

МОДЕЛИ КОМЕТ С НЕАФЕЛИЙНЫМ КАСАНИЕМ ОРБИТЫ ЮПИТЕРА. АПСИДАЛЬНЫЕ ТОЧКИ РАСПОЛОЖЕНЫ НА ОРБИТЕ ЮПИТЕРА

Н.Ю. Емельяненко

В работе исследуется кинематика касательного сближения малого тела с Юпитером. В рамках парной задачи двух тел (Солнце-Юпитер, Солнце-комета) предлагаются две модели комет, у которых афелий или перигелий расположены на орбите Юпитера, но точки низкоскоростного касания их орбит с орбитой планеты не совпадают с апсидальными точками. Рассматривается возможность и определяются условия низкоскоростного сближения этих комет с Юпитером. Анализируются особенности сближений модельных комет.

Введение

Работа продолжает исследование кинематики низкоскоростных сближений. Основные сведения об этих сближениях, введенных определениях и области ω (орбит комет с особенностями в сближениях с Юпитером) можно найти в работах [1–3].

Основные задачи исследования

В работе изучаются модельные кометы, орбиты которых расположены на ломаной линии A_3AP_3 области ω [3].

1. Рассматривается эволюция орбит при продвижении вдоль линии A_3AP_3 (изменение элементов, характеризующих размеры и форму орбиты).

2. Оценивается возможность и определяются условия синхронного движения Юпитера и кометы по афелийной (перигелийной) части орбиты.

3. Выделяются и описываются возможные особенности сближения с Юпитером модельных комет.

Пусть a, b, e, q, Q – большая и малая полуоси, эксцентриситет, перигелийное и афелийное расстояния, M – точка низкоскоростного касания, E, v – эксцентрисическая и истинная аномалии кометы, r – ее радиус-вектор, r_j^* – расстояние кометы от орбиты Юпитера по радиусу-вектору, r_j – йовицентрическое расстояние, α – угол между направлением на комету и Юпитер в произвольный момент времени. Соответствующие элементы орбиты Юпитера будем обозначать теми же буквами со штрихами.

В предлагаемых кинематических моделях низкоскоростных сближений предполагается, что при прохождении афелия (перигелия) комета и Юпитер находятся на одном радиусе-векторе.

Введем на эллиптической орбите кометы опорные точки Q, q, b, I, F и нанесем их на рисунки орбит рассматриваемых моделей (рис. 1, 2). Точки b, I, F – парные. Линия b_1b_2 – малая ось; $I_1I_2(F_1F_2)$ – хорда, проходящая через мнимый (действительный) фокус эллиптической орбиты кометы симметрично линии апсид. На рисунках индексы опущены.

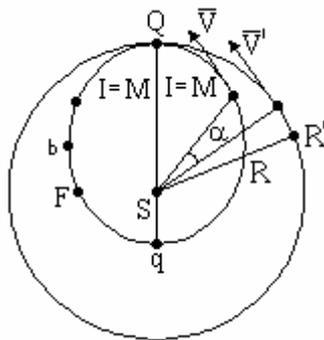


Рис. 1. Комета A_3 и опорные точки на ней (левая часть). Комета проходит особые точки R и M

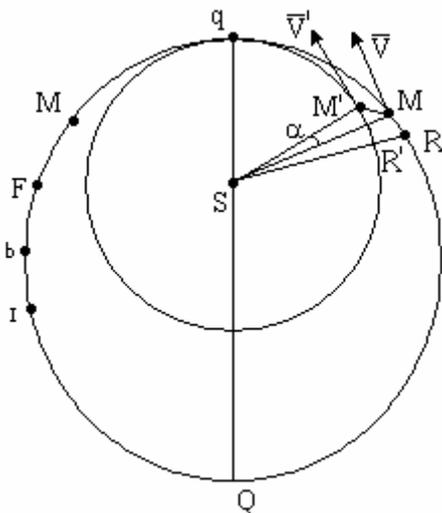


Рис. 2. Комета P_3 и опорные точки на ней (левая часть). Комета проходит особые точки R и M

В предлагаемых моделях низкоскоростного сближения движения кометы и Юпитера симметричны относительно линии апсид, поэтому опорные точки наносим только на левые части рисунков. В рамках рассматриваемой задачи в опорных точках орбиты кометы известно решение уравнения Кеплера. На правых частях рисунков показаны положения тел в точках низкоскоростного касания орбит M и M' , и в момент времени, когда комета и Юпитер находятся на одном радиусе-векторе.

Точки M и M' назовем точками низкоскоростного касания орбит, если в момент времени t_M векторы гелиоцентрических скоростей кометы и Юпитера равны:

$$\vec{V} \parallel \vec{V}', \tag{1}$$

$$V = V', \tag{2}$$

где V, V' – абсолютные величины векторов \vec{V}, \vec{V}' . Равенство (1) означает коллинеарность и одинаковую направленность векторов.

Пусть \vec{V}_j и V_j – вектор йовицентрической скорости кометы и его модуль; $r_k, r_j^k, V^k, \nu_k, \alpha_k$ ($k=Q, M, I, b, F, R$) – радиус-вектор гелиоцентрической и йовицентрической орбиты, модуль вектора ее гелиоцентрической скорости, истинная аномалия и угол между направлениями на комету и Юпитер в опорных или особых (M, R) точках; t_k – момент прохождения кометой этих точек.

1. Модель A_3 (невозмущенная орбита до и после сближения)

Это кометы, орбиты которых удовлетворяют условию:

$$e = \frac{a' - a}{a}, \quad 3,68 \text{ a.e.} \leq a < 5,20 \text{ a.e.} \tag{1.1}$$

Они расположены на средней левой границе области ω , линии AA_3 [3]. В дальнейшем изложении все эти кометы называются кометой A_3 . У кометы A_3 точка афелия Q расположена на орбите Юпитера. Для кометы A_3 выполнено неравенство

$$SI \leq r_M < SQ, \tag{1.2}$$

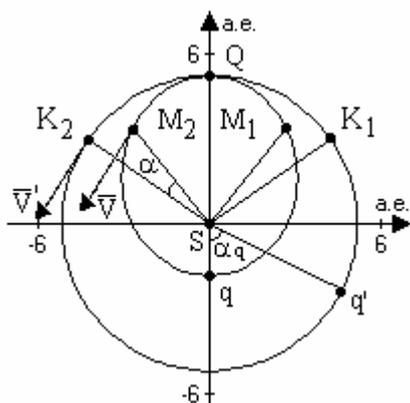


Рис. 3. Комета A_3 . Задача на построение: $(\vec{V}') = (\vec{V})$ (левая часть). Начальные условия афелийного сближения: q, q'

то есть на орбите этой кометы имеются две точки низкоскоростного касания – M_1 и M_2 , расположенные на афелийной части орбиты симметрично относительно линии апсид. Очевидно, что для таких орбит в точке M_j условие (1) не выполнено, если комета и Юпитер находятся на одном радиусе-векторе. Решая задачу на построение касательной к окружности (\vec{V}') , параллельной секущей (\vec{V}) , на орбите Юпитера находим точку K , в которой это условие выполнено. Обозначим длины дуг кометы и Юпитера: $\cup M_1QM_2 = l_1 \cup K_1QK_2 = l'_1$. Из решения задачи на построение следует неравенство $l < l'_1$ (см. рис. 3).

Рассмотрим изменение размеров и формы орбит кометы A_3 при продвижении вдоль линии AA_3 области ω . Точка A соответствует круговой орбите Юпитера радиуса $a' = 3,68 \text{ a.e.}$, $e = 0,41$. Выразим элементы a, Q, q орбиты

кометы A_3 через эксцентриситет e и большую полуось орбиты Юпитера a' , совпадающую в рассматриваемой модели с его радиусом:

$$a = \frac{a'}{1+e}, \quad Q = a', \quad q = \frac{1-e}{1+e} a'. \tag{1.3}$$

Исследование функций $a = a(e), Q = Q(e), q = q(e)$ показало, что при продвижении вдоль линии орбит AA_3 области ω размеры орбиты кометы A_3 непрерывно убывают от круговой орбиты Юпитера до наименьшей A_3^{\min} , изображенной на рис. 1:

$$A_3^{\min} : \begin{cases} a = 3,68 \text{ a.e.}, \\ Q = 5,20 \text{ a.e.}, \\ q = 2,16 \text{ a.e.}, \\ e = 0,41. \end{cases} \quad (1.4)$$

Рассмотрим две особенности рис. 1.

1. Как было отмечено во введении, в момент времени t_Q $\alpha_Q = 0^\circ$. На орбите кометы A_3 имеется еще одна парная особая точка R , не совпадающая с афелием, при прохождении которой малое тело и Юпитер находятся на одном радиусе-векторе. Так как на дуге $\cup QM$ абсолютная величина угла α непрерывно увеличивается ($V < V'$), а после прохождения этой точки начинает уменьшаться ($V > V'$), то на орбите кометы A_3 за точкой M обязательно найдется такая точка R , в которой $\alpha_R = 0^\circ$. После прохождения этой точки угол α меняет знак на противоположный, его абсолютная величина снова возрастает.

2. Пусть длина дуги $\cup M_1QM_2 = l'$. Сравнение рис. 1 и 3 показывает, что положение точек M'_i на орбите Юпитера не противоречит решению задачи на построение касательной к окружности (\vec{V}') , параллельной секущей (\vec{V}) .

Найдем условия, необходимые для длительного низкоскоростного сближения кометы A_3 и Юпитера. Рассмотрим синхронные движения Юпитера и кометы A_3 на периоде ее обращения вокруг солнца, отмеченном афелийным минимумом (рис. 1). В рамках решаемой задачи комета A_3 и Юпитер движутся по законам Кеплера. Ввиду симметрии движения тел относительно линии апсид опишем движение кометы на дуге $\cup Qq$.

Из уравнения Кеплера (см. [3]) определим угол α :

$$\alpha = \left| v - (E + e \sin E) \left(\frac{a}{a'} \right)^{\frac{3}{2}} \right| \quad (1.5)$$

(величины E, v отсчитываются от точки афелия).

Как уже было сказано ранее, все углы уравнения (1.5) в опорных точках и точке M определяются аналитически, как функции эксцентриситета кометной орбиты. Решение уравнения Кеплера полностью определяет движение кометы в задаче двух тел. Оно было найдено в опорных точках и точке M (табл. 1).

Положения кометы q и Юпитера q' (см. рис. 3) с углом α_q между направлениями на эти объекты, соответствующим табличному значению, назовем начальными условиями низкоскоростного касательного сближения кометы A_3 .

Значения величины e варьировались с шагом $\Delta e = 0,01$. Линейной интерполяцией между опорными точками определено положение точки R для 41 значения эксцентриситета и вычислены значения величин r_j^R и $\frac{V^R}{V'}$. В целях экономии места в табл.1 приведены только те строки, которые подтверждают приводимый ниже анализ.

Таблица 1а

r_j^I	V^I/V'	α_b	r_j^B	V^B/V'	α_F	r_j^F	V^F/V'	α_q	r_j^q	V^q/V'
0,05	1,01	0,20	0,05	1,00	0,20	0,05	1,00	2,67	0,26	1,02
0,24	1,02	0,82	0,26	1,02	1,03	0,28	1,03	12,70	1,20	1,08
0,40	1,04	1,22	0,44	1,04	1,86	0,50	1,05	21,83	2,00	1,14
0,58	1,05	1,43	0,69	1,07	3,14	0,82	1,10	34,04	2,95	1,25

Таблица 16

r_j^R	V^R/V'	α_b	r_j^B	V^b/V'	α_F	r_j^F	V^F/V'	α_q	r_j^q	V^q/V'
0,61	1,10	1,42	0,73	1,08	3,35	0,88	1,11	35,93	3,08	1,27
1,00	1,22	0,76	1,08	1,12	5,54	1,20	1,20	52,73	4,41	1,46
1,22	1,31	0,07	1,23	1,14	6,67	1,26	1,26	59,95	4,51	1,58

Таблица 1в

r_j^B	V^R/V'	v_R	r_j^R	V^b/V'	α_F	r_j^F	V^F/V'	α_q	r_j^q	V^q/V'
1,41	1,17	71,02	1,48	1,42	8,05	2,01	1,34	67,75	4,84	1,73
1,52	1,19	70,48	1,65	1,52	8,99	2,22	1,41	72,49	5,00	1,84

2. Модель P_3 (невозмущенная орбита до и после сближения)

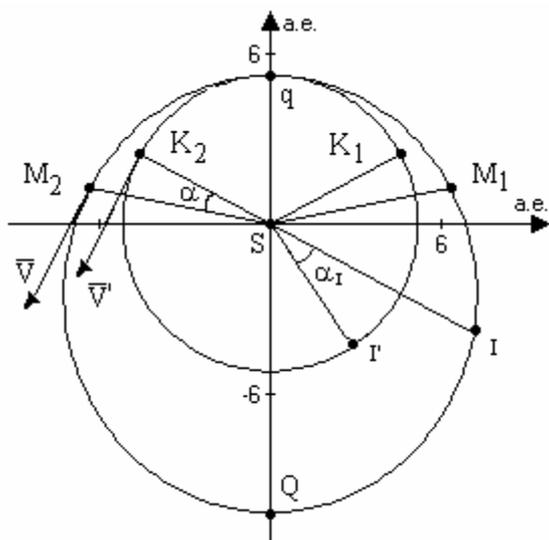


Рис. 4. Комета P_3 . Задача на построение: $(\vec{V}') = (\vec{V})$ (левая часть). Начальные условия перигелийного сближения: I, I'

Это кометы, орбиты которых удовлетворяют условию:

$$e = \frac{a - a'}{a}, \quad 5,20 \text{ а.е.} < a \leq 7,65 \text{ а.е.}$$

Они расположены на средней правой линии области ω , линии AP_3 [3]. В дальнейшем изложении все эти кометы называются кометой P_3 . У кометы P_3 точка перигелия q расположена на орбите Юпитера. Для кометы P_3 выполнено условие:

$$S_q < r_M < SF,$$

то есть на орбите этой кометы имеются две точки низкоскоростного касания орбит M_1 и M_2 , расположенные на перигелийной части орбиты симметрично относительно линии апсид. Очевидно, что для таких орбит в точке M_i условие (1) не выполнено, если комета и Юпитер находятся на одном радиусе-векторе. Решая задачу

на построение касательной к окружности (\vec{V}') , параллельной заданной прямой (\vec{V}) , на орбите Юпитера находим точку K , в которой это условие выполнено. Введем обозначения для длин дуг кометы и Юпитера: $\cup M_1qM_2 = l, \cup K_1qK_2 = l'_1$. Из решения задачи на построение следует неравенство $l > l'_1$ (см. рис. 4).

Рассмотрим изменения размеров и формы орбит кометы P_3 при продвижении вдоль линии AP_3 области ω . Точка A соответствует круговой орбите Юпитера радиуса $a' = 5,20 \text{ а.е.}$ Точка P_3 имеет координаты: $a = 7,65 \text{ а.е.}$ $e = 0,32$. Выразим элементы a, Q, q орбиты кометы P_3 через эксцентриситет e и большую полуось орбиты Юпитера a' :

$$a = \frac{a'}{1 - e}, \quad Q = \frac{1 + e}{1 - e} a', \quad q = a'. \tag{2.3}$$

Исследование функций $a = a(e), Q = Q(e), q = q(e)$ показало, что при продвижении вдоль линии орбиты AP_3 области ω размеры орбиты кометы непрерывно увеличиваются от круговой орбиты Юпитера до наибольшей, изображенной на рис.2:

$$P_3^{\max} : \begin{cases} a = 7,65 \text{ a.e.}, \\ Q = 10,10 \text{ a.e.}, \\ q = 5,20 \text{ a.e.}, \\ e = 0,32. \end{cases} \quad (2.4)$$

Рассмотрим две особенности рис. 2.

1. Как было отмечено во введении, в момент времени t_q $\alpha_q = 0^\circ$. На орбите кометы P_3 имеется еще одна парная особая точка R , не совпадающая с афелием, при прохождении которой малое тело и Юпитер находятся на одном радиус-векторе. Так как на дуге $\cup qM$ абсолютная величина угла α непрерывно увеличивается ($V > V'$), а после прохождения точки M начинают уменьшаться ($V < V'$), то на орбите кометы P_3 за точкой M обязательно найдется такая точка R , в которой $\alpha_R = 0^\circ$. После прохождения этой точки угол α меняет знак на противоположный, его абсолютная величина снова возрастает.

2. Пусть длина дуги $\cup M'_1 q M'_2 = l'$. Сравнение рис. 4 и 5 показывает, что положения точек M'_i на орбите Юпитера не противоречит решению задачи на построение касательной к окружности (\vec{V}'), параллельной секущей (\vec{V}).

Найдем условия, необходимые для длительного сближения кометы P_3 и Юпитера.

Рассмотрим синхронные движения Юпитера и кометы P_3 на периоде ее обращения вокруг Солнца, отмеченным перигелийным минимумом (см. рис. 4, 5). В рамках решаемой задачи комета P_3 и Юпитер движутся по законам Кеплера. Ввиду симметрии движения тел относительно линий абсид опишем движение кометы на дуге $\cup qQ$.

Из уравнения Кеплера (см. [3]) определяем угол α :

$$\alpha = \left| v - (E - e \sin E) \left(\frac{a}{a'} \right)^{\frac{3}{2}} \right|. \quad (2.5)$$

(величина E , v отсчитываются от точки перигелия). Все углы уравнения (2.5) в опорных точках и точке M определяются аналитически, как функции эксцентриситета кометной орбиты. Решение уравнения Кеплера было найдено в опорных точках и точке M (табл. 2).

Положение кометы и Юпитера (см. рис. 4) с углом α_I между направлениями на эти объекты, соответствующим табличному значению, назовем начальными условиями низкоскоростного касательного сближения кометы P_3 .

Таблица 2

r_j^F	V^F/V'	α_b	r_j^B	V^b/V'	α_I	r_j^I	V^I/V'	α_Q	r_j^Q	V^Q/V'
0,06	1,00	-0,21	0,06	0,99	-0,22	0,06	0,99	-2,73	0,27	0,99
0,39	0,97	-1,86	0,43	0,96	-2,36	0,47	0,96	-20,70	2,15	0,90
0,83	0,94	-5,25	1,05	0,92	-7,95	1,32	0,90	-46,69	5,41	0,79
1,11	0,93	-8,23	1,55	0,89	-13,59	2,10	0,86	-71,56	7,89	0,73
1,33	0,92	-11,20	2,01	0,87	-19,66	2,92	0,82	-91,68	10,09	0,68
1,79	0,91	-19,14	3,20	0,82	-37,32	5,29	0,74	-141,00	14,52	0,59

Значения величины e варьировались с шагом $\Delta e = 0,01$. Линейной интерполяцией между спорными точками определено положение точки R для 32 значений эксцентриситета и вычислены значения величины r_j^R и V^R/V' . В целях экономии места в табл. 2 приведены только те строки, которые подтверждают приводимый ниже анализ.

3. Особенности апсидальных сближений

Остановимся более подробно на возможных особенностях апсидальных сближений комет A_3 и P_3 .

Кратные минимумы функции йовицентрического расстояния (КМ). Введем вспомогательную величину r_j^* в виде

$$r_j^* = |a' - r| \tag{3.1}$$

(это абсолютная величина расстояния кометы от орбиты Юпитера в произвольный момент времени).

Преобразуем формулу теоремы косинусов для треугольника Солнце – комета – Юпитер с учетом равенства (3.1) к виду

$$r_j^2 = (r_j^*)^2 + 4ra' \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \tag{3.2}$$

Исследование функции $r_j = r_j(r_j^*, r, \alpha)$ на экстремум для моделей A_3 и P_3 показало, что она имеет единственный экстремум-минимум для комет A_3 и P_3

$$r_j^{\min} = r_j^Q = 0, \tag{3.3}$$

$$r_j^{\min} = r_j^q = 0. \tag{3.4}$$

Возрастание величины r_j между апсидальными точками в опорных и особых точках орбит комет A_3 и P_3 можно заметить и при анализе табл.1, 2. В окрестности точки R ($\alpha = 0^\circ$) экстремум отсутствует. Отметим интересную закономерность в расположении точки R на орбитах комет A_3 и P_3 . Значение угла ν_R очень мало изменяется при продвижении вдоль ломаной $A_3A P_3$ области ω и, в среднем, близко к 71° . Модельные кометы A_3 , P_3 и Юпитер значительную часть периода обращения кометы, отмеченного апсидальным минимумом, движутся как бы «взявшись за руки»: для кометы A_3 $\alpha_M^{\max}(e = 0,41) = -6^\circ,71$; для кометы P_3 $\alpha_M^{\max}(e = 0,24) = 1^\circ,16$.

Временный спутниковый захват в смысле Эверхарта (ВСЗ). На орбитах комет A_3 и P_3 имеются две точки, в которых (с той или иной степенью точности) могут быть выполнены условия (1, 2). В точке Q (q) выполнено условие (1). В условии (2) имеет место только приближенное равенство (см. 2-й столбец табл. 1, 2.). По-видимому, ВСЗ в окрестности апсидальной точки, включая саму точку Q (q), маловероятен для орбит с эксцентриситетом $e > 0,33$. В точке M выполнено условие (2). Положение кометы M и Юпитера M' , как уже отмечалось ранее для моделей A_3 и P_3 , благоприятны для возникновения ВСЗ в окрестности точки низкоскоростного касания орбит. Напомним, что точка M – парная. Следовательно, низкоскоростные сближения комет A_3 и P_3 могут сопровождаться тремя участками ВСЗ. Для низкоэксцентрических орбит [4] возможно их слияние в один, охватывающий всю апсидальную часть орбиты кометы.

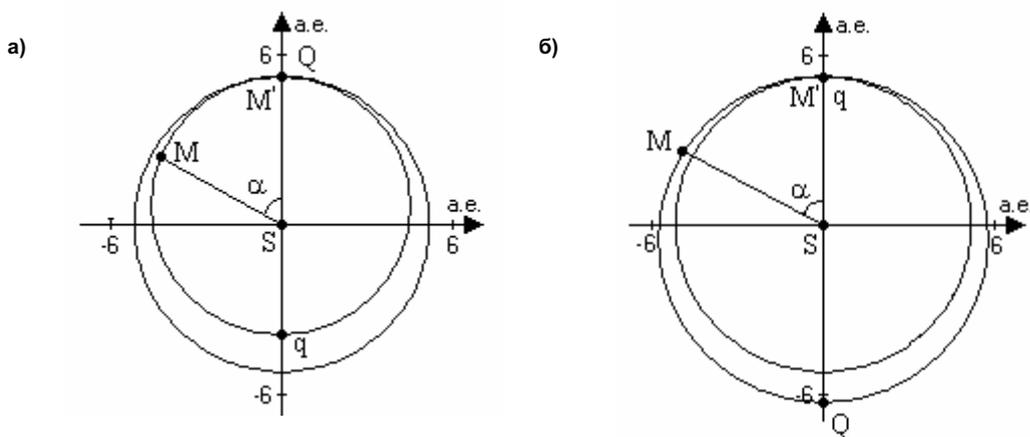


Рис. 5. Кометы A_3 (а) и P_3 (б) в тригональном центре либрации: $M \equiv L_5$. S и M' – положение Солнца и Юпитера

Заслуживает внимания изменение положения точки M : на орбите кометы A_3 : $45^\circ \leq v_M < 60^\circ$, на орбите кометы P_3 : $60^\circ \leq v_M < 70^\circ$. С уменьшением эксцентриситета кометной орбиты точки M_1 и M_2 практически сливаются с тригональными центрами либрации L_4 и L_5 в планетоидной задаче трех тел. Если для комет A_3 и P_3 находящихся на слабоэллиптической орбите ($e < 0,15$), реализуется ситуация, показанная на рис. 5 (лагранжевый случай задачи трех тел), то Солнце, Юпитер и комета будут описывать в своем относительном движении Кеплеровы орбиты, образуя все время равносторонний треугольник. Но комета будет находиться за пределами области сближения (хорда $QM (qM) \gg 2 a.e.$ [5]), поэтому данный случай в этой работе нами не рассматривается. Но сам факт, что в точках L_4 и L_5 модуль йовицентрической скорости комет A_3 и P_3 (с малыми эксцентриситетами) практически равен нулю, очень интересен. Учитывая отмеченное ранее небольшое изменение положения точки R ($v_R \approx 71^\circ$) у комет A_3 и P_3 , и возможность длительных ВСЗ для низкоэксцентрических орбит, заметим, что именно эти модели – наиболее вероятный поставщики комет – кандидатов в группу Троянцев.

Заключение

Итак, сближения комет A_3 , P_3 и Юпитера, удовлетворяющие начальным условиям, рассмотренным выше, – это низкоскоростные касательные сближения. Особенности сближений:

1. Это длительные сближения. Для кометы A_3 оно охватывает весь период ее обращения вокруг Солнца ($e \leq 0,9$); распространяется на дугу $\cup F_1 Q F_2$ ($e \leq 0,37$). Для остальных объектов с линии AA_3 комета не покидает области сближения ($r_j \leq 2 a.e.$ [5]) на полупериоде, включающем афелий. Для кометы P_3 оно охватывает весь период ее обращения вокруг Солнца ($a \leq 0,7$); распространяется на дугу $\cup I_1 q I_2$ ($e \leq 0,20$), на дугу $\cup b_1 q b_2$ ($e \leq 0,24$). Для остальных объектов с линии AP_3 комета не покидает области сближения на дуге $\cup F_1 q F_2$.

2. Функция йовицентрического расстояния комет A_3 и P_3 имеет единственный минимум ρ , точка минимума C на орбитах комет совпадает с апсидальной точкой: $C \equiv Q(q)$.

3. На орбитах комет A_3 и P_3 имеются две точки низкоскоростного касания орбит: $\lim_{a \rightarrow 0} v_M = 60^\circ$. Для слабоэллиптических орбит ($e < 0,15$) точки M_1 и M_2 приближаются к тригональным центрам либрации L_4 и L_5 в планетоидной задаче трех тел.

4. На орбитах комет A_3 и P_3 помимо апсидальной точки, имеются еще две точки R_1 и R_2 , при прохождении которых комета и Юпитер оказываются на одном радиусе-векторе. Положения этих точек практически не изменяются для всех объектов с линией A_3AP_3 : $v_R \approx 71^\circ$.

5. У комет A_3 и P_3 точки M_1 , M_2 – центры низкоскоростных касательных участков, на которых вероятен временный спутниковый захват в смысле Эверхарта. При $e < 0,33$ ВСЗ может сопровождать апсидальный минимум.

Работа поддержана грантом РФФИ № 04-02-96042.

Литература

1. Emel'yanenko N. Yu. Kinematics of the comets low-velocity encounters with Jupiter// Proceeding of the International conference SAMMAS. – 2000. – P. 35–40.
2. Емельяненко Н.Ю. Короткопериодические кометы с высоким значением постоянной Тиссерана. 3. Кинематика низкоскоростных сближений// Астрон. вест. – 2003. – Т. 37. – № 1. – С. 66–73.
3. Емельяненко Н.Ю. Моделирование орбит комет// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2003. – Вып. 4. – № 8(24). – С. 99–106.
4. Емельяненко Н.Ю. Короткопериодические кометы с высоким значением постоянной Тиссерана. I. Орбитальная Эволюция// Астрон. вест. – 1997. – Т. 31. – № 3. – С. 257–267.
5. Емельяненко Н.Ю. Динамика орбит комет при тесном сближении с Юпитером. Анализ длительности сближений// Астрон. вест. – 2003. – Т. 37. – № 2. – С. 153–160.

Поступила в редакцию 11 июля 2005 г.