УДК 517.9

ЗАДАЧИ СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

М.В. Плеханова, В.Е. Федоров

В работе исследованы задачи минимизации квадратичных функционалов на решениях дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве с вырожденным оператором при производной, удовлетворяющих начальному условию Коши или обобщенному условию Шоуолтера – Сидорова. Речь идет о задачах стартового управления, то есть задачах, в которых функцией управления является начальное значение функции состояния. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примере задач стартового управления для системы уравнений фазового поля.

Введение

Пусть X и Y – гильбертовы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(X;Y)$ (линейный и непрерывный), $M \in Cl(X;Y)$ (линейный и замкнутый с областью определения dom$M$, плотной в X). В предположении $\ker L \neq \{0\}$ задача Коши

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t), \qquad x(0) = u \tag{1}$$

представляет собой абстрактную форму многих начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, встречающихся в естествознании. Уравнение (1) с вырожденным оператором при производной часто называют уравнением соболевского типа [1–3]. Настоящая работа посвящена исследованию задачи оптимального управления

$$u \in U_\partial, \tag{2}$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\|x - w\|^2_{H^1(0,T;X)} + \frac{N}{2}\|u - u_0\|^2_X \to \inf \tag{3}$$

для системы (1). Здесь заданы U_∂ – выпуклое замкнутое подмножество пространства X, константа $N>0$, функции $w \in H^1(0,T;X)$, $u_0 \in X$. Поскольку функция управления определяет начальное значение функции состояния, то задача называется задачей стартового управления. Такие задачи для уравнений вида (1) с оператором $L=I$ рассматриваются, например, в [4].

Для уравнений соболевского типа ранее, по-видимому, рассматривались только задачи с распределенным управлением, когда функция управления u определяет правую часть уравнения (см. [5–10]). В перечисленных работах рассмотрены случаи, когда уравнение $L\dot{x}(t) = Mx(t)$ обладает аналитической в плоскости разрешающей группой операторов [6], аналитической в секторе полугруппой [5, 8], сильно непрерывной разрешающей полугруппой [7, 9, 10].

Используемое в данной работе условие сильной (L,p)-радиальности оператора M гарантирует существование сильно непрерывной разрешающей полугруппы операторов однородного уравнения (1), вырождающейся на M-присоединенных векторах оператора L высоты не больше p [3, 11]. При этом все пространство распадается в прямую сумму ядра и образа полугруппы. Проектор на образ полугруппы вдоль ее ядра обозначим через P. При исследовании некоторых уравнений соболевского типа, описывающих реальные процессы, более естественным оказывается задание в начальный момент времени не условия Коши $x(0) = x_0$, а так называемого обобщенного условия Шоуолтера – Сидорова $Px(0) = Px_0$ (обоснование термина см. в [1, 12]). Именно такое условие используется при исследовании системы уравнений фазового поля, моделирующей фазовые переходы первого рода [13]. В работе помимо задачи (1)–(3) рассмотрена аналогичная задача со стартовым управлением $Px(0) = u$. Ранее задача оптимального управления для уравнения соболевского типа с распределенным управлением в правой части уравнения и с обобщенным условием Шоуолтера – Сидорова в случае существования аналитической полугруппы однородного уравнения была рассмотрена в работе [14].

Также рассмотрены задачи с жестким управлением [4], когда функционал стоимости в явном виде не зависит от управления. Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании линеаризованной в нуле системы уравнений фазового поля.

При доказательстве результатов в данной работе использована удобная для систем, описываемых некорректными задачами, схема исследования задач оптимального управления, предложенная в монографии [4]. Она позволяет, не выражая функции состояния *x(t)* через функции управления $u(t)$, установить существование и единственность решения задачи оптимального управления при выполнении так называемого условия нетривиальности и условий ограниченности снизу, непрерывности, коэрцитивности и строгой выпуклости функционала стоимости. В задачах с жестким управлением функционал не является строго выпуклым, и единственность решения доказывается напрямую. При этом для доказательства коэрцитивности функционала используется дополнительное условие ограниченности множества допустимых управлений.

Задача Коши для случая относительно *p*-радиального оператора

Пусть X, Y – банаховы пространства, операторы $L\in L(X;Y)$, $M\in Cl(X;Y)$. Введем необходимые в дальнейшем обозначения:

$$\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbf{C}:(\mu L-M)^{-1}\in L(Y;X)\};$$

$$R^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}(\mu_k L-M)^{-1}L; \qquad L^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^{p}L(\mu_k L-M)^{-1};$$

$$X^0=\ker R^L_{(\mu,p)}(M); \qquad Y^0=\ker L^L_{(\mu,p)}(M);$$

$$X^1=\overline{\operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M)}; \qquad Y^1=\overline{\operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M)};$$

L_k – сужения оператора L на подпространства X^k, M_k – сужения оператора M на $\operatorname{dom} M_k=\operatorname{dom} M\cap X^k$, k=0,1.

Оператор M называется *(L,p)- радиальным*, если

1) $\exists a\in\mathbf{R}\ \forall\mu>a\ \ \mu\in\rho^L(M)$;

2) $\exists K>0\ \ \forall\mu_k>a,\ k=\overline{0,p},\ \ \forall n\in\mathrm{N}$

$$\max\left\{\left\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\right\|_{L(X)},\left\|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\right\|_{L(Y)}\right\}\le\frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k-a)^n}.$$

Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, если он *(L,p)*-радиален, существует плотный в Y линеал $\overset{0}{Y}$, такой, что

$$\left\|M(\lambda L-M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)y\right\|_Y\le\frac{c(y)}{(\lambda-a)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k-a)} \qquad \forall y\in\overset{0}{Y};$$

$$\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}\right\|_{L(Y;X)}\le\frac{K}{(\lambda-a)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k-a)} \text{ для всех } \lambda,\ \mu_0,\ \dots,\ \mu_p>a.$$

Теорема 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $X=X^0\oplus X^1$, $Y=Y^0\oplus Y^1$;

(ii) $L_k\in L(X^k;Y^k)$, $M_k\in Cl(X^k;Y^k)$, k=0,1;

(iii) существуют операторы $M_0^{-1}\in L(Y^0;X^0)$, $L_1^{-1}\in L(Y^1;X^1)$;

(iv) оператор $H=M_0^{-1}L_0\in L(X^0)$ *нильпотентен степени не больше p;*

(v) существует полугруппа $\{\widetilde{X}^t\in L(X):t\ge0\}$ *однородного уравнения* $L\dot{x}(t)=Mx(t)$;

(vi) инфинитезимальным генератором C_0*-непрерывной полугруппы* $\{\widetilde{X}_1^t\in L(X):t\ge0\}$ *является оператор* $L_1^{-1}M_1\in Cl(X^1)$.

Здесь $\widetilde{X}_1^t$ ($\widetilde{Y}_1^t$) – сужение оператора $\widetilde{X}^t$ ($\widetilde{Y}^t$) на X^1 (Y^1). Проектор вдоль X^0 на X^1 обозначим через P, а проектор вдоль Y^0 на Y^1 – через Q.

Рассмотрим задачу Коши

$$x(0)=x_0\in\operatorname{dom}M \tag{4}$$

и обобщенную задачу Шоуолтера–Сидорова

$$Px(0)=Px_0,\ x_0\in\operatorname{dom}M \tag{5}$$

для уравнения

$$L\dot{x}(t)=Mx(t)+y(t). \tag{6}$$

Функцию $x(t)\in H^1(0,T;X)$ назовем *сильным решением* задачи (4), (6) ((5), (6)), если она почти всюду на $(0,T)$ удовлетворяет уравнению (6) и условию (4) ((5)), в том смысле, что $\lim\limits_{t\to 0+}\|x(t)-x_0\|_X=0$ ($\lim\limits_{t\to 0+}\|Px(t)-Px_0\|_X=0$).

Теорема 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда при любых* $y\in H^{p+1}(0,T;Y)$ *и* $x_0\in\Lambda_y=\{x\in\operatorname{dom}M:(I-P)x=-\sum\limits_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(0)\}$ *существует единственное сильное решение задачи* (4), (6), *имеющее вид*

$$x(t)=\int_0^t\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Qy(s)ds-\sum_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(t)+\widetilde{X}^tx_0. \tag{7}$$

Доказательство. Используя теорему 1, редуцируем задачу (4), (6) к системе двух задач Коши, заданных на подпространствах X^0 и X^1. Существование и единственность решения $x(t)=-\sum\limits_{k=0}^{p}H^kM_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(t)$ задачи Коши $x(0)=(I-P)x_0$ при $x_0\in\Lambda_y$ для уравнения $H\dot{x}(t)=x(t)+M_0^{-1}(I-Q)y(t)$ на подпространстве X^0 доказаны в работе [10].

Докажем разрешимость задачи $x(0)=Px_0$ для уравнения $\dot{x}(t)=Sx(t)+L_1^{-1}Qy(t)$ с оператором $S=L_1^{-1}M_1$ на подпространстве X^1 в условиях данной теоремы. Имеем $y\in H^1(0,T;Y)$, поэтому $\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Qy(s)\in L_1(0,T;X^1)$. Действительно,

$$\int_0^T\left\|\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Qy(s)\right\|_X ds\le Ke^{|a|T}\left\|L_1^{-1}Q\right\|_{L(Y;X)}\int_0^T\|y(s)\|_Y ds<\infty.$$

Далее,

$$\frac{1}{\Delta}\left(\int_0^t\widetilde{X}^{t+\Delta-s}L_1^{-1}Qy(s)ds-\int_0^t\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Qy(s)ds\right)=\int_0^{t-\Delta}\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Q\frac{y(s+\Delta)-y(s)}{\Delta}ds+$$
$$+\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta}\widetilde{X}^{t+\Delta-s}L_1^{-1}Qy(s)ds-\frac{1}{\Delta}\int_{t-\Delta}^{t}\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Qy(s)ds.$$

Поскольку $y\in H^1(0,T;Y)$, то почти всюду на $(0,T)$ функция y дифференцируема в классическом смысле. Поэтому при почти всех $s\in(0,T)$ и при любом $\varepsilon>0$

$$\left\|\frac{y(s+\Delta)-y(s)}{\Delta}\right\|_Y<\|\dot{y}(s)\|_Y+\varepsilon$$

для достаточно малых $|\Delta|$. Отсюда в силу теоремы Лебега следует существование предела

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_0^{t-\Delta}\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Q\frac{y(s+\Delta)-y(s)}{\Delta}ds=\lim_{\Delta\to 0}\int_0^t\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Q\frac{y(s+\Delta)-y(s)}{\Delta}-\lim_{\Delta\to 0}\int_{t-\Delta}^{t}\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Q\frac{y(s+\Delta)-y(s)}{\Delta}=$$
$$=\int_0^t\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Q\dot{y}(s)ds-\lim_{\Delta\to 0}\Delta\widetilde{X}^{\theta}L_1^{-1}Q\frac{y(t-\theta+\Delta)-y(t-\theta)}{\Delta}=\int_0^t\widetilde{X}^{t-s}L_1^{-1}Q\dot{y}(s)ds.$$

Поскольку $\dot{y} \in L_1(0,T;Y)$, то $y \in C([0,T];Y)$. Здесь $\theta \in (0,\Delta)$ по теореме о среднем. Согласно теореме 1, оператор S порождает C_0-непрерывную полугруппу $\{\widetilde{X}_1^t : t \geq 0\}$ на пространстве X^1, поэтому приведенные выкладки показывают, что

$$S\int_0^t \widetilde{X}^{t-s} L_1^{-1} Qy(s)ds = \int_0^t \widetilde{X}^{t-s} L_1^{-1} Q\dot{y}(s)ds + \widetilde{X}^t L_1^{-1} Qy(0) - L_1^{-1} Qy(t).$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \widetilde{X}^{t-s} L_1^{-1} Qy(s)ds\right) = S\int_0^t \widetilde{X}^{t-s} L_1^{-1} Q\dot{y}(s)ds + \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} \widetilde{X}^{t+\Delta-s} L_1^{-1} Qy(s)ds = S\int_0^t \widetilde{X}^{t-s} L_1^{-1} Q\dot{y}(s)ds + L_1^{-1} Qy(t).$$

Отсюда следует, что функция (7) является решением задачи (4), (6).

Единственность решения показана в [10].

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда при любых* $y \in H^{p+1}(0,T;Y)$ *и* $Px_0 \in \mathrm{dom} M_1$ *существует единственное сильное решение задачи* (5), (6), *имеющее вид* (7).

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2, придем к выводу, что решение задачи (5), (6) является суммой решений задачи Коши $x(0) = Px_0$, $\dot{x}(t) = Sx(t) + L_1^{-1}Qy(t)$ и уравнения $H\dot{x}(t) = x(t) + M_0^{-1}(I-Q)y(t)$. Заметим, что для единственности решения последнего уравнения не требуется задания начального условия. Таким образом, для разрешимости задачи (5), (6) выполнение условия $x_0 \in \Lambda_y$ уже не актуально.

Стартовое управление

В дальнейшем считаем, что X и Y – гильбертовы пространства. Рассмотрим задачу

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t), \tag{8}$$

$$x(0) = u, \tag{9}$$

$$u \in U_\partial, \tag{10}$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\|x - w\|^2_{H^1(0,T;X)} + \frac{N}{2}\|u - u_0\|^2_X \to \inf, \tag{11}$$

где $w \in H^1(0,T;X)$, $y \in H^{p+1}(0,T;Y)$, $u_0 \in X$ – заданные функции, множество допустимых управлений U_∂ является выпуклым замкнутым подмножеством X. Сильные решения уравнения (8) естественно искать в пространстве $Z = \{z \in H^1(0,T;X) : L\dot{z} - Mz \in H^{p+1}(0,T;Y)\}$, наделенном нормой

$$\|z\|_Z^2 = \|z\|^2_{H^1(0,T;X)} + \|L\dot{z} - Mz\|^2_{H^{p+1}(0,T;Y)}.$$

Нетрудно показать, что пространство Z гильбертово относительно скалярного произведения

$$\langle x,z\rangle_Z = \langle x,z\rangle_{H^1(0,T;X)} + \langle L\dot{x} - Mx, L\dot{z} - Mz\rangle_{H^{p+1}(0,T;Y)}.$$

Введем в рассмотрение оператор следа $\gamma_0 x = x(0)$.

Лемма 1. *Оператор* $\gamma_0 : Z \to X$ *непрерывен.*

Доказательство. Очевидны неравенства $\|x(0)\|_X \leq \|x\|_{C([0,T];X)} \leq C\|x\|_{H^1(0,T;X)} \leq C\|x\|_Z$. Лемма доказана.

Множеством W допустимых пар задачи (8)–(11) назовем множество пар $(x,u) \in Z \times X$, удовлетворяющих (8)–(10). Решение задачи (8)–(11) состоит в нахождении пары $(\hat{x},\hat{u}) \in W$, минимизирующей функционал стоимости $J(x,u)$: $J(\hat{x},\hat{u}) = \inf\limits_{(x,u)\in W} J(x,u).$

Функционал $J(x,u)$ назовем *коэрцитивным*, если для любого $R > 0$ множество $\{(x,u) \in W : J(x,u) < R\}$ ограничено в пространстве $Z \times X$.

Теорема 4. *Пусть* $U_\partial \cap \Lambda_y \neq \varnothing$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{x},\hat{u}) \in Z \times X$ *задачи* (8)–(11).

Доказательство. Заметим, что задача Коши (8), (9) разрешима при условии принадлежности управления u множеству Λ_y, определенному в теореме 2. Поэтому при условии $U_\partial \cap \Lambda_y \neq \varnothing$ множество допустимых пар W непусто и выполняется условие нетривиальности [4].

Положим **U**=X, **V**=$H^l(0,T;Y)\times X$, $l\in\{0,1,\ldots,p+1\}$, **Y**=$H^1(0,T;X)$, $\mathbf{Y_1}$=Z, вектор $F_0=(-y,0)\in\mathbf{V}$. Непрерывность линейного оператора $\mathbf{L}:\mathbf{Y_1}\times\mathbf{U}\to\mathbf{V}$, $\mathbf{L}(x,u)=(L\dot{x}-Mx,\gamma_0x-u)$ следует из непрерывности γ_0 (лемма 1). Действительно,

$$\|L\dot{x}-Mx\|^2_{H^l(0,T;Y)}+\|\gamma_0x-u\|^2_X\le C_1\|x\|^2_Z+2\|u\|^2_X\le C_2\|(x,u)\|^2_{Z\times X}.$$

Строгая выпуклость и непрерывность функционала J в пространстве $\mathbf{Y}\times\mathbf{U}$ очевидны, докажем его коэрцитивность в $\mathbf{Y_1}\times\mathbf{U}$. Имеем

$$\|x\|^2_Z+\|u\|^2_X=\|x\|^2_{H^1(0,T;X)}+\|L\dot{x}-Mx\|^2_{H^{p+1}(0,T;Y)}+\|u\|^2_X\le$$

$$\le\|x\|^2_{H^1(0,T;X)}+\|y\|^2_{H^{p+1}(0,T;Y)}+\|u\|^2_X\le C_1J(x,u)+C_2\le C_1R+C_2.$$

Таким образом, все условия теоремы 1.2.3 [4] выполнены. Отсюда следует существование решения задачи (8)–(11), а из строгой выпуклости функционала стоимости – единственность решения. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим задачу оптимального управления (8), (10), (11) с заданной функцией $u_0\in X^1$ и с обобщенным условием Шоуолтера – Сидорова

$$Px(0)=u. \tag{12}$$

С учетом теоремы 3 нетрудно получить следующий результат.

Теорема 5. *Пусть* $U_\partial\cap\operatorname{dom}M_1\neq\varnothing$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{x},\hat{u})\in Z\times X^1$ *задачи* (8), (10)–(12).

В отличие от предыдущего доказательства надо положить $\mathbf{U}=X^1$, $\mathbf{L}(x,u)=(L\dot{x}-Mx,P\gamma_0x-u)$.

Задачи с жестким управлением

Теперь рассмотрим задачу (8)–(10) с функционалом стоимости

$$J(x)=\frac{1}{2}\|x-w\|^2_{H^1(0,T;X)}\to\inf. \tag{13}$$

Теорема 6. *Пусть* U_∂ *– ограниченное множество в пространстве X, причем* $U_\partial\cap\Lambda_y\neq\varnothing$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{x},\hat{u})\in Z\times X$ *задачи* (8)–(10), (13).

Доказательство. Доказательство существования решения аналогично доказательству теоремы 4. Отметим только, что при доказательстве коэрцитивности функционала стоимости используется ограниченность множества U_∂. При этом функционал не является строго выпуклым, поэтому о единственности решения задачи (8)–(10), (13) сразу утверждать нельзя.

Докажем единственность решения. Нетрудно показать, что множество допустимых пар W выпукло. Предположим, что существуют два решения $(\hat{x}_1,\hat{u}_1)$, $(\hat{x}_2,\hat{u}_2)$ задачи (8)–(10), (13). В силу выпуклости W пара $\left(\frac{\hat{x}_1+\hat{x}_2}{2},\frac{\hat{u}_1+\hat{u}_2}{2}\right)$ является допустимой. Пусть $\hat{x}_1\neq\hat{x}_2$, тогда в силу строгой выпуклости функционала J относительно одной переменной x

$$J\left(\frac{\hat{x}_1+\hat{x}_2}{2}\right)<\frac{1}{2}(J(\hat{x}_1)+J(\hat{x}_2)).$$

Это неравенство противоречит тому, что $J(\hat{x}_1)=J(\hat{x}_2)=\inf\limits_{(x,u)\in W}J(x)$. Следовательно, $\hat{x}_1=\hat{x}_2$. Поэтому $\hat{u}_1=\hat{x}_1(0)=\hat{x}_2(0)=\hat{u}_2$. Теорема доказана.

Очевидным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* U_∂ *– ограниченное множество в подпространстве* X^1, $U_\partial \cap \operatorname{dom} M_1 \neq \varnothing$. *Тогда существует единственное решение* $(\hat{x},\hat{u}) \in Z \times X^1$ *задачи* (8), (10), (12), (13).

Задачи оптимального управления для системы уравнений фазового поля

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\theta(x,0)+\varphi(x,0)=v_0(x), \qquad x\in\Omega, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}(x,t)+\lambda\theta(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{15}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x,t)+\lambda\varphi(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{16}$$

для системы уравнений

$$\theta_t(x,t)+\varphi_t(x,t)=\Delta\theta(x,t)+f(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{17}$$

$$\Delta\varphi(x,t)+\alpha\varphi(x,t)+\theta(x,t)+g(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{18}$$

которая является линеаризацией в нуле системы уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода [13]. Здесь $\Omega\subset\mathbf{R}^{\mathbf{s}}$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, λ, $\alpha\in\mathbf{R}$. Искомыми функциями являются $\theta(x,t)$, $\varphi(x,t)$.

Редуцируем задачу (14)–(18) к задаче (5), (6). С помощью замены $\theta(x,t)+\varphi(x,t)=v(x,t)$, $\varphi(x,t)=w(x,t)$ получим систему

$$v(x,0)=v_0(x), \qquad x\in\Omega, \tag{19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,t)+\lambda v(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{20}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x,t)+\lambda w(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{21}$$

$$v_t(x,t)=\Delta v(x,t)-\Delta w(x,t)+f(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{22}$$

$$\Delta w(x,t)+(\alpha-1)w(x,t)+v(x,t)+g(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T). \tag{23}$$

Возьмем $X=Y=(L_2(\Omega))^2$,

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad M=\begin{pmatrix}\Delta & -\Delta\\ 1 & \alpha-1+\Delta\end{pmatrix},$$

$\operatorname{dom} M=\left(H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)\right)^2$, где $H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)=\{z\in H^2(\Omega):\left(\frac{\partial}{\partial n}+\lambda\right)z(x)=0,\ x\in\partial\Omega\}$. Тем самым определены операторы $L\in L(X)$, $M\in Cl(X)$. Причем, $\ker L=\{0\}\times L_2(\Omega)$.

Обозначим $Az=\Delta z$, $\operatorname{dom}A=H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)$. В работе [15] доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $(1-\alpha)\notin\sigma(A)$. *Тогда оператор M сильно (L,0)-радиален.*

Из этой леммы и из теоремы 3 сразу следует

Лемма 3. *Пусть* $(1-\alpha)\notin\sigma(A)$, f, $g\in H^1(0,T;L_2(\Omega))$, $v_0\in H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)$. *Тогда существует единственное сильное решение* $(v,w)\in(H^1(0,T;(L_2(\Omega)))^2$ *задачи* (19) – (23).

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$v(x,0)=u(x), \quad x\in\Omega, \tag{24}$$

$$u\in U_\partial, \tag{25}$$

$$J(v,w,u)=\frac{1}{2}\|v-z_{01}\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}+\frac{1}{2}\|w-z_{02}\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}+\frac{N}{2}\|u-u_0\|^2_{L_2(\Omega)}\to\inf, \tag{26}$$

для системы (20)–(23). Здесь U_∂– выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\Omega)$, $z_{01},z_{02}\in H^1(0,T;(L_2(\Omega))$, $u_0\in L_2(\Omega)$ – заданные вектор функции, константа $N>0$.

Пространство Z составляют пары функций $(v,w)\in(H^1(0,T;(L_2(\Omega)))^2$ такие, что $v_t-\Delta v+\Delta w\in H^1(0,T;L_2(\Omega))$, $(1-\alpha-\Delta)w-v\in H^1(0,T;L_2(\Omega))$. Применение теоремы 5 приводит к следующему результату.

Теорема 8. *Пусть* $U_\partial \cap H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)\neq\varnothing$. *Тогда существует единственное решение* $((\hat{v},\hat{w}),\hat{u})\in Z\times L_2(\Omega)$ *задачи* (20)–(26).

Рассмотрение аналогичной задачи с жестким управлением

$$J(v,w)=\frac{1}{2}\|v-z_{01}\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}+\frac{1}{2}\|w-z_{02}\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}\to\inf \qquad (27)$$

приводит к следующему результату.

Теорема 9. *Пусть* U_∂ *– ограниченное множество в пространстве* $L_2(\Omega)$, $U_\partial \cap H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)\neq\varnothing$. *Тогда существует единственное решение* $((\hat{v},\hat{w}),\hat{u})\in Z\times L_2(\Omega)$ *задачи* (20)–(25), (27).

Литература

1. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов// Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.
2. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. – Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. – Utrecht; Boston: VSP, 2003.
4. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999.
5. Свиридюк Г.А., Ефремов А.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами// Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 11. – С. 1912–1919.
6. Свиридюк Г.А., Ефремов А.А. Задача оптимального управления для линейных уравнений типа Соболева// Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 12. – С. 75–83.
7. Плеханова М.В. Задача оптимального управления с относительно p-радиальным оператором// Уравнения соболевского типа: Сб. науч. работ. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т. – 2002. – С. 206–214.
8. Fedorov V.E., Plekhanova M.V. Problem of Optimal Control for a Class of Degenerate Equations// Modelling and Analysis of Logic Controlled Dynamic Systems. IFAC Workshop. – Irkutsk, Russia. – 2003. – P. 215–221.
9. Федоров В.Е., Плеханова М.В. Слабые решения и проблема квадратического регулятора для вырожденного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве// Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9. – № 2. – С. 92–102.
10. Федоров В.Е., Плеханова М.В. Оптимальные управление линейными уравнениями соболевского типа// Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 11. – С. 1548–1556.
11. Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов// Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 173–200.
12. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. Линейные уравнения соболевского типа. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2003.
13. Плотников П.И., Клепачева А.В. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций// Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42. – № 3. – С. 651–669.
14. Плеханова М.В., Федоров В.Е. Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений// Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 40–44.
15. Федоров В.Е., Уразаева А.В. Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений// Тр. Воронежской зимней мат. школы. – Воронеж: ВГУ – 2004. – С. 161–172.

Поступила в редакцию 19 мая 2005 г.