. Для доказательства этого факта введем матрицу

$$Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})=\begin{pmatrix}\lambda_0^{\sigma-1} & \lambda_0^{\sigma-2} & \cdots & \lambda_0 & 1\\ 1 & \lambda_1^{\sigma-1} & \cdots & \lambda_1^2 & \lambda_1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \lambda_{\sigma-1}^{\sigma-2} & \lambda_{\sigma-1}^{\sigma-3} & \cdots & 1 & \lambda_{\sigma-1}^{\sigma-1}\end{pmatrix}.$$

Пусть F_σ – матрица Вандермонда для системы корней $1,\varepsilon,...,\varepsilon^{\sigma-1}$ (матрица дискретного преобразования Фурье). Тогда непосредственные вычисления показывают, что

$$\Lambda_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})=\mathrm{diag}\left[\frac{1}{\lambda_0^{\sigma-1}},...,\frac{1}{\lambda_{\sigma-1}^{\sigma-1}}\right]Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})F_\sigma,$$

т.е. уравнение $\det\Lambda_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})=0$ равносильно уравнению $\det Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})=0$.

Теорема 1. *Для любого $\sigma\ge 3$ множество G_σ не пусто.*

Доказательство. Предъявим элемент этого множества. Обозначим $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{\sigma}}$ и пусть $d_\sigma(\lambda_0)=\det Z_\sigma(\lambda_0,\lambda_0\varepsilon,...,\lambda_0\varepsilon^{\sigma-1})$. Из вида матрицы Z_σ следует, что $d_\sigma(\lambda_0)$ есть многочлен от λ_0 степени $\sigma(\sigma-1)$ со старшим коэффициентом $(-1)^{\sigma-1}$. Так как для любых $\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1}$ справедливо равенство

$$\det Z_\sigma(\lambda_k,...,\lambda_{\sigma-1},\lambda_0,...,\lambda_{k-1})=(-1)^{(\sigma-1)k}\det Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1}),$$

то для любого корня λ_0 уравнения $d_\sigma(\lambda_0)=0$ числа $\lambda_0\varepsilon,...,\lambda_0\varepsilon^{\sigma-1}$ также являются корнями этого уравнения. Это означает, что $d_\sigma(\lambda_0)$ есть многочлен от $z=\lambda_0^\sigma$ степени $\sigma-1$. Обозначим его через $\hat{d}_\sigma(z)$. Каждый корень μ многочлена $\hat{d}_\sigma(z)$ дает набор чисел $\lambda_0,\lambda_0\varepsilon,...,\lambda_{\sigma-1}\varepsilon^{\sigma-1}$, лежащих на окружности $|z|=|\mu|^{\frac{1}{\sigma}}$ в вершинах правильного σ-многоугольника и удовлетворяющих уравнению $\det Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})=0$.

Рассмотрим теперь матрицу $Z_\sigma(\lambda_0^{-1},\lambda_0^{-1}\varepsilon,...,\lambda_0^{-1}\varepsilon^{\sigma-1})$. Если в ней каждую строку умножить на $\lambda_0^{\sigma-1}$, записать все столбцы и все строки кроме первой в обратном порядке, а затем из каждой k-й строки ($0\le k\le\sigma-1$) вынести множитель ε^k, то после перехода к определителям, получаем

$$d_\sigma(\lambda_0^{-1})=(-1)^\sigma\lambda_0^{-\sigma(\sigma-1)}d_\sigma(\lambda_0).$$

Поэтому, если λ_0 – корень многочлена $d_\sigma(\lambda_0)$, то λ_0^{-1} – также его корень.

Для завершения доказательства осталось показать, что все корни $d_\sigma(\lambda_0)$ не могут лежать на единичной окружности $|\lambda_0|=1$. Предположим противное. Тогда

$$\hat{d}_\sigma(z)=(-1)^{\sigma-1}(z-t_1)\cdots(z-t_{\sigma-1}),\qquad |t_j|=1,$$

и

$$|d_\sigma(1)|=|\hat{d}_\sigma(1)|\le 2^{\sigma-1}.$$

Найдем теперь $|d_\sigma(1)|=|\det Z_\sigma(1,\varepsilon,...,\varepsilon^{\sigma-1})|$. Вынося из k-й строки $Z_\sigma(1,\varepsilon,...,\varepsilon^{\sigma-1})$ множитель ε^{k-1} ($2\le k\le\sigma-1$), мы приходим к определителю матрицы Вандермонда $W(1,\varepsilon^{\sigma-1},...,\varepsilon)$.

Следовательно $|d_\sigma(1)|=|\det F_\sigma|$. Известно, что для матрицы дискретного преобразования Фурье F_σ справедливо соотношение $F_\sigma F_\sigma^* = \sigma I_\sigma$, где F_σ^* – сопряженная к F_σ матрица. Поэтому $|\det F_\sigma|^2=\sigma^\sigma$ и окончательно получаем $|d_\sigma(1)|=\sigma^{\frac{\sigma}{2}}$. Таким образом, предположение о том, что все корни $d_\sigma(\lambda_0)$ лежат на единичной окружности, приводит к неверному при $\sigma \geq 3$ неравенству $\sigma^{\frac{\sigma}{2}} \leq 2^{\sigma-1}$. Поэтому для любого $\sigma \geq 3$ существует корень уравнения $d_\sigma(\lambda_0)=0$, лежащий внутри единичного круга и, следовательно, набор $\lambda_0, \lambda_0\varepsilon, ..., \lambda_0\varepsilon^{\sigma-1}$ принадлежит G_σ. ▲

Приведем пример применения описанной в этом разделе процедуры для построения контрпримера при $\sigma = 3$.

Пример 1. Пусть $\sigma = 3$ и $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$. Многочлен $d_3(\lambda_0)$ имеет вид

$$d_3(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & \lambda_0 & 1 \\ 1 & \lambda_0^2\varepsilon^2 & \lambda_0\varepsilon \\ \lambda_0\varepsilon^2 & 1 & \lambda_0^2\varepsilon^4 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_0^6 + (1-3\varepsilon)\lambda_0^3 + 1 = (\lambda_0^2 + \lambda_0 + \varepsilon)(\lambda_0^2 + \varepsilon^2\lambda_0 + \varepsilon^2)(\lambda_0^2 + \varepsilon\lambda_0 + 1).$$

В качестве λ_0 возьмем корень уравнения $\lambda_0^2 + \lambda_0 + \varepsilon = 0$, лежащий внутри единичной окружности:

$$\lambda_0 = 0{,}4735614832\ -\ 0{,}4447718086i, \quad |\lambda_0| = \overline{r}_3 = 0{,}6496787208.$$

Тогда $\lambda_1 = \lambda_0\varepsilon = 0{,}1484029436 + 0{,}6325021792i$, $\lambda_2 = \lambda_0\varepsilon^2 = -0{,}6219644270 - 0{,}1877303704i$.

Ненулевой вектор $\beta = \left(\lambda_0^4 - \lambda_0\varepsilon, \lambda_0^2 - \lambda_0^2\varepsilon, 1 - \lambda_0^3\varepsilon\right)^t$, являющийся первым столбцом присоединенной к $Z_3(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ матрицы, принадлежит ядру $Z_3(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. С учетом уравнения $\lambda_0^2 + \lambda_0 + \varepsilon = 0$ его можно переписать в виде

$$\beta = \left((\varepsilon-1)(\lambda_0+\varepsilon), (\varepsilon-1)(\lambda_0+\varepsilon), (\varepsilon^2-\varepsilon)\lambda_0 + 1 - \varepsilon^2\right)^t.$$

Тогда вектор

$$\alpha = F_3^*\beta = -3\left(\lambda_0 + \varepsilon, \varepsilon^2\lambda_0 + 1, \lambda_0 + \varepsilon\right)^t$$

принадлежит ядру матрицы $\Lambda_3(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Все его компоненты отличны от нуля, поэтому $\nu = 3$. В качестве C_1, C_2, C_3 можно взять $C_1 = \lambda_0 + \varepsilon, C_2 = \varepsilon^2\lambda_0 + 1, C_3 = \lambda_0 + \varepsilon$.

Простейший контрпример получим, взяв в качестве полюсов $z_1 = 1$, $z_2 = \varepsilon$, $z_3 = \varepsilon^2$, положив их кратности равными 1 и считая, что других полюсов функция не имеет. В этом случае из формулы (1) имеем

$$A_1 = \frac{1}{9C_1}, \quad A_2 = \frac{\varepsilon}{9C_2}, \quad A_3 = \frac{\varepsilon^2}{9C_3}.$$

Тогда рациональная дробь

$$\frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \frac{A_3}{z-z_3}$$

с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией

$$r(z) = \frac{z^2 + z + \varepsilon^2}{z^3 - 1}.$$

Для нее для всех $k \geq 1$ числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ являются полюсами аппроксимаций Паде типа $(3k, 2)$, $(3k+1, 2)$, $(3k+2, 2)$, соответственно. Таким образом, внутри любого круга $|z| < \rho$, $\rho > \overline{r}_3$, для $r(z)$ не существует сходящейся подпоследовательности $\pi_{n,2}(z)$. ▲

Приведем значения минимальных модулей $\overline{r}_\sigma$ корней многочлена $d_\sigma(\lambda_0)$ для нескольких первых значений σ:

$$\overline{r}_3 = 0,6496787208, \quad \overline{r}_4 = 0,5882298353,$$
$$\overline{r}_5 = 0,5867107544, \quad \overline{r}_6 = 0,6063459057.$$

3. Оценки константы c_m

Построенные в теореме 1 элементы множества G_σ позволяют получить оценку сверху для константы c_m из теоремы Буслаева – Гончара – Суетина [2].

В самом деле, для любого $m \geq 3$ положим $R_m = \overline{r}_{m+1}$ и $\sigma = m+1$. По этим данным мы можем построить мероморфную функцию $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$, которая имеет $m+1$ полюсов, лежащих в замкнутом круге $|z| \leq R_m$, и для которой точки $\zeta_0 = \lambda_0, \zeta_1 = \lambda_0\varepsilon, \ldots, \zeta_{\sigma-1} = \lambda_0\varepsilon^{\sigma-1}$ лежат на окружности $|z| = R_m$. Здесь λ_0 – корень уравнения $d_\sigma(\lambda_0) = 0$ такой, что $|\lambda_0| = \overline{r}_{m+1}$. Это означает, что в любом круге $|z| < R_m + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, с выброшенными полюсами $a(z)$, не существует сходящейся подпоследовательности $\pi_{n,m}(z)$. Таким образом, мы получили

Предложение 1.

$$c_m \leq \overline{r}_{m+1}.$$

▲

В классе $\Upsilon_{m,\sigma}$ для констант c_m можно получить и оценку снизу. Для данного класса функций константу c_m будем обозначать $c_{m,\sigma}$.

Теорема 2. *Пусть* $a(z) \in \Upsilon_{m,\sigma}$. *Обозначим* $\underline{r}_\sigma$ *единственный положительный корень уравнения* $z^{\sigma-1} + z^{\sigma-2} + \ldots + z - 1 = 0$. *Тогда существует подпоследовательность* $\pi_{n,m}(z)$, *которая сходится равномерно к* $a(z)$ *внутри области, полученной из круга* $|z| < \underline{r}_\sigma R_m$ *выбрасыванием полюсов* $a(z)$ *и, таким образом,* $c_{m,\sigma} \geq \underline{r}_\sigma$.

Доказательство. Пусть $z_1, \ldots, z_\nu$ – доминирующие полюсы $a(z)$, лежащие в вершинах правильного σ-угольника ($\nu \leq \sigma$). В этом случае множество дополнительных предельных точек $N_{\mathbf{F}}$ совпадает с множеством нулей последовательности многочленов $\omega_j(z) = \sum_{k=1}^{\nu} C_k \Delta_k(z) z_k^j$, $j = 0,1,\ldots,\sigma-1$. Предположим, что сходящейся подпоследовательности $\pi_{n,m}(z)$ не существует, т.е. каждый из многочленов $\omega_j(z)$ имеет хотя бы один корень ζ_j такой, что $|\zeta_j| < \underline{r}_\sigma R_m$. Тогда числа $\lambda_j = \frac{\zeta_j}{z_1}$ удовлетворяют неравенствам $|\lambda_j| < \underline{r}_\sigma$, $j = 0,1,\ldots,\sigma-1$, и для них матрица $\Lambda_\sigma(\lambda_0,\ldots,\lambda_{\sigma-1})$, а значит и $Z_\sigma(\lambda_0,\ldots,\lambda_{\sigma-1})$ необратима.

С другой стороны, легко видеть, что матрица

$$Z_\sigma(0,\ldots,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

обратима и для максимальной строчной нормы ее обратной справедливо равенство

$$\| Z_\sigma^{-1}(0,\ldots,0) \|_\infty = 1.$$

Кроме того,

$$\| Z_\sigma(\lambda_0,\ldots,\lambda_{\sigma-1}) - Z_\sigma(0,\ldots,0) \|_\infty = \max_{0 \leq j \leq \sigma-1} \left(|\lambda_j^{\sigma-1}| + |\lambda_j^{\sigma-2}| + \ldots + |\lambda_j| \right).$$

Поскольку многочлен $z^{\sigma-1}+z^{\sigma-2}+...+z-1$ возрастает при $z>0$, то при $|\lambda_j|<\underline{r}_\sigma$, выполняются неравенства $|\lambda_j^{\sigma-1}|+|\lambda_j^{\sigma-2}|+...+|\lambda_j|<1$, $j=0,1,...,\sigma-1$. Это означает, что

$$\| Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})-Z_\sigma(0,...,0)\|_\infty<\| Z_\sigma^{-1}(0,...,0)\|_\infty^{-1}=1,$$

т.е. матрица $Z_\sigma(\lambda_0,...,\lambda_{\sigma-1})$ обратима.

Противоречие показывает, что хотя бы для одного $j=j_0$ многочлен $\omega_{j_0}(z)$ не имеет корней в круге $|z|<\underline{r}_\sigma R_m$. Поэтому для $n=j_0(\mathrm{mod}\,\sigma)$ последовательность $\pi_{n,m}(z)$ сходится равномерно к $a(z)$ внутри круга $|z|<\underline{r}_\sigma R_m$ с выброшенными полюсами $a(z)$. ▲

Итак, в классе $\Upsilon_{m,\sigma}$ для констант $c_{m,\sigma}$ справедлива оценка:

$$\underline{r}_\sigma \le c_{m,\sigma} \le \overline{r}_{m+1}.$$

В частности,

$$0,6180339887 \le c_{2,3} \le 0,6496787208; \qquad 0,5436890127 \le c_{3,4} \le 0,5882298353;$$

$$0,5187900637 \le c_{4,5} \le 0,5867107544; \qquad 0,5086603916 \le c_{5,6} \le 0,6063459057.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 04-01-96006.

Литература

1. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. Буслаев В.И., Гончар А.А., Суетин С.П. О сходимости подпоследовательностей m-й строки таблицы Паде// Матем. сборник. – 1983. – Т. 120. – № 4. – С. 540–545.
3. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table// J. Approx. Theory – 2003. – V. 122. – P. 160–207.
4. Адуков В.М. О существовании сходящихся подпоследовательностей строки таблицы Паде для мероморфной функции// Известия Челябинского научного центра. – 2002. – Вып. 3. – С. 3–7.

Поступила в редакцию 10 июня 2005 г.