УДК 519.6:621.317

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

С.В. Ермаков, Е.В. Харитонова

В работе рассматривается процедура построения функции Грина для многоточечной краевой задачи.

В работе [1] была рассмотрена модель измерений, построенная на базе анализа обратной многоточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, приводящая к исследованию интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Одним из основных элементов предложенного метода было построение функции Грина для краевой задачи

$$\begin{cases} L(x) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = u(t); \\ U_j(x) = l_j, \ j = 1,\ldots n, \end{cases} \qquad (*)$$

где $U_j(x)$ – линейные в $C^n_{[a,b]}$ функционалы, для многоточечной задачи имеющие вид $U_j(x) = x(t_j)$, $a \le t_1 < t_1 < \ldots < t_n \le b$

Предполагая фундаментальную систему решений уравнения $L(x) = 0$ известной и обладающей не очень обременительными условиями регулярности (подробнее в [1]), можно легко построить функцию Грина задачи (1) и, тем самым, сформировать ядро интегрального уравнения, восстанавливающего правую часть $u(t)$ по экспериментально наблюденному сигналу $x(t)$.

Однако, в некоторых, практически важных ситуациях, такая процедура построения функции Грина не реализуема из-за сложностей, возникающих при построении фундаментальной системы решений.

В настоящей работе использована известная (например [2]) в теории дифференциальных уравнений конструкция, позволяющая получить функцию Грина для задачи (∗) и тогда, когда прямое построение фундаментальной системы решений уравнения $L(x) = 0$ не представляется возможным.

1. Интегральное уравнение для функции Грина задачи (1)

Пусть $L_1(x)$ – линейное дифференциальное выражение

$$L_1(x) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$$

с непрерывными на промежутке [*a*, *b*] коэффициентами, $L_2(x) = x^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot x^{(n-1)}$ – его главная часть. Пусть, далее, коэффициенты выражения $L_1(x)$ таковы, что краевые задачи

$$\begin{cases} L_1(x) = u(t); \\ U_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, n; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} L_2(x) = u(t); \\ U_j(x) = 0, j = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (2)$$

однозначно разрешимы и существуют однозначно определяемые функции Грина $G_i(t,\tau), i = 1, 2$, соответственно задач (1) и (2).

Рассмотрим вспомогательную функцию $\tilde{A}(t,\tau) = G_1(t,\tau) - G_2(t,\tau)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Функция* $\tilde{A}(t,\tau)$ *определена на квадрате* $K = \{(t,\tau) : a \le t \le b, a \le \tau \le b\}$, *непрерывна там по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по переменной* t *вплоть до* n*-го порядка включительно.*

Доказательство. Каждая из функций Грина $G_i(t,\tau), i=1,2$, по определению (например [3]) непрерывна и непрерывно дифференцируема вплоть до $(n-2)$-го порядка. Кроме того, их производные $(n-1)$-го порядка непрерывны при $t\in[a,\tau)\bigcup(\tau,b]$ и имеют одну и ту же особенность в точке $t=\tau$:

$$\frac{\partial^{n-1}G_i(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t=\tau^+}-\frac{\partial^{n-1}G_i(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t=\tau^-}=1,\quad i=1,2,$$

откуда следует непрерывность $(n-1)$-ой производной $\dfrac{\partial^{n-1}\tilde{A}(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}$ в точке $t=\tau$.

Далее, заметим, что $\forall t\in[a,\tau)\bigcup(\tau,b]$

$$L_1(\tilde{A})=L_1(G_1)-L_1(G_2)=L_1(G_1)-L_2(G_2)-\sum_{k=0}^{n-2}a_k(t)\cdot\frac{\partial^k G_2(t,\tau)}{\partial t^k}.$$

Поскольку в указанной области $L_1(G_1)=L_2(G_2)=0$, то

$$L_1(\tilde{A})=-\sum_{k=0}^{n-2}a_k(t)\cdot\frac{\partial^k G_2(t,\tau)}{\partial t^k}. \tag{3}$$

В то же время

$$L_1(\tilde{A})=\frac{\partial^n\tilde{A}(t,\tau)}{\partial t^n}+\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}(t)\frac{\partial^{k-1}\tilde{A}(t,\tau)}{\partial t^{k-1}}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^n\tilde{A}(t,\tau)}{\partial t^n}=-\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}(t)\frac{\partial^{k-1}\tilde{A}(t,\tau)}{\partial t^{k-1}}-\sum_{k=0}^{n-2}a_k(t)\cdot\frac{\partial^k G_2(t,\tau)}{\partial t^k}.$$

Выражение справа непрерывно при всех $t\in[a,b]$, в том числе и при $t=\tau$. Отсюда $\dfrac{\partial^n\tilde{A}(t,\tau)}{\partial t^n}$ – непрерывная на $[a,b]$ функция, чем доказательство и завершается.

Из вышеизложенного следует, что функция $\tilde{A}(t,\tau)$ является для каждого τ решением краевой задачи

$$L_1(\tilde{A})=-\sum_{k=0}^{n-2}a_k(t)\cdot\frac{\partial^k G_2(t,\tau)}{\partial t^k},\quad U_j(\tilde{A})=0,\ j=1,2,...,n$$

по переменной t, а значит, может быть представлена в виде

$$\tilde{A}(t,\tau)=\int_a^b G_1(t,s)V(s,\tau)ds, \tag{4}$$

где $V(s,\tau)=-\sum\limits_{k=0}^{n-2}a_k(t)\cdot\dfrac{\partial^k G_2(t,\tau)}{\partial t^k}\Big|_{t=s}$.

Таким образом, заключаем, что $\forall\tau\in[a,b]$ функция Грина $G_1(t,\tau)$ удовлетворяет интегральному соотношению

$$G_1(t,\tau)-G_2(t,\tau)=\int_a^b G_1(t,s)V(s,\tau)ds=-\sum_{k=0}^{n-2}\int_a^b G_1(t,s)a_k(s)\cdot\frac{\partial^k G_2(s,\tau)}{\partial s^k}ds. \tag{5}$$

2. Функция Грина вспомогательной задачи

Соотношение (5) представляет собой интегральное уравнение, которое может быть использовано для построения функции Грина $G_1(t,\tau)$, если только известна функция $G_2(t,\tau)$ – функция Грина вспомогательной задачи (2):

$$x^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t)=0,\quad U_j(x)=x(t_j)=0,\ j=1,2,...,n.$$

Поскольку фундаментальная система решений соответствующего вспомогательной задаче однородного уравнения легко может быть найдена:

$$\varphi_1(t)=\underbrace{\int\ldots\int}_{n-1} e^{-\int a_{n-1}(t)dt}\underbrace{dt\ldots dt}_{n-1},\ \varphi_k(t)=t^{n-k},\ k=2,3,...,n,$$

построение $G_2(t,\tau)$ осуществляется стандартными методами.

Например, для $n=2$, несложные выкладки дают

$$G_2(t,\tau)=\begin{cases} -\dfrac{e^{\int a_1(\tau)d\tau}\cdot\int\limits_{\tau}^{b} e^{-\int a_1(s)ds}ds\cdot\int\limits_{a}^{t} e^{-\int a_1(s)ds}ds}{\int\limits_{a}^{b} e^{-\int a_1(s)ds}ds}, & a\le t<\tau \\ e^{\int a(\tau)d\tau}\left[\int\limits_{\tau}^{t} e^{-\int a_1(s)ds}ds-\dfrac{\int\limits_{\tau}^{b} e^{-\int a_1(s)ds}ds\cdot\int\limits_{a}^{t} e^{-\int a_1(s)ds}ds}{\int\limits_{a}^{b} e^{-\int a(t)dt}dt}\right], & \tau<t\le b \end{cases}$$

и уравнение (5) примет вид

$$G_1(t,\tau)-G_2(t,\tau)=-\int\limits_a^b G_1(t,s)a_0(s)\cdot G_2(s,\tau)ds\,.$$

При каждом фиксированном значении $t\in[a,b]$ это уравнение Фредгольма II рода относительно функции $\Phi(\tau)=G_1(\bullet,\tau)$

$$\Phi(\tau)-G_2(\bullet,\tau)=-\int\limits_a^b G_2(s,\tau)a_0(s)\Phi(s)ds\,.$$

Последнее может быть эффективно разрешено известными численными методами (см. например [4]).

3. Результаты численного эксперимента

Для реализация предложенных выше соображений был создан численный алгоритм, продемонстрировавший на модельных примерах эффективность развитого подхода.

Пример 1. Рассматривалась краевая задача для уравнения с постоянными коэффициентами

$$x''+5x'+6x=\sin t\,,\ x(0)=x(1)=0\,,\ t\in[0,1]\,. \qquad (6)$$

Функция Грина строилась прямым методом и методом интегральных уравнений, развитым в настоящей работе. Сравнивались результаты использования построенных функций Грина для решения как прямой, так и обратной задачи. На рис. 1 представлены эскизы графиков решений прямой задачи (6).

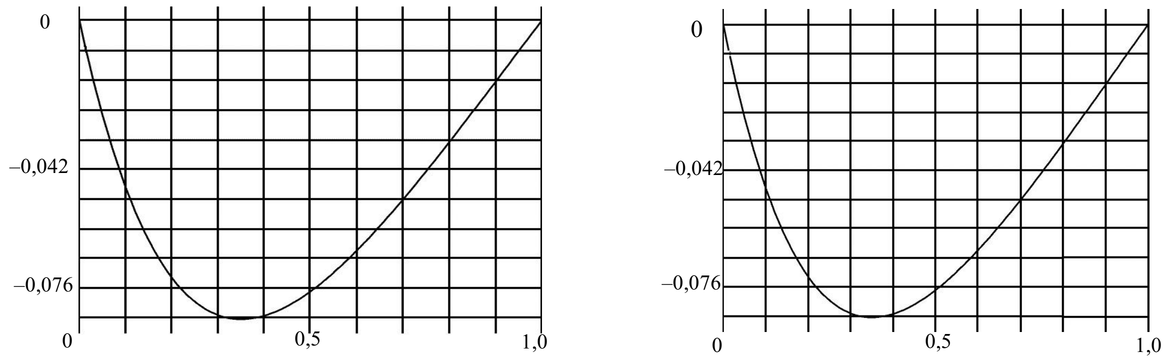

Рис. 1. Решение прямой задачи с помощью функции Грина построенной прямым методом (слева) и методом интегральных уравнений (справа)

Пример 2. Рассматривалась краевая задача

$$x''+5x'+6x=6t^2+4t-3\,,\ x(0)=x(1)=0\,,\ t\in[0,1]\,. \qquad (7)$$

По наблюденному точному решению $x(t)=t^2-t$ восстанавливалась правая часть уравнения. На рис. 2 отображены результаты расчетов – графики решений обратной задачи.

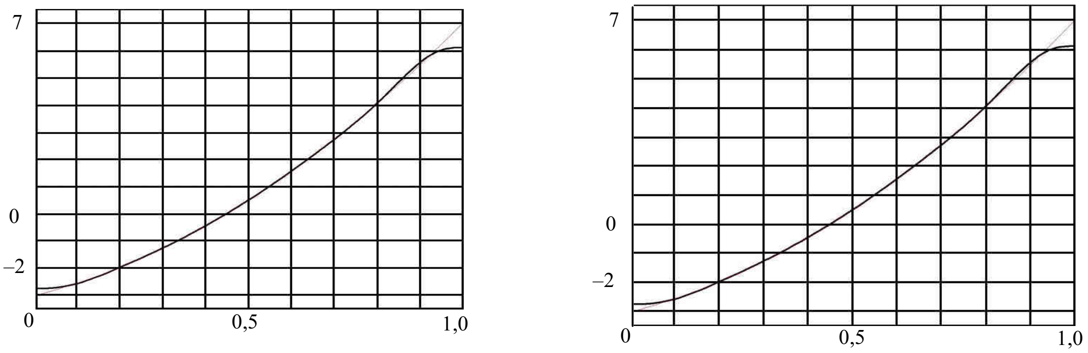

Рис. 2. Решение обратной задачи с помощью функции Грина построенной прямым методом (слева) и методом интегральных уравнений (справа)

Пример 3. Рассматривалась задача

$$x''+\sin(t)x'-e^{\cos t}x=u(t),\ t\in[-1,1],\, x(-1)=x(1)=0.$$

Для $u(t)=e^{\cos t}-t^2e^{\cos t}+2t\sin t+2$ была построена функция Грина, с помощью которой находились решения прямой и обратной задач.

График восстановленного решения обратной задачи по результатам наблюдения $x(t)=t^2-1$ приведен на рис. 3.

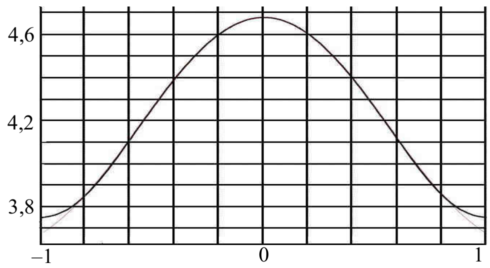

Рис. 3. Решение обратной задачи

Работа поддержана грантом РФФИ-УРАЛ 04-01-96073.

Литература

1. Харитонова Е.В. Численный анализ обратной задачи теории измерений// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 5. – № 2(42). – С. 42–48.
2. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958.
3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.
4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1978.

Поступила в редакцию 15 сентября 2005 г.