УДК 517.948

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

В.П. Танана, Е.В. Худышкина

Предложен оптимальный по порядку алгоритм для решения обратной задачи тепловой диагностики и получены точные оценки погрешности этого алгоритма.

Введение

Необходимость постановки и решения обратных задач теплообмена возникает при оптимизации тепловых режимов технологических процессов, связанных с нагревом или охлаждением материалов. Непосредственно измерить изменяющиеся во времени плотности тепловых потоков, как правило, не представляется возможным. В то же время можно измерить температуру в отдельных точках внутри тела. Отметим, что большое число обратных задач теплообмена приведены в [1].

Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v(y,s)}{\partial s}=\frac{\partial^2 v(y,s)}{\partial y^2}, \tag{1}$$

где $y\in[0,h(s)]$, $s\geq 0$. Функция $h(s)\in C^2[0,\infty)$ известна, причем $h(0)=1$ и для нее существует $S>2$ такое, что при $s\geq S$ $h(s)=y_1>0$. На отрезке $[0,S]$ функция $h(s)$ строго убывает. Кроме того, заданы условия:

$$v(y,0)=0\,,\quad y\in[0,1]\,, \tag{2}$$

$$v(0,s)=0\,,\quad s\geq 0\,, \tag{3}$$

$$v(y_0,s)=f(s)\,,\quad 0<y_0<1\,, \tag{4}$$

а граничное значение

$$v'_y(h(s),s)=\bar{v}(s) \tag{5}$$

подлежит определению.

Эта задача является некорректно поставленной (неустойчивой), но имеющей при естественных ограничениях на функцию $f(s)$ (см. [2]) не более одного решения. Предположим, что существует $S_1>S$ такое, что

$$\forall s\geq S_1\quad \bar{v}(s)=0\,,\quad \bar{v}(s)\equiv 0\,, \tag{6}$$

$$\bar{v}(0)=\bar{v}'(0)=0\,, \tag{7}$$

$$\bar{v}(s)\in C^1[0,\infty)\,. \tag{8}$$

Будем считать, что искомая функция $\bar{v}_0(s)=[v_0(h(s),s)]'_y$ в задаче (1)–(5) удовлетворяет условиям (6)–(8), а соответствующее ей значение $f_0(s)=v_0(y_0,s)$ нам не известно. Вместо него задано некоторое непрерывно - дифференцируемое приближение $f_\delta(s)$ из пространства $L_2[0,\infty)$ и уровень погрешности δ такие, что

$$\int_0^\infty (f_\delta(s)-f_0(s))^2\,ds\leq\delta^2\,. \tag{9}$$

Требуется по паре (f_δ,δ) определить приближённое решение $\bar{v}_\delta(s)$ задачи (1)–(5) наиболее близкое к $\bar{v}_0(s)$ на классе корректности M_r, определяемом формулой

$$M_r = \{\bar{v}(s) : \bar{v}(s) \in W_2^1[0,\infty), \left\| \bar{v} \right\|_{W_2^1}^2 = \int (\bar{v}(s) + \bar{v}'(s))^2 \, ds \le r^2 \} \tag{10}$$

и получить точную оценку погрешности этого решения на классе M_r.

Сведение задачи с подвижной границей к задаче с постоянной границей

Обозначим $g_0(s)$ функцию $v'_y(0,s)$, определяемую формулой

$$v'_y(0,s) = \frac{1}{y_0}\left(f(s) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^t e^{-\frac{\pi^2}{4}(2n+1)^2(s-\tau)} d\tau \right) \tag{11}$$

при $f(s) = f_0(s)$, а через $g_\delta(s)$ при $f(s) = f_\delta(s)$. Тогда из работы [3] и формулы (9) будет следовать, что

$$\left\| g_0 - g_\delta \right\| \le \delta \text{ при } y_0 \ge 2/e. \tag{12}$$

Для исследования и решения задачи (1) – (5) сделаем в уравнении (1) замену переменной $x = y/h(s)$ и искомой функции $w(x,s) = v(h(s)x, s)$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$h^2(s)\frac{\partial w(x,s)}{\partial s} = \frac{\partial^2 w(x,s)}{\partial x^2}, \; x \in [0,1], \; s \ge 0, \tag{13}$$

условия (2)–(5) перепишутся в виде:

$$w(x,0) = 0, \; x \in [0,1], \tag{14}$$

$$w(0,s) = 0, \; s \ge 0, \tag{15}$$

$$w'_x(0,s) = h(s)g(s), \tag{16}$$

а граничное условие (5) примет вид

$$w'_x(0,s) = h(s)\bar{v}(s). \tag{17}$$

Сделав ещё одну замену переменной в уравнении (13), полагая $t = b(s) = \int_0^s h^{-2}(\tau)d\tau$,

преобразуем функцию $w(x,s)$ следующим образом:

$$w(x,s) = w(x, b^{-1}(t)) = u(x,t).$$

Тогда задача (13)–(17) примет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \; x \in [0,1], \; t \ge 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = 0, \; x \in [0,1], \tag{19}$$

$$u(0,t) = 0, \; t \ge 0, \tag{20}$$

$$u'_x(0,t) = f(b^{-1}(t))g(b^{-1}(t)) = \zeta(t). \tag{21}$$

Искомая функция

$$u'_x(1,t) = f(b^{-1}(t))\bar{v}(b^{-1}(t)) = z(t). \tag{22}$$

Обозначив через $\zeta_0(t)$ функцию, соответствующую $g_0(t)$, а через $\zeta_\delta(t)$ функцию, соответствующую $g_\delta(t)$ и используя соотношение (12), получим что

$$\left\| \zeta_0 - \zeta_\delta \right\| \le l_1 \delta, \tag{23}$$

а функция $z_0(s)$, определяемая формулой (22), будет удовлетворять условиям (6)–(8).

Решение задачи (18)–(22)

Таким образом, из [3] следует выполнение условий, позволяющих применять к решению задачи (18)–(22) косинус и синус преобразования по t и для её решения использовать метод проекционной регуляризации, изложенный в [3].

В качестве рабочего пространства $\bar{H}$ возьмём ортогональную сумму пространств $L_2[0,\infty)$ и $iL_2[0,\infty)$, где $i = \sqrt{-1}$. На пространстве $\bar{H}$ определим преобразование

$$F(u+iv)=F_c(u)+iF_s(v)\,, \tag{24}$$

где $u+iv\in\overline{H}$, а F_c и F_s – косинус и синус преобразования, определённые в [4]. Из аналога теоремы Планшереля, сформулированного в [4], будет следовать изометричность преобразования F, определённого формулой (24).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=i\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,,\ x\in[0,1]\,,\ t\ge 0 \tag{25}$$

и применим к уравнениям (18) и (25) косинус и синус преобразования соответственно. Затем, сложив почленно результаты преобразований и пронормировав сумму, получим, что

$$i\lambda\sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)e^{-i\lambda t}dt=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_0^\infty u(x,t)e^{-i\lambda t}dt\right). \tag{26}$$

Получаем уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\hat{u}(x,\lambda)=i\lambda\hat{u}(x,\lambda)\,, \tag{27}$$

где $\hat{u}(x,\lambda)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)e^{-i\lambda t}dt$.

При этом соответствующие условия (19) и (20) примут вид:

$$\hat{u}(0,\lambda)=0\,, \tag{28}$$

$$\widehat{u'}_x(0,\lambda)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_0^\infty \zeta(t)e^{-i\lambda t}dt=\hat{\zeta}(t)\,. \tag{29}$$

Решая задачу (27)–(29), получаем:

$$\widehat{u'}_x(1,\lambda)=\mathrm{ch}(\mu\sqrt{\lambda})\hat{\zeta}(\lambda)\,, \tag{30}$$

где $\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

Обозначим в формуле (30) функцию $\widehat{u'}_x(1,\lambda)$ через $\hat{z}(\lambda)$ и перепишем эту формулу в форме операторного уравнения

$$A\hat{z}(\lambda)=\left(\mathrm{ch}\,\mu\sqrt{\lambda}\right)^{-1}\hat{z}(\lambda)=\hat{\zeta}(\lambda)\,. \tag{31}$$

Далее, не меняя обозначений, продолжим оператор A, определяемый формулой (31), на всё пространство $\overline{H}$. Тогда это продолжение и его сопряжение будут инъективны.

Так как точное решение $\overline{v}_0(t)$ задачи (1)–(5) принадлежит множеству M_r, определяемому формулой (10), то соответствующее точное решение $\hat{z}_0(\lambda)$ уравнения (31), отвечающее $\hat{\zeta}(\lambda)=\hat{\zeta}_0(\lambda)$, удовлетворяет условию

$$\hat{z}_0\in C\overline{S}_r\,, \tag{32}$$

где $\overline{S}_r=\{\hat{v}:\hat{v}\in\overline{H},\left\|\hat{v}\right\|\le r\}$, а

$$C\hat{v}=\frac{1}{1+i\lambda}\hat{v}(\lambda)\,. \tag{33}$$

Из формулы (31) следует, что

$$B\hat{z}(\lambda)=\frac{\sqrt{\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda}+\cos\sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\sqrt{2\lambda}}\hat{z}(\lambda)\,, \tag{34}$$

где $B=\sqrt{A^*A}$, а из того, что

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{ch}^{-1/2}\sqrt{2\lambda}\le\frac{\sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{2\lambda}+\cos\sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{2}\operatorname{ch}\sqrt{2\lambda}}\le\sqrt{2}\operatorname{ch}^{-1/2}\sqrt{2\lambda} \tag{35}$$

и из формул (33)–(34) следует, что $\sqrt{C^*C}=G(B)$, где $G(\sigma)\sim\ln^{-2}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ при $\sigma\to 0$.

Используя для решения уравнения (31) метод проекционной регуляризации, изложенный в [3], сведём его к уравнению

$$A_1\hat{z}(\lambda)=\frac{\operatorname{ch}\sqrt{2\lambda}+\cos\sqrt{2\lambda}}{2\operatorname{ch}^2\sqrt{2\lambda}}\hat{z}(\lambda)=A^*\hat{\zeta}_\delta(\lambda), \tag{36}$$

где $A_1=A^*A$, а

$$A^*\hat{\zeta}_\delta(\lambda)=\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{2}}-i\operatorname{sh}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}{\operatorname{ch}\sqrt{2\lambda}}\hat{\zeta}_\delta(\lambda). \tag{37}$$

Далее, регуляризуем исходные данные $(\hat{\zeta}_\delta(\lambda),\delta)$ задачи. Для этого определим функцию $\hat{\zeta}_\delta(\lambda,\bar{\alpha}(\delta))$ следующим образом: при условии $\left\|\hat{\zeta}_\delta\right\|>3\|A\|\delta$

$$\hat{\zeta}_\delta(\lambda,\bar{\alpha}(\lambda))=\begin{cases}\hat{\zeta}_\delta(\lambda) & \text{при } \lambda\le\bar{\alpha}(\delta),\\ 0 & \text{при } \lambda>\bar{\alpha}(\delta),\end{cases} \tag{38}$$

где $\bar{\alpha}(\delta)$ определим формулой $\int\limits_{\bar{\alpha}(\delta)}^{\infty}\left|\hat{\zeta}_\delta(\lambda)\right|^2 d\lambda=9\|A\|^2\delta^2$, а при условии, что $\left\|\hat{\zeta}_\delta\right\|\le 3\|A\|\delta$, $\hat{\zeta}_\delta(\lambda,\bar{\alpha}(\delta))\equiv 0$. Тогда приближённое решение $\hat{z}_\delta(\lambda)$ уравнения (31) определим формулой

$$\hat{z}_\delta(\lambda)=A_1^{-1}\hat{\zeta}_\delta(\lambda,\bar{\alpha}(\delta)) \tag{39}$$

и для него, следуя [3], справедлива оценка

$$\left\|\hat{z}_\delta-\hat{z}_0\right\|\le l_2\ln^{-2}\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{40}$$

Здесь l_2 – некоторая константа, а $\hat{z}_0$ – соответствующее точное решение уравнения (31). Заметим, что оценка (40) является точной по порядку на классе $C\bar{S}_r$, а используемый для решения уравнения (31) метод проекционной регуляризации оптимален по порядку на этом классе.

Применяя к $\hat{z}_\delta(t)$ преобразование F^{-1}, обратное к F, и выделяя действительную часть, получим приближённое решение $z_\delta(s)$ задачи (18)–(22): $u_\delta(s)=\sqrt{2}\operatorname{Re}[F^{-1}(\hat{u}_\delta)]$. Ввиду изометричности оператора F, для $z_\delta(s)$ будет выполняться оценка (40).

Наконец, сделав соответствующие замены переменных в $z_\delta(s)$, получим приближённое решение $\bar{u}_\delta(t)$ задачи (1)–(5), для которого оценка (40) также останется справедливой, но с некоторой другой константой l_3.

Литература

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 290 с.
2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
3. Танана В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач// Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. 7. – № 2. – С. 117–132.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1961. – 524 с.

Поступила в редакцию 26 апреля 2005 г.