

## МОДЕЛЬ НАКОПЛЕНИЯ УСТАЛОСТНОГО ПОВРЕЖДЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ИСТОРИИ НАПРЯЖЕНИЙ: ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ВЕРИФИКАЦИЯ

А.А. Абызов, О.С. Садаков, Н.О. Фельк

Концепция накопления усталостного повреждения в связи с эволюцией микропластических деформаций (ЭМД) позволяет унифицировать представления о природе много- и малоциклового усталости и получить инструмент для расширения области моделируемых ситуаций. Для анализа ЭМД удобно использовать структурную модель, обобщающую модель Мазинга на случай сложного напряженного состояния. Для упрощения анализа используется модифицированный принцип Мазинга. Кроме того, учитывается влияние шаровой части тензора напряжений в духе критерия Колмогорова. Приводятся результаты проверки модели при плоском напряженном состоянии.

С развитием вычислительной техники все более широкое применение находят методики расчетной оценки усталостной долговечности ответственных деталей на ранних стадиях проектирования. Наибольшие трудности при этом возникают в случаях многопараметрического нагружения, здесь отсутствуют стандартные методики. В работе [1] было предложено распространить модель накопления повреждений [2], первоначально разработанную для случая малоциклового усталости, на случай многопараметрического многоциклового нагружения. Исходная идея модели состоит в том, что чисто обратимое деформирование не вносит повреждений, а усталость связана с микропластическими деформациями.

Циклические диаграммы деформирования  $\sigma_a(p_a)$  конструкционных сталей хорошо описываются формулой Рамберг – Осгуда [3]

$$\sigma_a = A p_a^m, \quad (1)$$

где  $\sigma_a$  и  $p_a$  – амплитуды напряжений и пластической деформации;  $A$  и  $m$  – постоянные (характеристики материала). Это выражение позволяет рассчитать величину пластической деформации при любой, самой малой амплитуде напряжений. Здесь предполагается регулярное циклическое нагружение при произвольном напряженном состоянии;  $\sigma$  и  $p$  – интенсивности напряжений и деформаций:  $\sigma \equiv \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ ;  $p \equiv \sqrt{p_{ij}p_{ij}}$ ;  $s_{ij}$  и  $p_{ij}$  – компоненты девиаторов напряжений и пластических деформаций. Применив дополнительно формулу Коффина

$$N_f p_a^\alpha = C, \quad (2)$$

где  $N_f$  – число циклов до разрушения;  $\alpha$  и  $C$  – характеристики материала, получим усталостную диаграмму во всем диапазоне чисел циклов – от малоциклового до обычной усталости. Естественно, что при переходе от одного диапазона чисел циклов к другому могут включаться дополнительные механизмы, влияющие на повреждаемость, и для надежного моделирования параметры соответствующего математического описания следует определять в нужном диапазоне чисел циклов. Ниже мы будем рассматривать многоцикловую усталость.

В отличие от анализа малоциклового усталости, в случае микропластического деформирования решение краевой задачи производится в рамках теории упругости. По найденной истории деформаций в опасной точке следует определять историю микропластических деформаций. Это можно сделать лишь на основании модели среды, учитывающей ее микронеоднородность. Наиболее удобной нам представляется структурная модель среды, обобщающая модель Мазинга на непропорциональное нагружение.

Предполагается, что элементарный объем материала работает как совокупность идеально-пластических подэлементов (ПЭ) с отличающимися значениями пределов текучести. При сложном напряженном состоянии поверхности текучести ПЭ являются сферами Мизеса в девиаторном пространстве. Деформации ПЭ считаются одинаковыми и поведение элемента объема характеризуется движением всего набора сферических поверхностей текучести в девиаторном пространстве деформаций  $\{\bar{\epsilon}\}$  при одинаковой истории полной деформации. В недеформированном состоянии центры этих сфер находятся в начале координат. В процессе деформирования материала происходит перемещение точки  $e$ , соответствующей текущей деформации. Когда она достигает какой-либо поверхности текучести и стремится выйти за нее, происходит смещение центра этой поверхности таким образом, чтобы точка  $e$  все время находилась на поверхности [4].

Положение центров поверхностей текучести представляет текущее значение пластической деформации соответствующих ПЭ. Под неупругой деформацией  $\bar{p}$  понимается среднее по ПЭ:

$$\bar{p}(t) = \left\langle \bar{p}^k(t) \right\rangle \equiv \sum_{k=1}^N p^k(t) g_k.$$

«Веса»  $g_k$  и значения пределов текучести ПЭ  $\sigma_T^k$  в совокупности с характеристиками упругости и числом ПЭ  $N$  определяют структурную модель конкретного материала.

При пропорциональном повторно-переменном нагружении центры поверхностей текучести смещаются по прямой, проходящей через начало координат. Роль амплитуды пластической деформации при этом играет изменение пластической деформации от момента последнего реверса  $\bar{p}_* = \bar{p} - \bar{p}_v$ , где  $\bar{p}_v$  – значение  $\bar{p}$  в момент последнего изменения знака соответствующей деформации. В соответствии с принципом Мазинга выражение (1) преобразуется в следующее выражение:

$$r_* = A(p_* / 2)^m / G, \quad (3)$$

где  $r_*$  – интенсивность изменения упругой деформации от момента реверса;  $p_*$  – интенсивность изменения пластической деформации;  $G$  – модуль сдвига.

Для случая нерегулярного пропорционального нагружения, когда формула Коффина (2) не может быть использована, ее можно заменить уравнением состояния [1, 2]:

$$d\omega = K\nu^\beta d\lambda. \quad (4)$$

Здесь  $\omega$  – мера поврежденности материала,  $d\lambda$  – интенсивность приращения пластической деформации,  $K$  и  $\beta$  – характеристики материала. Параметр состояния  $\nu$  представляет отношение  $p_* / r_*$ , которое в структурной модели однозначно связано с относительным весом ПЭ, вошедших на данном этапе ( $d\lambda$ ) в неупругое деформирование. Из уравнения состояния (4), полагая, что разрушению отвечает значение  $\omega = 1$ , нетрудно получить формулу Коффина (2).

В случае непропорционального нагружения с помощью структурной модели можно рассчитать историю изменения неупругих деформаций ПЭ  $\bar{p}^k(t)$  и, осредняя, историю  $\bar{p}$ . Однако понятие реверса и параметра  $\nu$  при этом становятся неопределенными. Для упрощения анализа поведения ПЭ при произвольных программах деформирования была предложена модификация деформационной теории [5]. Определенным образом введено понятие реверсов (в пространстве деформаций они уже не лежат на одной прямой) и определение параметра  $\nu$ , по-прежнему обобщенно характеризующее относительный вес группы неупруго деформирующихся ПЭ.

Расчет накопленного повреждения выполняется для процессов изменения компонентов тензора напряжений, заданных в виде массивов значений. Каждое значение соответствует определенному моменту времени, изменяющемуся с постоянным шагом  $\Delta t$ . Для каждого шага нагружения определяют смещение центров поверхностей текучести в девиаторном пространстве и, следовательно, величины  $\nu_i$ ,  $\Delta\lambda_i$ . В соответствии с (4) на каждом шаге нагружения получают приращение накопленного повреждения  $\Delta\omega$ ; накопленное повреждение  $\omega$  рассчитывается как сумма повреждений на каждом шаге нагружения.

В работе [1] приведена методика идентификации модели накопления повреждений (4) и представлены результаты некоторых тестовых расчетов. Эти результаты свидетельствуют, что

при гармоническом и случайном одноосном нагружении с нулевым средним напряжением модель дает результаты, практически совпадающие с общепринятыми подходами.

При разработке методики расчетной оценки усталостной долговечности важным является вопрос учета среднего напряжения цикла. В [6] в качестве параметра, определяющего это влияние, предложено использовать среднее напряжение  $\sigma_o$  или какой-либо его безразмерный аналог. В процессе дальнейшей разработки рассматриваемой методики расчетной оценки усталостной долговечности было предложено модифицированное выражение для расчета приращения накопленного повреждения, учитывающее влияние  $\sigma_o$ . Такое выражение должно удовлетворять определенным требованиям:

– для регулярных процессов нагружения с напряжением  $\sigma_o = 0$  (случай чистого сдвига) результаты должны совпадать с результатами по выражению (4);

– при одинаковой амплитуде для циклов с положительным средним напряжением накопленное повреждение должно быть больше, а с отрицательным – меньше, чем в симметричном цикле.

Этим требованиям удовлетворяет выражение

$$\Delta\omega = K \cdot \nu^\beta \cdot \Delta\lambda \cdot \left(1 + k_0 \cdot \frac{\sigma_o}{\sigma_{0T}}\right)^{t_0}, \quad (5)$$

где  $k_0$  и  $t_0$  – безразмерные коэффициенты, определяемые при идентификации модели. Очевидно, что значения этих коэффициентов зависят от свойств материала.

Идентификацию предлагаемой модели можно выполнить, например, сопоставляя результаты по выражению (5) для случая одноосного гармонического нагружения с ненулевым средним напряжением с результатами, получаемыми традиционными методами.

В случае гармонического нагружения при одноосном напряженном состоянии в несимметричном цикле обычно рассчитывают приведенную амплитуду напряжений [7]

$$\sigma_{amp} = \sigma_a + \psi \cdot \sigma_m, \quad (6)$$

где  $\sigma_a$  – амплитуда напряжения в цикле,  $\sigma_m$  – среднее напряжение в цикле,  $\psi$  – коэффициент приведения (характеристика материала, обычно  $\psi$  находится в диапазоне 0,1...0,3). В дальнейшем расчет ведут так же, как для симметричного цикла.

Используя аппроксимацию кривой Велера [7]

$$N/N_0 = (\sigma_{-1}/\sigma_a)^{m_B},$$

где  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости;  $N_0$  – базовое число циклов;  $m_B$  – показатель наклона кривой (характеристики материала);  $N$  – число циклов до разрушения;  $\sigma_a$  – амплитуда напряжений, с помощью (6) можно получить выражение для отношения накопленного повреждения за цикл нагружения со средним напряжением  $\sigma_m$  к накопленному повреждению за цикл с нулевым средним напряжением и такой же амплитудой:

$$F\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_a}\right) = \frac{\omega_{\sigma_m}}{\omega_{\sigma_m=0}} = \left(1 + \psi \frac{\sigma_m}{\sigma_a}\right)^{m_B}. \quad (7)$$

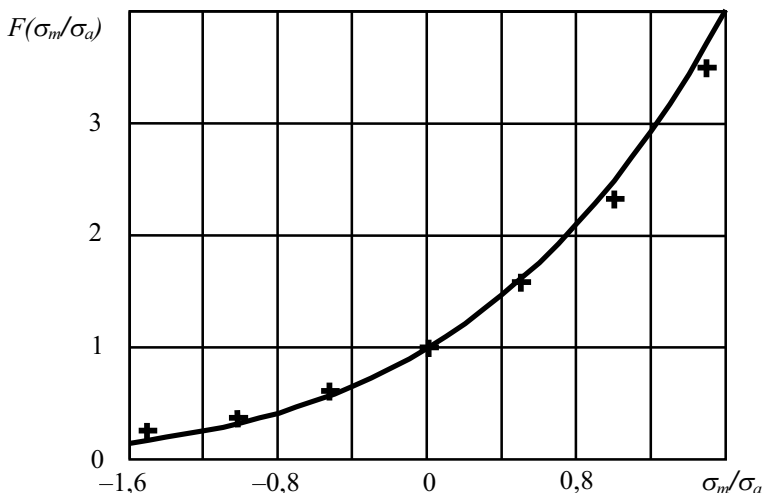
По результатам расчетов были получены значения коэффициентов  $k_0$  и  $t_0$  для материалов, различающихся значениями  $m_B$  и  $m$ , а также коэффициента приведения  $\psi$ . Эти данные представлены в табл. 1 и на рисунке. Приведенное на рисунке сопоставление зависимости (7) с результатами, полученными с помощью предлагаемой модели (5) подтверждает их качественное и количественное соответствие.

Для проверки справедливости предлагаемой методики при плоском напряженном состоянии использованы результаты испытаний тонкостенных трубчатых образцов из сталей Ст.10 и 45, опубликованные в [8, 9]. При проведении испытаний образцы нагружались силой, направленной вдоль оси, и внутренним давлением. Во время всех испытаний окружное напряжение  $\sigma_\theta$  изменялось по гармоническому закону с коэффициентом асимметрии  $R_\theta = 0$  (пульсирующий цикл):

$$\sigma_\theta(t) = \sigma_{\theta a} (\cos(2\pi f_\theta t) + 1),$$

где  $\sigma_{\theta a}$  – амплитуда напряжений,  $f_\theta$  – частота. Осевое напряжение  $\sigma_x$  изменялось либо по гармоническому закону с различными значениями коэффициента асимметрии цикла  $R_x$  фазе или в про-

тивофазе с  $\sigma_\theta$ , либо по бигармоническому закону. В последнем случае процесс  $\sigma_x(t)$  описывается выражением:



$$\sigma_x(t) = \sigma_{xa1} \cos(2\pi f_{x1}t) + \sigma_{xa2} \cos(2\pi f_{x2}t),$$

где  $\sigma_{xa1}$ ,  $\sigma_{xa2}$  – амплитуды напряжений,  $f_{x1}$ ,  $f_{x2}$  – частоты. В результате получены средние значения долговечности при одно- и двухчастотном нагружении.

Влияние среднего напряжения на относительное накопленное повреждение:  
 — зависимость по выражению (7),  
 + – по выражению (5)

Таблица 1

$\psi$	$m_B = 4$				$m_B = 5$				$m_B = 6$			
	$m = 0,1$		$m = 0,15$		$m = 0,1$		$m = 0,15$		$m = 0,1$		$m = 0,15$	
	$k_0$	$t_0$	$k_0$	$t_0$	$k_0$	$t_0$	$k_0$	$t_0$	$k_0$	$t_0$	$k_0$	$t_0$
0,1	0,95	1,3	0,95	1,3	0,90	1,3	0,90	1,5	0,90	1,6	0,90	1,6
0,2	0,90	2,6	0,90	2,7	0,90	2,6	0,90	2,7	0,90	2,2	0,90	2,3
0,3	0,90	4,0	0,90	4,0	0,90	3,8	0,90	3,9	0,90	3,4	0,90	3,6

Таблица 2

Результаты экспериментов и расчетов при одночастотном нагружении

№ п/п	$ \sigma_x _{\max}$ , МПа	$R_x$	$ \sigma_\theta _{\max}$ , МПа	Среднее экспериментальное число циклов до разрушения, $\times 10^{-6}$	Расчетное число циклов до разрушения, $\times 10^{-6}$
Сталь Ст. 10, синфазное нагружение					
1	268	0	268	1,38	1,62
2	159	-0,5	259	3,54	3,83
3	120	-1	240	3,08	3,6
Сталь Ст. 10, противофазное нагружение					
4	180	-1	160	1,44	1,84
5	145	$\infty$	145	2,23	2,58
6	70	-1	140	4,64	6,02
Сталь 45, противофазное нагружение					
7	120	-1	240	0,81	0,74
8	100	-1	235	2,31	2,44

Таблица 3

Результаты экспериментов и расчетов при двухчастотном нагружении (сталь Ст. 10)

№ п/п	$\sigma_{xa1}$ , МПа	$f_{x1}$ , Гц	$\sigma_{xa2}$ , МПа	$f_{x2}$ , Гц	$\sigma_\theta$ , МПа	$f_\theta$ , Гц	Среднее экспериментальное число циклов до разрушения, $\times 10^{-6}$	Расчетное число циклов до разрушения, $\times 10^{-6}$
1	120	10	60	0,5	120	10	2,69	3,06
2	131	10	66	0,5	131	10	1,03	1,22
3	85	20	85	5	85	20	0,73	0,96
4	85	20	85	10	85	20	0,71	1,18

Приведенные в [8, 9] экспериментальные данные были сопоставлены с расчетными оценками числа циклов до разрушения, полученными по предлагаемой методике. Результаты для некоторых случаев представлены в табл. 2 и 3. Анализ этих данных показывает, что расхождение расчетной и средней экспериментальной долговечности не превышает 50 %, что является вполне удовлетворительным.

### Литература

1. Абызов А.А., Садаков О.С. Применение структурной модели для оценки усталости при многопараметрическом случайном воздействии// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 5. – № 2(42). – С. 73–79.
2. Gokhfeld D.A., Kononov K.M., Poroshin V.B., Sadakov O.S. Coupled Mathematical Models for Cyclic Inelastic Deformation and Damage Accumulation Processes// Trans. 10-th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology (Anaheim, USA, 1989). – V. L. – P. 19–24.
3. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении: Справочник// Д.А. Гохфельд, Л.Б. Гецов, К.М. Кононов и др. – Екатеринбург: УрО РАН, 1996. – 408 с.
4. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Пластичность и ползучесть при переменных нагружениях. – М.: Машиностроение, 1984. – 325 с.
5. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Модификации деформационной теории. Принцип подобия при непропорциональном нагружении// Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2001. – Вып. 1. – № 6(06). – С. 16–24.
6. Абызов А.А., Садаков О.С. О влиянии первого инварианта напряжений на малоцикловую усталость// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 5. – № 2(42). – С. 69–72.
7. Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. – М.: Машиностроение, 1993. – 363 с.
8. Павлов П.А., Маликбеков А.К. Многоцикловая усталость углеродистых сталей при плоском напряженном состоянии. Сообщение 1// Проблемы прочности. – 1986. – № 1. – С. 55–60.
9. Павлов П.А., Маликбеков А.К. Многоцикловая усталость углеродистых сталей при плоском напряженном состоянии. Сообщение 2// Проблемы прочности. – 1986. – № 8. – С. 41–45.

*Поступила в редакцию 1 ноября 2005 г.*