

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина

Исследуется напряженно-деформированное состояние в зоне пластических деформаций менее прочного, чем основной материал, поперечного слоя растягиваемой полосы в условиях плоской деформации. Приближенным интегрированием системы уравнений пластического равновесия при использовании гипотезы плоских сечений получены аналитические выражения для компонент тензора напряжений во всех точках пластического слоя, вычислена предельная нагрузка и наибольшая толщина слоя, при котором соединение равнопрочно механически неоднородной полосе.

1. Введение и основные допущения. Построение математических моделей напряженно-деформированного состояния (НДС) пластических сред в большинстве практически важных задач основано на частичном предугадывании внутреннего состояния среды в форме гипотез, формулирующих некоторые соотношения между напряжениями, деформациями, скоростями деформаций, смещениями, скоростями смещений и т.д., или накладывающих какие-то ограничения на соответствующие функции. В работе, при изучении НДС мягкой прослойки растягиваемой полосы, материал которой переходит в состояние пластического течения раньше основного материала полосы, принята так называемая гипотеза плоских сечений, что позволило найти приближенные аналитические выражения для компонент тензора напряжений в любой момент нагружения во всех точках пластического слоя, вычислить предельную нагрузку и наибольшую толщину слоя, когда соединение (полоса с мягкой прослойкой) равнопрочно однородной полосе без мягкой прослойки. Предполагается, что слой имеет две ортогональные оси симметрии (основные соотношения будут получены для частного случая прямоугольника). В процессе нагружения основной металл деформируется упруго, а при значительных напряжениях участки, расположенные вблизи пластического слоя, вовлекаются в пластическую деформацию. При выводе основных формул материал слоя и основной металл считаются идеально жесткопластическими и удовлетворяющими обычным в таких случаях допущениям [1]. В качестве уравнения пластичности принято условие Мизеса. Полученные результаты переносятся на упрочняемые материалы заменой в условии полной пластичности предела текучести материала слоя на пластическую постоянную, характеризующую момент потери устойчивости процесса пластического деформирования слоя.

Свяжем слой с декартовой системой координат, направив ось OX по продольной для слоя оси симметрии слоя, ось OY – по продольной для полосы оси симметрии (поперечной оси симметрии слоя).

2. Математическая постановка задачи. НДС пластической среды при плоской деформации определяется, как известно [1], системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\tau_{xy})^2 = 4. \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}. \quad (5)$$

Здесь σ_x, σ_y и τ_{xy} – бесконечные компоненты тензора напряжений, полученные нормировкой соответствующих компонент делением на пластическую постоянную (предел текучести или предел пластической устойчивости) k^M ; v_x и v_y – скорости перемещений точек среды в направлениях ОХ и ОУ соответственно. Носителем этих уравнений является часть слоя D в первой четверти координатной плоскости; в случае прямоугольного слоя $D=[0;1] \times [0;\chi]$, где χ – относительная толщина слоя (в общем случае χ зависит от x).

Будем предполагать, что на линии контакта касательные напряжения, равные нулю в слое на оси ОУ, монотонно возрастает с ростом x и достигает наибольшего значения α при $x = x_1$ ($0 < x_1 \leq 1$):

$$\max_{x \in [0;1]} \tau_{xy}(x, \chi) = \alpha, \quad \alpha \in (0;1]. \quad (6)$$

Величина параметра α зависит от коэффициента механической неоднородности $k = k^T / k^M$, где k^T – пластическая постоянная для более прочного основного металла. Известна [2] оценка для α :

$$\alpha = (k-1) \left(1 + \frac{(k-1)^2}{4} \right), \quad 1 < k < 2. \quad (7)$$

Наиболее важным с точки зрения приложений (сварные соединения) является случай малой ($k < 1,4$) механической неоднородности рассмотренный в работе более подробно. Из соображений симметрии следует краевые условия

$$\tau_{xy}(0; y) = 0, \quad \tau_{xy}(x; 0) = 0. \quad (8)$$

и условия

$$v_x(0; y) = 0, \quad v_y(x; 0) = 0. \quad (9)$$

На свободной поверхности

$$\tau_{xy}(1; y) = 0. \quad (10)$$

Условий (6),(8)–(10) недостаточно для однозначного решения системы (1)–(5) или хотя бы системы (1)–(3). Поэтому обычно рассматриваются какие-либо ограничения на функциональный класс решений, следующие из апостериорных соображений. В работе [3] в качестве такого ограничения использовалась гипотеза продольных сечений:

$$v_x(x, y) = a(x)b(y) + c(x). \quad (11)$$

Наряду с допущениями указанного вида, не противоречат экспериментальным данным гипотезы поперечных сечений, то есть предположения о характере деформирования координатных прямых

$$y = \text{const}.$$

Весьма общим допущением такого вида является формула

$$v_y(x, y) = a(x)b(y) + c(y), \quad (12)$$

где функцию $a(x)$ можно трактовать как функцию «искривления» горизонтальной линии координатной сетки (11), $c(y)$ – как функцию «смещения» координатных линий (11), а $b(y)$ – как «амплитуду» прогиба. Наиболее простым и важным частным случаем предположений типа (12) является гипотеза плоских сечений

$$v_y(x, y) = W(y), \quad (13)$$

то есть допущение, что скорость перемещения точки слоя в направлении линии нагружения (оси ОУ) не зависит от расстояния точки до свободной границы $x = 1$. Этот случай рассматривается в работе.

3. Вычисление напряжений. Условие (13) вместе с (4) и (9) приводит к ограничению на характер скорости перемещения точек слоя в направлении оси ОХ:

$$v_x(x, y) = -xW'(y). \quad (14)$$

Введя обозначение

$$Y(y) = \frac{W''(y)}{W'(y)}, \quad (15)$$

из (15) и (5) получим:

$$\tau_{xy} = \frac{x}{4} Y(y) (\sigma_x - \sigma_y). \quad (16)$$

Подставив выражение для τ_{xy} из (16) в условие (3), находим:

$$\sigma_y - \sigma_x = \pm \frac{4}{\sqrt{4 + x^2 Y^2(y)}}. \quad (17)$$

знак «+» соответствует растяжению соединения, знак «-» – сжатию. В работе рассматривается растяжение (случай сжатия исследуется аналогично). Подстановка (17) в (16) дает

$$\tau_{xy} = -\frac{xY(y)}{\sqrt{4 + x^2 Y^2(y)}}. \quad (18)$$

Используя разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8} - \dots, \quad |t| < 1, \quad (19)$$

для $t = 0,5xY(y)$, получим из (18) и (17):

$$\tau_{xy} = -\frac{xY(y)}{2} + \frac{x^3 Y^3(y)}{8} - \frac{3x^5 Y^5(y)}{128} + \dots; \quad (20)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = 2 \left(1 - \frac{x^2 Y^2(y)}{8} + \frac{3x^4 Y^4(y)}{128} - \dots \right). \quad (21)$$

Если в разложении (19) оставить только первое слагаемое, относительная ошибка окажется равной величине $\sqrt{1+t^2} - 1$. В силу граничного условия (6) $|\tau_{xy}| \leq \alpha$, поэтому из (18) следует, что при $\alpha = 0,25$ $t = 0,5xY(y) \leq 1/15$; тогда относительная ошибка около 3%. Следовательно, при малых значениях α , в силу (20) и (21), можно считать, что

$$\tau_{xy} = \frac{xY(y)}{2}; \quad (22)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = 2 \left(1 - \frac{x^2 Y^2(y)}{8} \right). \quad (23)$$

Подставив эти выражения в (1), (2), получим уравнение

$$Y'' - 2YY' = 0, \quad (24)$$

причем, в силу граничного условия (8),

$$Y(0) = 0. \quad (25)$$

Результаты получатся более точными, если в выражениях (22) и (23) количество слагаемых увеличить на одно, воспользовавшись равенствами (20) и (21). После аналогичных рассуждений и преобразований аналог уравнения (24) будет выглядеть следующим образом:

$$Y'' - 2YY' + \frac{3}{2} Y^3 = 0.$$

Тем не менее, далее в работе используется уравнение (24), так как при малых α точность основанных на нем решений более чем достаточна для приложений и позволяет получить не слишком громоздкие аналитические выражения в силу простоты решений задачи (24), (25). Общее решение задачи (24), (25) имеет вид

$$Y = A \operatorname{th}(Ay); \quad (26)$$

$$Y = -A \operatorname{tg}(Ay), \quad (27)$$

где A – некоторая положительная постоянная. Так как при растяжении в области D $\tau_{xy} \geq 0$, из (22) следует, что $Y(y) \leq 0$, поэтому формула (27) соответствует растяжению, а (26) – сжатию. Рассматривая растяжение, из формул (27) и (18) получим:

$$\tau_{xy} = \frac{Ax \operatorname{tg}(Ay)}{\sqrt{4 + A^2 x^2 \operatorname{tg}^2(Ay)}}. \quad (28)$$

При малых α можно, в соответствии с (22), считать, что

$$\tau_{xy} = \frac{A}{2} x \operatorname{tg}(Ay). \quad (29)$$

Постоянная A находится из граничного условия (6). Рассмотрим для простоты случай прямоугольного слоя. Пусть наибольшее значение τ_{xy} достигается в некоторой точке x_1 на контактной поверхности $y = \chi$. Тогда для вычисления A следует решать трансцендентное уравнение

$$Ax_1 \operatorname{tg}(A\chi) = \frac{2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}. \quad (30)$$

в случае (28); если использовать (29), то в уравнении (30) надо правую часть заменить на 2α . Координаты точки x_1 определяются построением поля характеристик (линий скольжения) от свободной поверхности внутрь области D . Характеристики, пересекающие слой из его угла, выходят на линию контакта в точке с абсциссой x_1 . Опуская вычисления, приведем результат (здесь α выражено через k по формуле (7)):

$$x_1 = 1 - \frac{4\chi}{2 + \alpha} \cong 1 - \frac{4\chi}{k + 1}, \quad \chi < 0,5. \quad (31)$$

Рассматривая движение точки по указанной характеристике, на основании теоремы Генки, можно вычислить значение σ_y в точке x_1

$$\sigma_y(x_1, \chi) = 2 + \frac{(k-1)(3-k)}{2}. \quad (32)$$

Дальше будем пользоваться формулой (29), рассматривая важный частный случай малой механической неоднородности ($k-1 = 0, 1, \dots, 0,3$). Все рассуждения можно провести и на основе формулы (28), но аналитические выражения для нормальных компонент тензора напряжений будут труднообозримы.

Подставив выражение для τ_{xy} из (28) в систему (1)–(3), найдем, с точностью до постоянного слагаемого c , формулу для вычисления нормальных напряжений (промежуточные выкладки опускаем):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c - \frac{A^2 x^2}{4 \cos^2(Ay)} + \ln |\cos(Ay)|, \\ \sigma_y &= 2 + c - \frac{A^2 x^2}{4} + \ln |\cos(Ay)|, \quad x \in [0; x_1], \quad y \in [0; \chi]. \end{aligned} \quad (33)$$

Положив в последнем равенстве $x = x_1$, и воспользовавшись формулами (31)–(33), получим значение постоянной c :

$$c = \frac{(k-1)(3-k)}{2} + \frac{A^2 (1 - 4\chi/(k+1))^2}{4} - \ln |\cos(A\chi)|. \quad (34)$$

4. Вычисление предельной нагрузки. Среднее предельное напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma_{cp} = \int_0^1 \sigma_y(x, \chi) dx,$$

причем на отрезке $x \in [x_1, 1]$ напряжение $\sigma_y(x, \chi) = \sigma_y(x_1, \chi)$, то есть постоянно. Учитывая это, а также формулы (33) и (34), получим:

$$\sigma_{cp} = 2 + \frac{(k-1)(3-k)}{2} + \frac{A^2(k+1-4\chi)^3}{6(k+1)^3}.$$

Введем обозначение. Пусть $y = a \operatorname{tg} d(x)$, $x \in (0; +\infty]$ – функция, обратная к функции $x = y \operatorname{tg} y$, $y \in [0; \pi/2)$. Тогда для вычисления постоянной A из уравнения (30) следует формула

$$A = \frac{1}{\chi} a \operatorname{tg} d \left(\frac{2(k^2-1)(1+0,75(k-1)^2\chi)}{k+1-4\chi} \right).$$

Для малых значений аргумента $a \operatorname{tg} d(x) \cong \sqrt{x}$; это приближенное равенство приводит к формуле

$$A^2 = \frac{2(k^2-1)(1+0,75(k-1)^2)}{(k+1-4\chi)\chi},$$

Откуда

$$\sigma_{cp} = 2 + \sigma_{yn}, \quad \sigma_{yn} = \frac{(k-1)(3-k)}{2} + \frac{(k-1)(k+1-4\chi)^2}{3(k+1)^2\chi}. \quad (35)$$

Полоса, содержащая прослойку из менее прочного материала малой толщины, может не уступать по прочности однородной полосе из основного материала за счет контактного упрочнения прослойки. Для определения наибольшей толщины прослойки в полосе, равнопрочной однородной полосе из того же материала, но без прослойки, надо приравнять среднее предельное напряжение растяжения в однородной полосе напряжению, вычисленному по формуле (35). В безразмерных напряжениях соответствующее уравнение имеет вид

$$2 + \sigma_{yn} = 2k.$$

Решая его, получим с ошибкой, не превышающей 1%, $\chi_p = \frac{2(k+1)}{3k^2+6k+19}$. В частности, при $k < 1,5$ $\chi_p = 0,14$, то есть практически постоянна.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-08-18179а.

Литература

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
2. Дильман В.Л., Отсеемин А.А. Анализ методом линий скольжения вязкой прочности сварного соединения с подрезом прямошовных труб большого диаметра// Проблемы прочности. – 2004. – № 3. – С. 72–82.
3. Дильман В.Л., Отсеемин А.А. О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии// Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 6. – С. 115–124.

Поступила в редакцию 22 июня 2005 г.