

ОЦЕНИВАНИЕ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОТНОСТИ НЬЮТОНОВСКОЙ СРЕДЫ ОДНОВРЕМЕННО С ВЯЗКОСТЬЮ

Г.П. Вяткин, И.В. Елюхина

Рассмотрены не обсуждаемые ранее вопросы, возникающие при одновременном оценивании вязкости и плотности ньютоновской среды в экспериментах с крутильным вискозиметром, и выполнены практические приложения предлагаемых методов параметрической идентификации.

Возможности измерения плотности ρ одновременно с вязкостью ν в различных вискозиметрических экспериментах рассмотрены, а также детально изучены для случая внешней гидродинамической задачи, в [1]. Подобное обсуждение для крутильно-колебательного вискозиметра [2] выполнено в [3], но эти результаты не свободны от недостатков [4], затрудняющих их использование, например, для проверки согласованности вискозиметрических данных. Работоспособная методика одновременной оценки свойств к настоящему времени не реализована на практике. В [4] были изложены некоторые аспекты такого оценивания, а в настоящей работе детально рассмотрим основные из них и продемонстрируем эффективность применения разработанных методов для решения практических задач.

Математическая формулировка задачи, и в т.ч. рабочее вискозиметрическое уравнение представлены в [4]. Далее все размерные величины даны в системе СГС; под чувствительностью понимается $\psi_{y,x} = |(\partial y / \partial x) \cdot x / y|$, а под ошибками Δ_x параметров x – их относительные величины. Неизвестные параметры ν и ρ определяются из условия минимума функции качества вида

$$f(\nu, \rho) = \sqrt{\tilde{n}_{\text{Re}} \cdot \text{Re}^2(F) + \tilde{n}_{\text{Im}} \cdot \text{Im}^2(F)}, \quad (1)$$

где $c_{\text{Re}}, c_{\text{Im}}$ – весовые коэффициенты; Re, Im – действительная и мнимая части от функции F [4].

Введем также безразмерные комплексы

$$A = 0,5MR^2 / K, \quad \xi_0 = R / d, \quad \chi = 2H / R, \quad (2)$$

где $d = \sqrt{\nu\tau_0 / 2\pi}$ – толщина пограничного слоя, H – полувысота столба жидкости, K – момент инерции пустой подвесной системы, M – масса жидкости; R – внутренний радиус цилиндра, τ_0 – период собственных колебаний в отсутствии среды.

Особенности одновременного оценивания вязкости и плотности

Причинами, затрудняющими решение задачи, в приведенной постановке являются овражистый характер функции (1) на плоскости (ν, ρ) и высокая чувствительность рассчитываемых через $\text{Im}(F)$ свойств к изменению периода. Тангенс угла между касательной к оси криволинейного оврага и осью плотности близок по значению к $\psi_{\nu,\rho}$. Заметим, что

$$\psi_{\rho,x} \sim \psi_{\nu,x} \psi_{\rho,\nu}. \quad (3)$$

В вискозиметрическое уравнение плотность входит только в слагаемые, отражающие трение на торцах вискозиметра, не содержится в слагаемом, выражающем трение на боковой поверхности, и поэтому значение $\psi_{\rho,\nu}$ зависит, прежде всего, от отношения высоты к радиусу. Так, например, для длинного цилиндра овраг параллелен оси ρ и значение ρ не влияет на оценку ν ; если число смачиваемых жидкостью торцов $a=1$, то величина $\psi_{\rho,\nu}$ приблизительно в 2 раза выше по сравнению с таковой для $a=2$. На рис. 1а показан поворот оси в зависимости от отношения вкладов в момент трения от торцов и боковой поверхности при базовом расчетном варианте задачи (*): $R=1, K=50, \tau_0=5, M_1=3, \nu=0,01, \rho=1, a=2$ ($A=0,03, \xi_0=11,21, \chi=0,956$) – кривая 1; кривая 2 – $a=1, M_1=3$; 3 – $a=2, M_2=30$ ($A=0,3, \chi=9,56$).

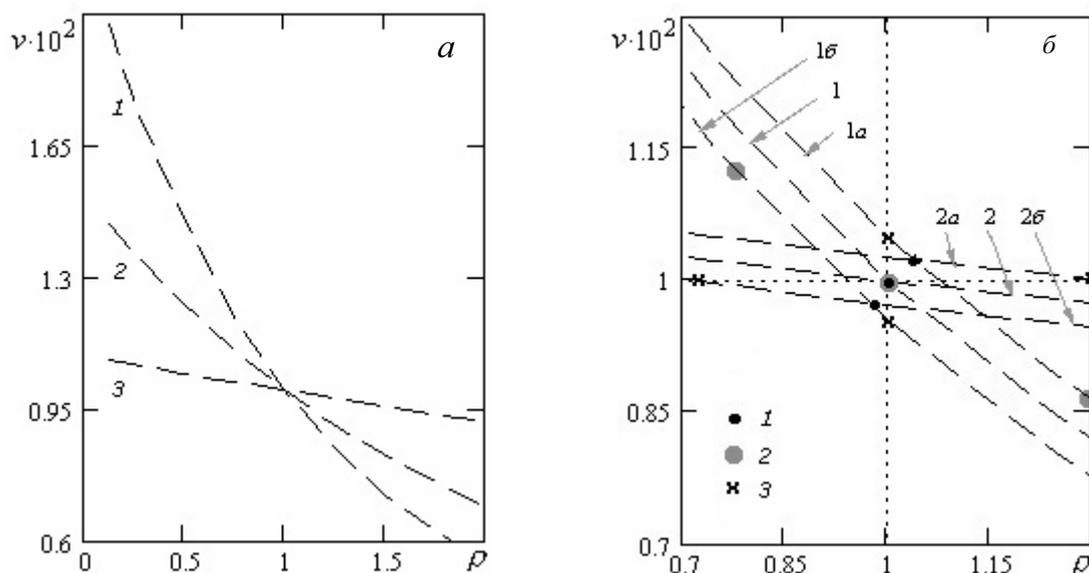


Рис. 1. Зависимость положения оси оврага от условий эксперимента

Из анализа чувствительности, проведенного в предположении независимости Δ_ρ и Δ_v , установлено, что при $c_{Re} = 1$, $c_{Im} = 0$ функции $\psi_{v,x} \sim 1 \dots 5$ ($x = K, M, R$). Функции чувствительности вязкости к параметрам установки и колебаний, рассчитанные через действительную и мнимую части отличаются несущественно, кроме чувствительности к периоду, значения которой могут быть в $10^2 \dots 10^3$ раз выше для $Im(F)$ по сравнению с $Re(F)$. Характер чувствительности вязкости к параметрам колебаний: периоду τ и декременту δ , в зависимости от условий опыта широко обсуждался в литературе с момента разработки метода (см., например, [2, 5]). Вспомним, что величина τ/τ_0 уменьшается с ростом ξ_0 в основном на интервале $\xi_0 \in (2 \dots 12)$, а поведение δ зависит от ξ_0 : при некотором ξ_0 реализуется пик (для длинного цилиндра это значение $\xi_0 \sim 4,3$, а с уменьшением высоты оно смещается в сторону больших ξ_0), т.е. в районе максимума чувствительность вязкости к декременту очень высока, также как и к ошибкам в периоде при ξ_0 , близких к 0 и высоким ξ_0 ; с уменьшением A эти чувствительности также растут.

Учитывая (3) и то, что $\psi_{v,\tau}$ при определенных условиях эксперимента может достигать $10^2 \dots 10^3$, получаем (при почти горизонтальном положении оврага на рис. 1а) ошибку в оценке плотности $\Delta_\rho \sim 10^2 \dots 10^3 \%$ при $\Delta_\tau \sim 0,1 \%$. В случае одновременной оценки ситуация еще более усугубляется; к тому же, помимо ошибок в параметрах колебаний в экспериментальных данных присутствуют ошибки и в параметрах установки, некоторые из которых могут составлять $\sim 1 \%$ (в K или в R при использовании керамического тигля), что может приводить к $\Delta_\rho \sim 10^2 \%$.

На рис. 1б овраги 1а и 2а соответствуют $0,99R$, 1б и 2б – $1,01R$, остальные параметры отвечают (*). Точки пересечения оврагов, соответствующих одинаковым радиусам (точки 1 на рис. 1б), имеют на плоскости $(\rho, v \cdot 10^2)$ координаты: $(0,98; 0,97)$, $(1, 1)$, $(1,04; 1,02)$, начиная с нижней (т.е. отклонение от истинного значения не более 4%). Для $\Delta_R \sim 1 \%$ при одновременном определении свойств: $\Delta_\rho \sim 32 \%$, $\Delta_v \sim 15 \%$ при $M = M_1$ (при M_2 : $\Delta_\rho \sim 52 \%$, $\Delta_v \sim 8 \%$) – этим значениям отвечают минимумы f (1) (точки 2); при независимом оценивании: $\Delta_\rho \sim 7 \%$, $\Delta_v \sim 5 \%$ – при $M = M_1$ (при M_2 : $\Delta_\rho \sim 30 \%$, $\Delta_v \sim 2,5 \%$) – эти точки близки к точкам пересечения осей с прямыми $v = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ (точки 3). При некоторой совокупности условий эксперимента и значений ошибок в измеряемых параметрах, овраги сдвигаются сильнее, и точка их пересечения может лежать дальше от истинного значения, чем минимум на оси.

Идентификация свойств и оптимальное планирование эксперимента

Варианты оценивания плотности одновременно с вязкостью. При определении из вискозиметрической функции только вязкости среды требуется одно уравнение ($\text{Re}(F) = 0$ или $\text{Im}(F) = 0$), наиболее подходящее для этой цели в конкретной задаче. При оценке дополнительно и плотности уравнение необходимо дополнить вторым соотношением (например, традиционно, в т.ч. и в [3] проводится совместное решение для действительной и мнимой частей). Далее для оценки ν и ρ используем следующие три варианта.

1. Предлагаемый в настоящей работе метод, когда идентификация выполняется с использованием только $\text{Re}(F)$, а при планировании оптимального эксперимента в терминах теории чувствительности на множестве всех допустимых выборок измерений определяются точки, минимальное число которых (а именно, две) обеспечивает однозначное, устойчивое и надежное решение задачи. Точки отвечают различным массам образца и находятся из анализа в терминах матрицы Якоби

$$c_{\delta} \begin{vmatrix} \frac{\partial \delta^{(1)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \delta^{(1)}}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \delta^{(2)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \delta^{(2)}}{\partial \nu} \end{vmatrix} + c_{\tau} \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \tau^{(2)}}{\partial \rho} & \frac{\partial \tau^{(2)}}{\partial \nu} \end{vmatrix} \rightarrow \max, \quad (4)$$

где (1), (2) – номера измерений; c_{δ} и c_{τ} – весовые коэффициенты, зависящие от точности измерения τ и δ и чувствительности ν и ρ к ним. При выборе условий согласно (4) учитывается, что

- оси оврагов должны по возможности максимально расходиться (дно оврага становится менее пологим);
- чувствительность свойств к ошибкам в параметрах колебаний растет при уменьшении A (т.е. при уменьшении высоты и прочих равных условиях)
- величина $\psi_{\nu, \rho}$ уменьшается с ростом χ (влияние торцов ослабевает).

Элементы матриц в (4) также могут включать дополнительные весовые коэффициенты в зависимости от того, какой из параметров: ν или ρ , должен быть оценен наиболее точно, или во избежание преобладания какой-либо из точек (так как при изменении M меняется наклон откосов оврага). В начальном приближении без анализа в рамках (4) можно принять $\chi_{\max} \sim 10\chi_{\min}$. Обратим внимание, что точка 1 с минимальной высотой, помимо перечисленного, определяется влиянием вторичных течений, возникающих у торцов, на закон колебаний. Ниже обсудим этот вопрос отдельно.

2. Метод, в котором используется только одна экспериментальная точка и оценивание производится по $\text{Re}(F)$ (частный случай варианта 1 при $\chi_{\max} = \chi_{\min}$).

3. Традиционный метод оценивания (по одной точке с использованием и $\text{Re}(F)$, и $\text{Im}(F)$).

Заметим, что в варианте 1 чувствительность вдоль оси оврага определяющего значения не имеет, так как в большей степени ищутся точки пересечения оврагов, но они могут дальше отстоять от истинного значения, чем в варианте 2, основной недостаток которого – меньший наклон $f(\nu, \rho)$ вдоль оси. При расчете по варианту 1 при $\Delta_{\tau} \sim 10^{-5}$ и $\Delta_{\delta} \sim 10^{-3}$ (с учетом того, что точность измерения δ обычно на 1–2 порядка ниже, чем τ) и ξ_0 , лежащем не в окрестности $\xi_{0\delta}$, ошибка $\Delta_{\rho} < 5\%$ (при $\Delta_{\delta} \sim 10^{-4}$ – $\Delta_{\rho} < 1\%$), что позволяет проверить согласованность вискозиметрических данных. В варианте 2 ошибка Δ_{ρ} при различных условиях эксперимента лежит в широком диапазоне $1 \dots 10^3\%$.

Влияние вторичных течений на колебания вискозиметра. Вторичные течения достаточно активно исследуются для внешней гидродинамической задачи (см., например, [6] и пр.), а для внутренней этот вопрос поднимался в [2, 3, 5], но представленные замечания носят только оценочный характер. Математическую модель при учете осевой и радиальной компонент скорости жидкости представим в естественных переменных скорость – давление в следующем виде:

1) уравнение движения цилиндра

$$\frac{d^2 \alpha}{dT^2} + \alpha = -\frac{4A}{\xi_0^2 \eta_0} \int_0^{\eta_0} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi} \right) \Big|_{\xi_0} d\eta + \frac{4A}{\xi_0^4 \eta_0} \left[\int_0^{\xi_0} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \Big|_0 \xi^2 d\xi - \int_0^{\xi_0} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta_0} \xi^2 d\xi \right]; \quad (5)$$

2) уравнения движения жидкости

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} + V \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + W \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \mathbf{S}, \quad (6)$$

где коэффициенты обобщенного уравнения (6)

$$\Phi = [V, U, W]^T, \quad \mathbf{S} = [-(\partial P / \partial \xi) - V / \xi^2 + U^2 / \xi, -U / \xi^2 - VU / \xi, -(\partial P / \partial \eta) - G]^T;$$

3) уравнение неразрывности

$$\frac{V}{\xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0; \quad (7)$$

4) начально-краевые условия для (5)–(7)

$$T = 0: \alpha \sim 6^\circ, \quad d\alpha/dT = 0, \quad V = U = W = 0; \quad \eta = 0, \quad \eta = \eta_0: V = W = 0, \quad U = d\alpha/dT \cdot \xi; \\ \xi = 0: V = U = dW/d\xi = 0; \quad \xi = \xi_0: V = W = 0, \quad U = d\alpha/dT \cdot \xi_0. \quad (8)$$

Здесь

$$V, U, W = \frac{\vartheta_\xi, \vartheta_\varphi, \vartheta_\eta}{dq_0}, \quad T = q_0 t, \quad P = \frac{p}{\rho d^2 q_0^2}, \quad G = \frac{g}{dq_0^2}, \quad \xi = \frac{r}{d}, \quad \eta_0 = \frac{2H}{d}, \quad \eta = \frac{z}{d};$$

g – ускорение свободного падения; t – время; p – давление; q_0 – циклическая частота колебаний пустого цилиндра; r – радиальная координата ($r = 0$ на оси цилиндра); $\vartheta_\xi, \vartheta_\varphi, \vartheta_\eta$ – радиальная, азимутальная и осевая компоненты скорости; z – осевая координата ($z = 0$ на нижнем торце цилиндра, $z = 2H$ – на верхнем); α – угловое смещение цилиндра из положения равновесия; выражение в правой части (5) – момент сил, приложенных к цилиндру со стороны среды. В (5)–(8) предполагалось, что скольжение между жидкостью и внутренней поверхностью цилиндра отсутствует, течение осесимметричное, затухание колебаний в отсутствии среды пренебрежимо мало, ньютоновская несжимаемая жидкость смачивает оба торца цилиндра. При численной реализации дискретизация уравнений проводилась методом контрольных объемов, согласование поля давления с полем скорости – с помощью SIMPLE-алгоритма, конвективные члены представлялись по QUIC-схеме.

Установлено, что при малых колебаниях, реализуемых в крутильно-колебательном методе, после прохождения переходных процессов осевая и радиальная составляющие скорости не оказывают существенного влияния на закон колебаний в диапазоне величин χ обычно проводимых экспериментов (см., например, [7, 8] и пр.). При высокой точности измерения периода и декремента затухания (не хуже $10^{-5} \dots 10^{-3}$) целесообразно ограничиться $\chi_{\min} > \sim 0,7 \dots 0,9$, а при необходимости работы с вискозиметрами малой высоты с $\chi < \sim 0,1 \dots 0,2$ следует при заданных условиях эксперимента найти оценки коэффициентов для коррекции параметров колебаний с учетом течений, возникающих у торцов. Полученные результаты соответствуют распространенным для режима затухающих колебаний значениям $\xi_0 \sim 8,5 \dots 25$ ($A = 0,02 \dots 0,2$).

Для сильновязкого приближения [2] при прочих равных условиях вторичные течения развиты в большем объеме вискозиметра, а с ростом ξ_0 значительно усиливается интенсивность таких течений вблизи тигля, что искажает поле азимутальной скорости у поверхностей, изменяя момент сил трения в (5) и, следовательно, зависимость $\alpha = \alpha(T)$ по сравнению с аналитическим решением. Кроме того, как уже указывалось выше, в определенном диапазоне значений ξ_0 наблюдается высокая чувствительность свойств к ошибкам в параметрах. В этих случаях граница значений χ_{\min} , обеспечивающая работоспособность методики оценивания свойств жидкости, смещается вверх. При планировании оптимального эксперимента по выбору минимально допустимой высоты тигля χ_{\min} учитывались также длительность и интенсивность выхода на регулярный режим колебаний, определяемые при заданных ξ_0 и η_0 комплексом A . Так, при больших

δ переходные процессы могут занимать значительную часть временного интервала, на котором возможна корректная регистрация α , а при низких δ после прохождения таких процессов реализуются высокие амплитудные значения углового смещения ($\alpha \sim 0,1$) и отнесенные к азимутальной компоненте значения осевой и радиальной составляющих скорости, что сильнее проявляется с ростом ξ_0 .

Практические приложения разработанных методов

Пример 1. Примем размеры тигля, согласно [3] не удовлетворительные для одновременной оценки ν и ρ , а точность измерения τ и δ хуже, чем в [3]; к тому же, пусть значение A будет мало (что затрудняет даже оценку ν), а ξ_0 близко к $\xi_{0\delta}$. Положим: $R = 0,5$, $M_{\min} = 0,4$, $K = 15$, $\tau_0 = 5$, $\nu = 0,01$, $\rho_0 = 1$ ($A = 0,0033$, $\xi_0 = 5,6$, $\chi_{\min} = 1,019$). Проведем учет ошибок только τ и δ , как и в [3] ($\Delta_\tau = \Delta_\delta = 0,001$).

На рис. 2 приведены зависимости ошибок $\Delta_\rho = \Delta_\rho(M)$ (здесь и далее $\Delta_\rho = |(\rho - \rho_0)/\rho_0| \cdot 100\%$); номера кривых соответствуют номерам вариантов, в варианте 1 – $M = M_{\max}$; расчет выполнен для наиболее распространенного случая $a = 1$. Значения Δ_ρ на рис. 2 – максимальные из получаемых при всех возможных комбинациях $\tau \pm \Delta_\tau$, $\delta \pm \Delta_\delta$. При расчете по традиционному варианту 3 при определенном соотношении знаков в ошибках $\Delta_\tau, \Delta_\delta$ оказывается $\rho \sim 0$; значение $\nu \sim 10^{-4}$ (при $M = M_{\min}$), с ростом высоты влияние ρ на величину вязкости падает, и при $M = 4$ величина $\Delta_\nu \sim 20\%$. Видно, что наилучшие значения достигаются в варианте 2 при малой высоте, но при учете ошибок во всех входных данных и высокой точности измерения декремента этот метод обычно менее эффективен предлагаемого варианта 1.

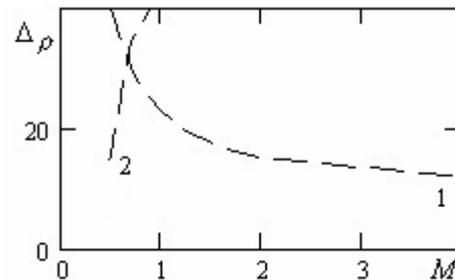


Рис. 2. Зависимость ошибок в плотности от высоты заполнения тигля

Пример 2. Выполним обработку реальных экспериментальных данных для воды ($\rho_0 = 1$). Здесь $\Delta_R \sim 0,005$, $\Delta_K \sim 0,02$, $\Delta_M \sim 0,001$, $\Delta_\tau \sim 0,0005$, $\Delta_\delta \sim 0,02$; радиус тигля $R = 1,525$, высота $\chi_{\max} = 3,2$. Обозначим номера расчетных точек как, например, 23 – соответствующая второму сверху значению K и массе M_3 (см. таблицу). При одновременном определении ν и ρ традиционным методом в расчетах 22, 32, 41, 42, 51, 52 значения $\rho \sim 0$, в 11, 13, 21, 43 – $\rho > 2$, а в 12 и 53 – $\Delta_\rho < 10\%$. В случае варианта 2 значения $\rho \sim 0,88 \pm 0,1$. При расчете же по варианту 1 построчно с использованием крайних значений масс M_1 и M_3 в среднем $\Delta_\rho \sim 20\%$, а для второй строки даже при выборе оптимальных высот в рамках (4) $\rho \sim 0$. Итак, предлагаемый метод оказался хуже, чем традиционный. Проанализируем, случайность ли это.

Обратимся к теории чувствительности и определим, какие максимальные ошибки могут возникать в вариантах 1–3. При использовании только действительных частей в (1) для указанного диапазона χ и K значения $\Delta_\rho \sim 20 \pm 5\%$, а при $\Delta_\delta < 0,01$, $\Delta_K < 0,01$, $\Delta_R < 0,001$ может оказаться $\Delta_\rho < 5\%$. Заметим, что полученные оценки ρ укладываются в этот интервал. В варианте 1 добавляются еще дополнительные ошибки в τ, δ, M для второй точки. Ошибка здесь повышается также и из-за роста $\psi_{\rho,\delta}$ (ошибка от Δ_δ в плотности $\Delta_\rho \sim 30\%$; в варианте 2 – $\Delta_\rho \sim 7\%$), так как определение свойств среды по $\text{Re}(F)$ учитывает, прежде всего, значения δ и Δ_δ . В этом методе желательно точнее измерять декремент: при $\Delta_\delta < 0,001$ и прочих равных условиях можно надежно получить $\Delta_\rho < 5\%$.

K	M = 0			M ₁ = 15,115 (χ = 1,357)			M ₂ = 20,197 (χ = 1,813)			M ₃ = 25,259 (χ = 2,267)		
	τ ₀	δ ₀	ξ ₀	τ	δ	A	τ	δ	A	τ	δ	A
118	7,131	0,0216	14,3	7,263	0,101	0,149	7,292	0,133	0,199	7,316	0,149	0,249
146	7,922	0,0208	13,6	8,045	0,086	0,12	8,053	0,111	0,161	8,088	0,13	0,201
196	9,158	0,0138	12,6	9,294	0,072	0,089	9,233	0,0904	0,12	9,271	0,106	0,15
236	9,998	0,0126	12,1	10,078	0,0639	0,074	10,09	0,0792	0,099	10,22	0,097	0,124
274	10,773	0,0137	11,6	10,853	0,0578	0,064	10,85	0,0726	0,086	10,92	0,084	0,107

В примере наблюдается ситуация иная, чем на рис. 2: точки пересечения оврага расположены дальше от истинного значения, чем минимум $Re(F)$ на оси оврага. Традиционный вариант здесь совершенно не применим к одновременной оценке свойств: помимо достаточно высоких значений Δ_ρ от ошибок в K и R ($\sim 15\%$) ошибки Δ_τ ведут или к $\rho \sim 0$, или к $\Delta_\rho > 500\%$; при оценке только вязкости $\Delta_\nu \sim 5\%$. Итак, ошибки Δ_χ оказали такое влияние (т.е. некоторые из них увеличили значения вязкости и плотности, а некоторые уменьшили), что даже традиционный вариант оказался лучше предлагаемого (например, точка 12 и пр.); эти ошибки легко прогнозируемы и контролируемы при математическом моделировании условий крутильных колебаний.

Заключение

Итак, в настоящей работе показано, что

- 1) в зависимости от ошибок наблюдаемых параметров и условий эксперимента лучшим может быть вариант идентификации по действительной части вискозиметрического уравнения с использованием одной или двух точек и для проверки согласованности следует выбрать именно его, а затем путем моделирования оценить доверительные интервалы для оценок свойств в этих случаях и посмотреть, укладываются ли в них найденные из эксперимента значения ν и ρ ;
- 2) для исключения эффектов вторичных течений и возможности использования традиционных расчетных выражений эксперименты по проверке согласованности вискозиметрических данных рекомендуется проводить в области слабовязкого приближения при высотах тигля, не меньших радиуса, и в предлагаемом методе идентификации свойств принять $\chi_{\min} \sim 1$.

Авторы признательны Бескачко В.П. за предоставление обсужденных выше опытных данных.

Литература

1. Krall A.H., Sengers J.V. Simultaneous measurement of viscosity and density with an oscillating-disk instrument// Int. J. of Thermophys. – 2003. – V. 24. – № 2. – P. 337–359.
2. Швидковский Е.Г. Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 206 с.
3. Nieuwoudt J.C., Sengers J.V., Kestin J. On the theory of oscillating-cup viscometers// Physica A. – 1988. – V. 149. – P. 107–122.
4. Елюхина И.В. Планирование оптимального эксперимента по одновременному определению вязкости и плотности ньютоновской среды// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2001. – Вып. 1. – № 7(07) – С. 71–76.
5. Grouvel J.M., Kestin J. Working equations for the oscillating-cup viscometer// Appl. Sci. Res. – 1978. – V. 34. – P. 427–443.
6. Folse R.F. Observations of secondary flows generated by a torsionally oscillating sphere in linearly stratified fluids// Phys. Fluids. – 1994. – V. 6. – P. 537–540.
7. Vollmann J., Riedel D. The viscosity of liquid Bi–Ga alloys// J. Phys.: Condens. Matter. – 1996. – V. 8. – P. 6175–6184.
8. Wang D., Overfelt R.A. Oscillating cup viscosity measurements of aluminum alloys: A201, A319 and A356// Int. J. of Thermophys. – 2002. – V. 23. – № 4. – P. 1063–1076.

Поступила в редакцию 27 октября 2005 г.