УДК 517.53

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ – ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ПОСЛЕДНЕЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СТРОКИ. РАЦИОНАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

В.М. Адуков, О.Л. Ибряева

В статье рассматривается асимптотика знаменателей аппроксимаций Паде–Чебышева рациональной функции для последней промежуточной строки таблицы Паде–Чебышева. В явном виде найдены все предельные точки множества полюсов аппроксимаций Паде–Чебышева для данного случая.

1. Введение

Классическое определение аппроксимаций Паде для степенных рядов легко может быть перенесено на случай рядов по системе ортогональных многочленов. Однако теория сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений в настоящее время пока далека от завершения. Основные результаты были получены С.П. Суетиным [1–3] и Д.С. Любинским, А. Сиди [4]. Полная теория имеется только для одной строчной последовательности аппроксимаций (аналог теоремы Монтессу де Болора, доказанный С.П. Суетиным [1–2]).

В статье [5] был предложен метод исследования равномерной сходимости для так называемой последней промежуточной строки классической таблицы Паде. Соображения устойчивости позволили показать, что асимптотическое поведение знаменателей аппроксимации Паде для мероморфной функции и ее рациональной части одинаково. Тем самым задача исследования равномерной сходимости аппроксимаций Паде для данной строки была сведена к рациональному случаю.

Частным случаем ортогональных разложений являются разложения по системе многочленов Чебышева $T_k(z)$, $k=1,2,\dots$. Мы собираемся перенести методы и результаты [5] на случай аппроксимаций Паде–Чебышева. Мы полагаем, что предельное поведение аппроксимаций Паде–Чебышева для мероморфной функции и для ее рациональной части также будет одинаковым. Поэтому в этой работе мы изучаем рациональный случай.

2. Постановка задачи

Обозначим Γ_λ – эллипс с фокусами в точках $-1,1$ и D_λ – его внутренность. Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в D_λ за исключением точек $z_1,\dots,z_\ell$, в которых она имеет полюсы кратностей $s_1,\dots,s_\ell$, и $\lambda=s_1+\dots+s_\ell$. Будем предполагать, что $z_1,\dots,z_\ell\notin[-1,1]$.

Проведем через $z_1,\dots,z_\ell$ систему эллипсов с фокусами в точках $-1,1$. Пусть внутри эллипса с максимальной суммой полуосей лежит ρ полюсов. Обозначим этот эллипс – Γ_ρ, а его внутренность – D_ρ. Пусть Γ_0 – любой эллипс, не содержащий полюсов $z_1,\dots,z_\ell$, и D_0 – его внутренность. Функция $f(z)$ может быть разложена в D_0 в ряд по многочленам Чебышева: $f(z)=\dfrac{f_0}{2}+f_1T_1(z)+\dots$ (см., например, [6]).

Рациональную функцию $R_{n,m}(z)=\dfrac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$, такую, что многочлены $P_{n,m}(z),Q_{n,m}(z)$ удовлетворяют условиям $\deg P_{n,m}(z)\le n,\deg Q_{n,m}(z)\le m, Q_{n,m}(z)\not\equiv 0$, и выполняется соотношение

$$f(z)Q_{n,m}(z)-P_{n,m}(z)=O\big(T_{n+m+1}\big)\equiv\sum_{k=n+m+1}^{\infty}a_kT_k(z),$$

будем называть *линейной аппроксимацией Паде–Чебышева типа (n,m)*.

Набор таких аппроксимаций принято записывать в виде таблицы, которая называется *таблицей Паде–Чебышева*. Аппроксимации Паде–Чебышева типа (n,m) при фиксированном m образуют *строку таблицы* с номером m.

Если $m=\lambda$ ($m=\rho$), то, по теореме С.П. Суетина [1], примененной к аппроксимациям Паде–Чебышева, $R_{n,m}(z)$ сходится к $f(z)$ равномерно внутри области D_λ (D_ρ) с выброшенными полюсами функции $f(z)$.

Строка с номером m таким, что $\rho<m<\lambda$, называется *промежуточной строкой*. Мы будем изучать строку с номером $m=\lambda-1$, т.е. *последнюю промежуточную строку*. Для этой строки мы собираемся найти в явном виде для рациональных функций все частичные пределы последовательности подходящим образом нормированных знаменателей аппроксимаций Паде–Чебышева. Будет описано множество всех предельных точек полюсов аппроксимаций Паде–Чебышева в данном случае.

3. Явная формула для знаменателей аппроксимаций Паде–Чебышева

Пусть $r(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$ – правильная рациональная дробь и $D(z)=z^\lambda+d_{\lambda-1}z^{\lambda-1}+\dots+d_0$.

Цель данного параграфа – найти явно знаменатели линейных аппроксимаций Паде–Чебышева типа $(n,\lambda-1)$ для функции $r(z)$. Это будет сделано в терминах специальных решений некоторых многочленных уравнений.

Пусть $z_1,\dots,z_\ell$ – корни знаменателя $D(z)$ кратностей $s_1,\dots,s_\ell$. Пусть $w_1,\dots,w_\ell$ – образы этих корней при отображении $w=z+\sqrt{z^2-1}$ такие, что $|w_j|<1$ для всех j. Составим многочлен

$$\gamma(w)=\left(w-w_1\right)^{s_1}\left(w-w_2\right)^{s_2}\cdots\left(w-w_\ell\right)^{s_\ell}=\gamma_0+\gamma_1 w+\dots+\gamma_\lambda w^\lambda. \tag{1}$$

Уравнением Безу назовем уравнение вида

$$N(z)V_n(z)+D(z)U_n(z)=\gamma_0 T_n(z)+\gamma_1 T_{n+1}(z)+\dots+\gamma_\lambda T_{n+\lambda}(z), \tag{2}$$

где γ_i – коэффициенты многочлена (1).

Очевидно, что, в силу взаимной простоты $N(z)$ и $D(z)$, решение уравнения (2) всегда существует. Можно показать, что существует единственное решение уравнения (2), удовлетворяющее условию $\deg V_n(z)\le\lambda-1$. Его мы будем называть *минимальным.* Если $\left(V_n(z),U_n(z)\right)$ – минимальное решение, то легко доказать, что $\deg U_n(z)=n$ при $n\ge\lambda-1$.

Следующая теорема является одной из основных в этом параграфе.

Теорема 1. *Пусть $\left(V_n(z),U_n(z)\right)$ – минимальное решение уравнения Безу (2). Тогда*

$$r(z)V_n(z)+U_n(z)=\alpha_0 T_{n+\lambda}(z)+\alpha_1 T_{n+\lambda+1}(z)+\ldots=O(T_{n+\lambda}).$$

Если дополнительно выполнено условие $n\ge\lambda-1$, то $-\dfrac{U_n(z)}{V_n(z)}=R_{n,\lambda-1}(z)$ – линейная аппроксимация Паде–Чебышева типа $\left(n,\lambda-1\right)$.

Доказательство. Из уравнения Безу получаем

$$r(z)V_n(z)+U_n(z)=\frac{1}{D(z)}\left(\gamma_0 T_n(z)+\gamma_1 T_{n+1}(z)+\dots+\gamma_\lambda T_{n+\lambda}(z)\right).$$

В правой части равенства сделаем замену $z=\dfrac12\left(w+\dfrac1w\right)$. Легко видеть, что при такой замене $D(z)\equiv\widetilde{D}(w)=\dfrac{(-1)^\lambda}{2^\lambda w_1^{s_1}\dots w_\ell^{s_\ell}}\gamma(w)\gamma\left(\dfrac1w\right)$, и мы получаем:

$$\frac{1}{D(z)}\left(\gamma_0 T_n(z)+\gamma_1 T_{n+1}(z)+\dots+\gamma_\lambda T_{n+\lambda}(z)\right)=\left(-1\right)^\lambda 2^{\lambda-1}w_1^{s_1}\dots w_\ell^{s_\ell}\left(w^n\frac{1}{\gamma\left(\dfrac1w\right)}+\frac{1}{w^n}\frac{1}{\gamma(w)}\right).$$

Без ограничения общности можно считать, что $|w_1|\le|w_2|\le\ldots\le|w_\ell|$. Тогда функция $\dfrac{1}{\gamma(w)}$ – аналитическая во внешности круга $|w|\le|w_\ell|<1$. Разложим ее в ряд Лорана в $|w|>|w_\ell|$:

$$\frac{1}{\gamma(w)}=\frac{1}{(w-w_1)^{s_1}\ldots(w-w_\ell)^{s_\ell}}=\frac{\beta_0}{w^\lambda}+\frac{\beta_1}{w^{\lambda+1}}+\cdots.$$

Тогда в круге $|w|<\dfrac{1}{|w_\ell|}$ имеем следующее разложение: $\dfrac{1}{\gamma\left(\dfrac{1}{w}\right)}=\beta_0 w^\lambda+\beta_1 w^{\lambda+1}+\cdots$.

И, следовательно, в кольце $|w_\ell|<|w|<\dfrac{1}{|w_\ell|}$, получаем:

$$w^n\frac{1}{\gamma\left(\dfrac{1}{w}\right)}+\frac{1}{w^n}\frac{1}{\gamma(w)}=\beta_0\left(w^{n+\lambda}+\frac{1}{w^{n+\lambda}}\right)+\beta_1\left(w^{n+\lambda+1}+\frac{1}{w^{n+\lambda+1}}\right)+\cdots.$$

Возвращаясь к старой переменной z и учитывая, что $w^k+\dfrac{1}{w^k}=2T_k(z)$, получаем:

$$r(z)V_n(z)+U_n(z)=\frac{1}{D(z)}\big(\gamma_0T_n(z)+\gamma_1T_{n+1}(z)+\cdots+\gamma_\lambda T_{n+\lambda}(z)\big)=\alpha_0T_{n+\lambda}(z)+\alpha_1T_{n+\lambda+1}(z)+\ldots.$$

Поскольку $n\ge\lambda-1$, то $\deg U_n(z)=n$ и, следовательно, это соотношение означает, что $-\dfrac{U_n(z)}{V_n(z)}$ является линейной аппроксимацией Паде–Чебышева типа $(n,\lambda-1)$.

Для получения явной формулы знаменателя $V_n(z)$ нам потребуется два вспомогательных утверждения.

Предложение 1. *Для $V_n(z)$, $U_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, справедливы следующие рекуррентные соотношения:*

$$\frac{1}{2}\big(V_{n-1}(z)+V_{n+1}(z)\big)=T_1(z)V_n(z)-v_nD(z),\quad \frac{1}{2}\big(U_{n-1}(z)+U_{n+1}(z)\big)=T_1(z)U_n(z)+v_nN(z),$$

где v_n – формальный старший коэффициент многочлена $V_n(z)$.

Эти рекуррентные соотношения легко следуют из уравнения Безу и правила умножения для многочленов Чебышева.

Предложение 2. *Для $k=0,1,\ldots$, $n=k,k+1,\ldots$, справедливы следующие формулы:*

$$\frac{1}{2}\big(V_{n+k}(z)+V_{n-k}(z)\big)=T_k(z)V_n(z)-X_k(z)D(z),$$

где $X_k(z)$ находятся из рекуррентного соотношения

$$\frac{1}{2}\big(X_{k+1}(z)+X_{k-1}(z)\big)=T_1(z)X_k(z)+\frac{1}{2}\big(v_{n+k}+v_{n-k}\big)$$

и $X_0=0$, $X_1=v_n$.

Проверяется непосредственно по индукции, с использованием предложения 1. Теперь мы можем найти $V_n(z)$ в терминах многочленов $X_k(z)$.

Теорема 2. *Пусть разложение знаменателя $D(z)$ по многочленам Чебышева имеет вид: $D(z)=\delta_0+\delta_1T_1(z)+\cdots+\delta_\lambda T_\lambda(z)$, где $\delta_\lambda=\dfrac{1}{2^{\lambda-1}}$.*

Тогда для $n\ge\lambda-1$ справедливо равенство $V_n(z)=\sum_{k=0}^{\lambda}\delta_kX_k(z)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнения $\frac{1}{2}(V_{n+k}(z)+V_{n-k}(z))=T_k(z)V_n(z)-X_k(z)D(z)$ для $k=0,\ldots,\lambda$, умножим каждое на δ_k и сложим полученные равенства. В результате будем иметь:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lambda}\delta_k\left(V_{n+k}\left(z\right)+V_{n-k}\left(z\right)\right)=D\left(z\right)\left[V_n\left(z\right)-\sum_{k=0}^{\lambda}\delta_k X_k\left(z\right)\right].$$

Слева в этом равенстве стоит многочлен степени не выше $\lambda-1$, справа произведение многочлена $D(z)$ степени ровно λ на многочлен формальной степени $\lambda-1$. Очевидно, что знак равенства возможен лишь, если $V_n(z)=\sum_{k=0}^{\lambda}\delta_k X_k(z)$.

Окончательный результат выглядит теперь следующим образом.

Теорема 3. *Многочлен $V_n(z)$ представляется в виде:*

$$V_n(z)=2\sum_{k=1}^{\lambda}\delta_k\sum_{j=0}^{k-1}{}'\left(\sum_{m=0}^{k-j-1}v_{2m+n-k+j+1}\right)T_j(z).$$

Здесь v_j коэффициент при $z^{\lambda-1}$ многочлена $V_j(z)$.

Штрих у суммы означает, что слагаемое, соответствующее $j=0$ берется с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Доказательство. Достаточно показать, что $X_k\left(z\right)=2\sum_{j=0}^{k-1}{}'\left(\sum_{m=0}^{k-j-1}v_{2m+n-k+j+1}\right)T_j(z),\quad k\geq 1$.

Для $k=1$ формула, очевидно, верна. Предполагая, что она верна также для $2,\ldots,k$, докажем ее справедливость и для $k+1$, т.е., что $X_{k+1}\left(z\right)=2\sum_{j=0}^{k}{}'\left(\sum_{m=0}^{k-j}v_{2m+n-k+j}\right)T_j(z)$.

Из рекуррентного соотношения для многочленов $X_k(z)$ получаем:

$$X_{k+1}\left(z\right)=4T_1\left(z\right)\sum_{j=0}^{k-1}{}'\left(\sum_{m=0}^{k-j-1}v_{2m+n-k+j+1}\right)T_j(z)-2\sum_{j=0}^{k-2}{}'\left(\sum_{m=0}^{k-j-2}v_{2m+n-k+j+2}\right)T_j(z)+v_{n+k}+v_{n-k}.$$

Воспользовавшись правилом умножения для многочленов Чебышева, имеем:

$$X_{k+1}\left(z\right)=2\sum_{j=1}^{k}{}'\left(\sum_{m=0}^{k-j}v_{2m+n-k+j}\right)T_j(z)+\sum_{m=0}^{k-1}v_{2m+n-k+1}T_1(z)+\sum_{m=0}^{k-2}v_{2m+n-k+2}+v_{n+k}+v_{n-k},$$

откуда после несложных преобразований и получим требуемое.

Замечание. *Легко видеть, что $V_n(z)$ может также быть представлено в виде:*

$$V_n(z)=2\sum_{j=0}^{\lambda-1}{}'\sum_{k=j+1}^{\lambda}\sum_{m=0}^{k-j-1}\delta_k v_{2m+n-k+j+1}T_j(z). \tag{3}$$

Осталось получить явное представление для коэффициентов v_n. Это можно сделать, однако, формулы будут достаточно громоздкими и не понадобятся нам в дальнейшем. Для получения асимптотики $V_n(z)$ нам достаточно доказать лишь следующий результат.

Теорема 4. *Для старшего коэффициента v_n многочлена $V_n(z)$ справедливо представление:*

$v_n=p_1(n)\frac{1}{w_1^n}+\cdots+p_\ell(n)\frac{1}{w_1^\ell}$, *где* $p_i=C_i^0+C_i^1 n+\ldots+C_i^{s_i-1}n^{s_i-1}$.

Коэффициент $C_i^{s_i-1}\equiv C_i$ вычисляется по формуле:

$$C_i=\frac{2^{\lambda-s_i-1}(-1)^{\lambda-1}w_1^{s_1}\ldots w_\ell^{s_\ell}}{(s_i-1)!\widetilde{N}(w_i)\gamma_i(w_i)w_i^{2s_i-1}}\left(\frac{1}{w_i}-w_i\right)^{s_i}.$$

Здесь $\gamma_i(w)=\dfrac{\gamma(w)}{(w-w_i)^{s_i}}$, $\widetilde{N}(w)$ *– функция, полученная из* $N(z)$ *при замене* $z=\dfrac{1}{2}\left(w+\dfrac{1}{w}\right)$.

Доказательство. Будем рассматривать многочлен $V_n(z)=2\delta_\lambda v_n T_{\lambda-1}(z)+\cdots=v_n z^{\lambda-1}+\cdots$ как интерполяционный многочлен Эрмита с узлами интерполяции $z_1,\ldots,z_\ell$ с кратностями $s_1,\ldots,s_\ell$ [7].

Тогда $V_n(z)\equiv H_{\lambda-1}(z)=\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{k=0}^{s_i-1}\sum\limits_{m=0}^{s_i-k-1}\dfrac{V_n^{(k)}(z_i)}{k!m!}\left(\dfrac{(z-z_i)^{s_i}}{D(z)}\right)^{(m)}_{|z=z_i}\dfrac{D(z)}{(z-z_i)^{s_i-k-m}}$.

Отсюда получаем, что старший коэффициент многочлена $V_n(z)\equiv H_{\lambda-1}(z)$ равен:

$$v_n=\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{s_i-1}\frac{V_n^{(k)}(z_i)}{k!(s_i-k-1)!}\left(\frac{(z-z_i)^{s_i}}{D(z)}\right)^{(s_i-k-1)}_{|z=z_i}.$$

Для нахождения $V_n^{(k)}(z_i)$ запишем уравнение Безу в переменных w

$$\widetilde{N}(w)\widetilde{V_n}(w)+\widetilde{D}(w)\widetilde{U_n}(w)=\frac{1}{2}\left(\gamma_0\left(w^n+\frac{1}{w^n}\right)+\cdots+\gamma_\lambda\left(w^{n+\lambda}+\frac{1}{w^{n+\lambda}}\right)\right),$$

продифференцируем его k раз по переменной w, $0\le k\le s_i-1$ и воспользуемся формулой Лейбница.

Получим

$$\sum_{j=0}^{k}c_k^j\widetilde{N}^{(k-j)}(w)\widetilde{V}_n^{(j)}(w)_{|w=w_i}+\sum_{j=0}^{k}c_k^j\widetilde{U}_n^{(k-j)}(w)\widetilde{D}^{(j)}(w)_{|w=w_i}=\frac{1}{2}\left[\gamma_0\left(w^n+\frac{1}{w^n}\right)+\cdots+\gamma_\lambda\left(w^{n+\lambda}+\frac{1}{w^{n+\lambda}}\right)\right]^{(k)}_{|w=w_i}.$$

Здесь c_k^j – биномиальные коэффициенты.

Поскольку $z=z_i$ – корень кратности s_i многочлена $D(z)$, то $\widetilde{D}^{(j)}(w)_{|w=w_i}=D^{(j)}(z)=0$, так как $0\le j\le k\le s_i-1$.

Тогда

$$\sum_{j=0}^{k}c_k^j\widetilde{N}^{(k-j)}(w)\widetilde{V}_n^{(j)}(w)_{|w=w_i}=\frac{1}{2}\left[w^n\gamma(w)+\frac{1}{w^n}\gamma\left(\frac{1}{w}\right)\right]^{(k)}_{|w=w_i}.$$

Преобразуя последнее выражение по формуле Лейбница и, учитывая, что w_i является корнем многочлена $\gamma(w)$ кратности s_i, имеем:

$$\sum_{j=0}^{k}c_k^j\widetilde{N}^{(k-j)}(w)\widetilde{V}_n^{(j)}(w)_{|w=w_i}=\frac{w_i^{-n-k}}{2(n-1)!}\sum_{j=0}^{k}c_k^j(-1)^{k-j}(n+k-j-1)!w_i^j\gamma^{(j)}\left(\frac{1}{w_i}\right).$$

Отсюда находим:

$$V_n^{(k)}(z_i)=\widetilde{V_n}^{(k)}(w_i)=q_k(n)\frac{1}{w_i^n},$$

где $q_k(n)$ – многочлен k-й степени со старшим коэффициентом $\dfrac{(-1)^k\gamma\left(\dfrac{1}{w_i}\right)}{2w_i^k\widetilde{N}(w_i)}$.

Подставим найденные значения для $V_n^{(k)}(z_i)$ в формулу для v_n и после несложных преобразований получим: $v_n=p_1(n)\dfrac{1}{w_1^n}+\cdots+p_\ell(n)\dfrac{1}{w_1^\ell}$, где $p_i(n)$ – многочлены степени s_i-1 с коэффициентом при старшей степени $C_i=\dfrac{2^{\lambda-s_i-1}(-1)^{\lambda-1}w_1^{s_1}\ldots w_\ell^{s_\ell}}{(s_i-1)!\widetilde{N}(w_i)\gamma_i(w_i)w_i^{2s_i-1}}\left(\dfrac{1}{w_i}-w_i\right)^{s_i}$.

4. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде–Чебышева

Изучим предельное поведение минимальных решений $V_n(z)$ уравнений Безу, т.е. предельное поведение знаменателей аппроксимаций Паде–Чебышева. По теореме 4 многочлены $V_n(z)$ выражаются через их старшие коэффициенты v_n и $v_n = p_1(n)\frac{1}{w_1^n} + \cdots + p_\ell(n)\frac{1}{w_1^\ell}$, где $w_1,\ldots,w_\ell$ – образы различных полюсов $z_1,\ldots,z_\ell$ рациональной функции $r(z)$.

Отметим, что в формулу для $V_n(z)$ коэффициенты v_n входят в виде сумм $v_{n+j}+v_{n-j}$.

Будем считать, что $\frac{1}{w_1},\cdots,\frac{1}{w_\mu}$ имеют максимальный модуль, а их кратности таковы, что $s \equiv s_1 = \ldots = s_\nu > s_{\nu+1} \geq \ldots \geq s_\mu$, $1 \leq \nu \leq \mu$. Полюсы $z_1,\ldots,z_\nu$, соответствующие точкам $w_1,\ldots,w_\nu$, будем называть *доминирующими полюсами* функции $f(z)$. Именно они и будут определять асимптотическое поведение $V_n(z)$.

Пусть $\frac{1}{w_1} = R\,e^{2\pi i\theta_1},\ldots,\frac{1}{w_\nu} = R\,e^{2\pi i\theta_\nu}$. Для получения асимптотики $V_n(z)$ будем действовать в духе работы [5]. Определим монотетическую подгруппу $\mathbf{F}$ тора $\mathbf{T}^\nu$ как замыкание циклической группы, порожденной элементом $\left(e^{2\pi i\theta_1},\ldots,e^{2\pi i\theta_\nu}\right)$. Способ явного вычисления группы $\mathbf{F}$ приведен в [5].

Фиксируем произвольную точку $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_\nu)$, принадлежащую группе $\mathbf{F}$, и пусть Λ_τ – любая последовательность номеров $n_1,n_2,\ldots,n_j < n_{j+1}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{2\pi in\theta_1},\ldots,e^{2\pi in\theta_\nu}\right) = \tau$, $n \in \Lambda_\tau$.

Очевидно, что при $n \to \infty$, $n \in \Lambda_\tau$, последовательность v_n имеет следующую асимптотику: $v_n = R^n n^{s-1}\left(C_1\tau_1 + \cdots + C_\nu\tau_\nu + o(1)\right)$. Тогда для любого фиксированного значения $-n \leq j \leq n$ при $n \to \infty$, $n \in \Lambda_\tau$, сумма $v_{n+j}+v_{n-j}$ имеет следующую асимптотику:

$$v_{n+j} + v_{n-j} = 2R^n n^{s-1}\left[C_1\tau_1 T_j(z_1) + \cdots + C_\nu\tau_\nu T_j(z_\nu) + o(1)\right]. \tag{4}$$

Обозначим $\widetilde{S}_j(\tau) = C_1\tau_1\frac{1}{w_1^j} + \cdots + C_\nu\tau_\nu\frac{1}{w_\nu^j}$, $S_j(\tau) = C_1\tau_1 T_j(z_1) + \cdots + C_\nu\tau_\nu T_j(z_\nu)$. Если $S_0(\tau) \neq 0$, то существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_{n+j}+v_{n-j}}{v_n} = \frac{S_j(\tau)}{S_0(\tau)}$. Точка τ в этом случае называется *регулярной* точкой группы $\mathbf{F}$. Следующее предложение является аналогом предложения 6.1 из [5] и доказывается аналогично.

Предложение 3. *Среди любых чисел* $S_n(\tau), S_{n+1}(\tau),\ldots,S_{n+\nu-1}(\tau)$ *найдется хотя бы одно, отличное от нуля.*

Будем называть целое неотрицательное число $\delta(\tau)$ *дефектом* точки $\tau \in \mathbf{F}$, если $\delta(\tau)$ – наименьшее число такое, что $S_{\delta(\tau)}(\tau) \neq 0$. Из предложения 3 следует, что $0 \leq \delta(\tau) \leq \nu - 1$. При фиксированном τ будем использовать более короткое обозначение δ.

Если δ – дефект точки $\tau \in \mathbf{F}$, то из асимптотики (4) следует, что существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+j}+v_{n-j}}{v_{n+\delta}+v_{n-\delta}} = \frac{S_j(\tau)}{S_\delta(\tau)},\ n \in \Lambda_\tau. \tag{5}$$

Будем говорить, что многочлен $X(z) = x_0T_0(z) + x_1T_1(z) + \cdots + x_nT_n(z)$ является d-нормированным, если $x_d = 1$ для некоторого d, $0 \leq d \leq n$.

Теперь мы готовы исследовать асимптотическое поведение $V_n(z)$.

Теорема 5. *Пусть* τ *– произвольная точка группы* $\mathbf{F}$, Λ_τ *– соответствующая ей последовательность номеров и* δ *– дефект этой точки. Тогда для всех достаточно больших* $n\in\Lambda_\tau$ *многочлен* $V_n(z)$ *допускает* $(\lambda-\delta-1)$ *- нормировку и существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} V_n^{(\lambda-\delta-1)}(z)=W(z,\tau)$, $n\in\Lambda_\tau$. *Здесь*

$$W(z,\tau)=A_\delta w(z,\tau)(z-z_1)^{s_1-1}\cdots(z-z_\nu)^{s_\nu-1}(z-z_{\nu+1})^{s_{\nu+1}}\cdots(z-z_\ell)^{s_\ell}, \qquad (6)$$

где $w(z,\tau)=\sum\limits_{l=1}^{\nu}C_l\tau_l\Delta_l(z)$, $\Delta_l(z)=\dfrac{\Delta(z)}{z-z_l}$, $\Delta(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_\nu)$ *и* $A_\delta=\begin{cases}2^{\lambda-3}S_\delta^{-1}, \delta\neq\lambda-1,\\ 2^{\lambda-2}S_\delta^{-1}, \delta=\lambda-1.\end{cases}$

Доказательство. По формуле (3) коэффициент при $T_{\lambda-\delta-1}(z)$ в многочлене $V_n(z)$ находится следующим образом:

$$\alpha'_{n,\lambda-\delta-1}=2\sum_{i=\lambda-\delta}^{\lambda}\sum_{m=0}^{i-\lambda+\delta}\delta_i v_{2m+n-i+\lambda-\delta}=$$

$$=2\left[\delta_{\lambda-\delta}v_n+\delta_{\lambda-\delta+1}(v_{n-1}+v_{n+1})+\cdots+\delta_\lambda(v_{n-\delta}+v_{n-\delta+2}+\cdots+v_{n+\lambda-2}+v_{n+\delta})\right].$$

Здесь штрих означает, что при $\lambda-\delta-1=0$ надо брать формулу без множителя 2. Из асимптотики (4) следует, что при всех достаточно больших $n\in\Lambda_\tau$ коэффициент $v_{n+\delta}+v_{n-\delta}$ отличен от нуля. Поэтому $\alpha'_{n,\lambda-\delta-1}=2(v_{n+\delta}+v_{n-\delta})\beta_{n,\lambda-\delta-1}$, где

$$\beta_{n,\lambda-\delta-1}=\delta_{\lambda-\delta}\frac{v_n}{v_{n+\delta}+v_{n-\delta}}+\delta_{\lambda-\delta-1}\frac{v_{n-1}+v_{n+1}}{v_{n+\delta}+v_{n-\delta}}+\cdots+\delta_\lambda\left(1+\frac{v_{n-\delta+2}+v_{n+\delta-2}}{v_{n+\delta}+v_{n-\delta}}\right).$$

Из определения дефекта δ и формулы (5) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_{n,\lambda-\delta-1}=\delta_\lambda=\dfrac{1}{2^{\lambda-1}}$, $n\in\Lambda_\tau$, и $\alpha'_{n,\lambda-\delta-1}$ отличен от нуля для всех достаточно больших $n\in\Lambda_\tau$. Таким образом, многочлен $V_n(z)$ действительно может быть $(\lambda-\delta-1)$-нормирован.

Для получения нормированного многочлена $V_n^{(\lambda-\delta-1)}(z)$ воспользуемся формулой (3). Тогда

$$\lim_{n\to\infty}V_n^{(\lambda-\delta-1)}(z)=2A_\delta\sum_{j=0}^{\lambda-1}{}'\sum_{i=j+1}^{\lambda}\sum_{m=0}^{i-j-1}\delta_i\sum_{l=1}^{\nu}C_l\tau_l\frac{1}{w_l^{2m-i+j+1}}T_j(z),\ n\in\Lambda_\tau. \qquad (7)$$

Докажем, что (7) совпадает с выражением: $A_\delta\sum\limits_{l=1}^{\nu}C_l\tau_l\dfrac{D(z)}{z-z_l}$. Для этого преобразуем это выражение до вида (7).

Используя разложение дроби $\dfrac{C_l\tau_l}{z-z_l}=\dfrac{4C_l\tau_l}{w_l-\dfrac{1}{w_l}}\sum\limits_{j=0}^{\infty}{}'w_l^jT_j(z)$ в ряд по многочленам Чебышева,

получаем $\sum\limits_{l=1}^{\nu}C_l\tau_l\dfrac{D(z)}{z-z_l}=\sum\limits_{l=1}^{\nu}\dfrac{4C_l\tau_l}{\left(w_l-\dfrac{1}{w_l}\right)}\sum\limits_{i=0}^{\lambda}\sum\limits_{j=0}^{\infty}{}'\delta_iw_l^jT_j(z)T_i(z)$.

Воспользовавшись далее правилом умножения для многочленов Чебышева и сделав замены индекса суммирования, будем иметь:

$$\sum_{l=1}^{\nu}C_l\tau_l\frac{D(z)}{z-z_l}=\sum_{l=1}^{\nu}\frac{2C_l\tau_l}{\left(w_l-\dfrac{1}{w_l}\right)}\sum_{j=0}^{\infty}{}'\left[\sum_{i=0}^{\lambda}\delta_i\left(w_l^{|j-i|}+w_l^{j+i}\right)\right]T_j(z).$$

Заметим, что коэффициент при $T_j(z)$ в квадратных скобках при всех $j \ge \lambda$ есть $\sum_{i=0}^{\lambda} \delta_i \left(w_l^{j-i} + w_l^{j+i} \right) = 2\sum_{i=0}^{\lambda} \delta_i w_l^j T_i(z_l) = 2w_l^j D(z_l) = 0$ и что выражение $\sum_{i=0}^{\lambda} \delta_i \left(w_l^{|j-i|} + w_l^{j+i} \right)$ преобразовывается до $\sum_{i=j+1}^{\lambda} \delta_i \left(w_l^{i-j} - w_l^{j-i} \right)$. Тогда,

$$\sum_{l=1}^{\nu} C_l \tau_l \frac{D(z)}{z - z_l} = \sum_{l=1}^{\nu} \frac{2C_l \tau_l}{\left(w_l - \dfrac{1}{w_l} \right)} \sum_{j=0}^{\lambda-1}{}' \left[\sum_{i=j+1}^{\lambda} \delta_i \left(w_l^{i-j} - w_l^{j-i} \right) \right] T_j(z).$$

Легко видеть, что $w_l^{i-j} - w_l^{j-i} = \left(w_l - \dfrac{1}{w_l} \right) \sum_{m=0}^{i-j-1} w_l^{i-j-m-1} \dfrac{1}{w_l^m} = \left(w_l - \dfrac{1}{w_l} \right) \sum_{m=0}^{i-j-1} \dfrac{1}{w_l^{j-i+2m+1}}$.

Окончательно получаем, $\sum_{l=1}^{\nu} C_l \tau_l \dfrac{D(z)}{z - z_l} = 2\sum_{j=0}^{\lambda-1}{}' \sum_{i=j+1}^{\lambda} \sum_{m=0}^{i-j-1} \delta_i \sum_{l=1}^{\nu} C_l \tau_l \dfrac{1}{w_l^{2m-i+j+1}} T_j(z)$, т.е. что

$$\lim_{n \to \infty} V_n^{(\lambda-\delta-1)}(z) = A_\delta \sum_{l=1}^{\nu} C_l \tau_l \frac{D(z)}{z - z_l}.$$

Так как $D(z) = \Delta(z)(z - z_1)^{s_1 - 1} \ldots (z - z_\nu)^{s_\nu - 1} (z - z_{\nu+1})^{s_{\nu+1}} \ldots (z - z_\ell)^{s_\ell}$, то мы приходим к формуле (6).

Итак, мы нашли частичные пределы последовательности знаменателей линейных аппроксимаций Паде–Чебышева типа $(n, \lambda - 1)$ для рациональной функции $r(z)$ по последовательностям Λ_τ. Нетрудно показать, что таким образом мы получили все частичные пределы. Поэтому, в полной аналогии с работой [5], нули семейства многочленов $\left\{ W(z,\tau) \right\}_{\tau \in \mathbf{F}}$ дают множество всех предельных точек полюсов аппроксимаций Паде–Чебышева типа $(n, \lambda - 1)$.

Геометрия множества нулей $\left\{ W(z,\tau) \right\}_{\tau \in \mathbf{F}}$ изучена в [5].

Также, как и в [5], мы можем теперь доказать равномерную сходимость подпоследовательности $R_{n,\lambda-1}(z)$, $n \in \Lambda_\tau$ внутри соответствующих областей к функции $f(z)$. Можно также найти и области равномерной сходимости для последовательности $R_{n,\lambda-1}(z)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал, грант № 04-01-96006.

О.Л. Ибряева благодарит также за финансовую поддержку Правительство Челябинской области (исследовательский проект 007.01.06-05.БХ).

Литература

1. Суетин С.П. О сходимости рациональных аппроксимаций полиномиальных разложений в областях мероморфности заданной функции// Матем. сборник. – 1978. – Т. 105. – № 3. – С. 413–430.
2. Суетин С.П. О теореме Монтессу де Болора для рациональных аппроксимаций ортогональных разложений// Матем. сборник. – 1981. – Т. 114. – № 3. – С. 451–464.
3. Суетин С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда// Успехи математических наук. – 2002. – Т. 57. – № 1. – С. 45–142.
4. Lubinsky D.S., Sidi A. Convergence of linear and nonlinear Pade approximant from series of orthogonal polynomials// Transaction of the American mathematical society. – 1983. – V. 278. – № 1. – P. 333–345.
5. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table// J. Approx. Theory – 2003. – V. 122. – P. 160–207.
6. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том II. Дальнейшее построение теории. – М.: Наука, 1968. – 624 с.
7. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1962. – Т. I. – 464 с.

Поступила в редакцию 19 августа 2005 г.