УДК 517.53

ЗАМЕЧАНИЕ О МОНОТЕТИЧЕСКИХ ПОДГРУППАХ ТОРА

Н.Н. Неряхин

Пусть $\{\xi^n\}_{n\in Z}$ – циклическая подгруппа группы $\mathbf{T}^\nu$, порожденная вектором $\xi=(e^{2\pi i\Theta_1},\ldots,e^{2\pi i\Theta_\nu})$. Ее замыкание $\mathbf{F}=\overline{\{\xi^n\}}_{n\in Z}$ по определению является монотетической подгруппой тора $\mathbf{T}^\nu$. Группа $\mathbf{F}$ с точностью до изоморфизма определяется параметрами r и σ. Параметр r является рангом над $\mathbf{Q}$ системы Θ_0 = 1, Θ_1, ..., Θ_ν. В работе получена формула, позволяющая явно находить параметр σ.

Эта заметка посвящена уточнению одной теоремы из теории аппроксимаций Паде [1]. В связи с изучением равномерной сходимости последней промежуточной строки таблицы Паде в [1] была получена теорема о структуре монотетических подгрупп тора.

Введем необходимые определения. Пусть G – топологическая группа, H – подгруппа G. H называется монотетической, если она является замыканием некоторой циклической подгруппы G [2]. Пусть G = $\mathbf{T}^\nu$. Введем вектор $\xi=(e^{2\pi i\Theta_1},\ldots,e^{2\pi i\Theta_\nu})$, принадлежащий тору $\mathbf{T}^\nu$. Он порождает циклическую подгруппу $\{\xi^n\}_{n\in Z}$ группы $\mathbf{T}^\nu$. Её замыкание $\mathbf{F}=\overline{\{\xi^n\}}_{n\in Z}$ является монотетической подгруппой тора $\mathbf{T}^\nu$. В теореме 2.1 из [1] показано, что $\mathbf{F}$ изоморфна группе $\mathbf{Z}_\sigma\times\mathbf{T}^r$. Таким образом, $\mathbf{F}$ с точностью до изоморфизма определяется параметрами r и σ. В [1] дана процедура, позволяющая явно вычислить группу $\mathbf{F}$. Показано, что число $r+1$ является рангом над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$ системы аргументов Θ_0 = 1, Θ_1, ..., Θ_ν, а σ вычисляется следующим образом.

Пусть $\Theta_0=1$, Θ_1, ..., Θ_r – максимальная линейно независимая над $\mathbf{Q}$ подсистема системы Θ_0, Θ_1, ..., Θ_ν, и $\Theta_j=\sum_{k=0}^{r}q_{kj}\Theta_k$, $q_{kj}\in\mathbf{Q}$, $j=r+1,\ldots,\nu$. Пусть α_{kk} – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных дробей q_{kj} и $\alpha_{kj}=\alpha_{kk}q_{kj}$ для $k=0,\ldots,r, j=r+1,\ldots,\nu$. Составим целочисленную матрицу

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{00} & \cdots & 0 & \alpha_{0,r+1} & \cdots & \alpha_{0,\nu}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \cdots & \alpha_{r,\nu}\end{pmatrix}$$

и приведем ее к форме Смита над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$

$$A=S_1\Delta S_2^{-1}.$$

Здесь S_1, S_2 – обратимые над $\mathbf{Z}$ целочисленные матрицы. Обозначим через S матрицу, полученную из S_2 вычеркиванием первой строки и первых $r+1$ столбцов. Приведем теперь S к форме Смита:

$$S=T_1\Delta_0T_2^{-1}.$$

Тогда инвариантные факторы матрицы S обязательно имеют вид $1,\ldots,1,\sigma$, где σ – наибольший общий делитель миноров порядка $\nu-r$ матрицы S.

Цель заметки – получить явное выражение для σ в терминах матрицы A.

Теорема. *Параметр σ вычисляется в терминах матрицы A по формуле*

$$\sigma=\frac{\alpha_{00}\overline{\delta_r}}{\delta_{r+1}},$$

где δ_{r+1} – наибольший общий делитель миноров порядка $r+1$ матрицы A, $\overline{\delta_r}$ – наибольший общий делитель миноров порядка r матрицы $\overline{A}$, получающейся из A вычеркиванием первой строки и первого столбца.

Доказательство. Согласно теореме 2.1 σ находится как наибольший общий делитель миноров порядка $\nu-r$ матрицы S. В силу определения матрицы S это означает, что σ есть наибольший общий делитель миноров $S_2\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_{\nu-r} \\ r+2 & r+3 & \dots & \nu+1 \end{pmatrix}, 2\le n_1<\dots<n_{\nu-r}\le\nu+1,$ матрицы S_2. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы выразить эти миноры через миноры матрицы A.

Рассмотрим миноры матрицы A вида $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 \\ 1 & m_1 & \dots & m_r \end{pmatrix}$, где $2\le m_1<\dots<m_r\le\nu+1$. Так как $A=(S_1\Delta)S_2^{-1}$, то по формуле Бине–Коши [3]

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 \\ 1 & m_1 & \dots & m_r \end{pmatrix} = \sum_{1\le k_1<\dots<k_{r+1}\le\nu+1} (S_1\Delta)\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_{r+1} \end{pmatrix} S_2^{-1}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{r+1} \\ 1 & m_1 & \dots & m_r \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Матрица Δ из формы Смита имеет вид

$$\Delta=\begin{pmatrix} \alpha_0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_r & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_0=\delta_1=1, \alpha_1=\frac{\delta_2}{\delta_1}=\delta_2,\dots,\alpha_r=\frac{\delta_{r+1}}{\delta_r}$, а δ_k – наибольший общий делитель миноров порядка k матрицы A. Тогда $S_1\Delta=([S_1]^1,\ \delta_2[S_1]^2,\ \frac{\delta_3}{\delta_2}[S_1]^3,\dots,\ \frac{\delta_{r+1}}{\delta_r}[S_1]^{r+1},0,\dots,0)$. Здесь $[S_1]^j$ обозначает j-й столбец матрицы S_1. Следовательно, матрица $S_1\Delta$ имеет лишь один ненулевой минор порядка $r+1$, а именно $(S_1\Delta)\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 \\ 1 & 2 & \dots & r+1 \end{pmatrix}=\delta_{r+1}$. Таким образом, равенство (1) преобразуется к виду

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 \\ 1 & m_1 & \dots & m_r \end{pmatrix}=\delta_{r+1}\,S_2^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 \\ 1 & m_1 & \dots & m_r \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

По формуле о минорах обратной матрицы [3]

$$S_2^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 \\ 1 & m_1 & \dots & m_r \end{pmatrix}=(-1)^N S_2\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_{\nu-r} \\ r+2 & r+3 & \dots & \nu+1 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $N\in\mathbf{Z}$ и $n_1,\dots,n_{\nu-r}$ вместе с $1,m_1,\dots,m_r$ составляют полную систему индексов $1,2,\dots,\nu+1$. Подставляя теперь (3) в (2), получаем

$$S_2\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_{\nu-r} \\ r+2 & r+3 & \dots & \nu+1 \end{pmatrix}=\frac{(-1)^N A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 \\ 1 & m_1 & \dots & m_r \end{pmatrix}}{\delta_{r+1}}. \qquad (4)$$

Пусть $\overline{A}$ – матрица, полученная из A вычеркиванием первой строки и первого столбца. Тогда

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r+1 \\ 1 & m_1 & \dots & m_r \end{pmatrix}=\alpha_{00}\,\overline{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ m_1-1 & m_2-1 & \dots & m_r-1 \end{pmatrix}=\alpha_{00}\,\overline{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ l_1 & l_2 & \dots & l_r \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем

$$S_2\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_{\nu-r} \\ r+2 & r+3 & \dots & \nu+1 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^N \alpha_{00}\,\overline{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ l_1 & l_2 & \dots & l_r \end{pmatrix}}{\delta_{r+1}}.$$

Отсюда $\sigma = \text{НОД}\left\{ \dfrac{\alpha_{00}\,\overline{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ l_1 & l_2 & \dots & l_r \end{pmatrix}}{\delta_{r+1}} \,|\, 1 \le l_1 < \dots < l_r \le \nu \right\} = \dfrac{\alpha_{00}\overline{\delta_r}}{\delta_{r+1}}$, где $\overline{\delta_r}$ – наибольший общий делитель миноров порядка r матрицы $\overline{A}$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность В.М. Адукову за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

1. Adukov V.M. The uniform convergence of subsequences of the last intermediate row of the Padé table// J. Approx. Theory. – 2003. – V. 122. – P. 160–207.

2. Моррис С.А. Двойственность Понтрягина и строение локально-компактных абелевых групп. – М.: Мир, 1967. – 117 с.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 345 с.

Поступила в редакцию 15 сентября 2005 г.