УДК 532.137.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТЕЙ КРУТИЛЬНЫМ ВИСКОЗИМЕТРОМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

И.В. Елюхина

Проведено математическое моделирование движения крутильно-колебательного вискозиметра конечной длины, заполненного жидкостями Оствальда–Вейля. Оценены границы применимости приближения длинного цилиндра и рассмотрены вопросы идентификации постоянной и показателя степенного реологического закона.

В [1] были обсуждены возможности идентификации неньютоновских свойств с использованием техники крутильных колебаний заполненного такими средами бесконечно длинного цилиндра. В реальных экспериментах длина тигля конечна, и поэтому в настоящей работе при изучении его движения учтем неоднородность полей азимутальной скорости и касательного напряжения по высоте, а также исследуем границы применимости этого приближения.

Математическая формулировка задачи

Исследования выполним на примере нелинейно вязких сред. Математическая модель включает в себя

1) уравнение движения цилиндра

$$\frac{d^2\alpha}{dT^2}+\alpha=P; \qquad (1)$$

2) уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial T}=\frac{\partial\sigma_{\xi\varphi}}{\partial\xi}+\frac{2\sigma_{\xi\varphi}}{\xi}+\frac{\partial\sigma_{\eta\varphi}}{\partial\eta}; \qquad (2)$$

3) уравнение состояния жидкости (реологическая модель Оствальда–Вейля)

$$\sigma_{\xi\varphi(\eta\varphi)}=bD_{\xi\varphi(\eta\varphi)}D^{m-1}; \qquad (3)$$

4) начально-краевые условия для (1), (2)

$$T=0:\ \alpha\sim 6^\circ,\ d\alpha/dT=0,\ U=0;\ \eta=0,\ \eta=\eta_0:\ U=d\alpha/dT\,\xi;\ \xi=0:\ U=0;\ \xi=\xi_0:\ U=d\alpha/dT\,\xi_0. \qquad (4)$$

Здесь

$$D_{\xi\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\xi}-\frac{U}{\xi},\ D_{\eta\varphi}=\frac{\partial U}{\partial\eta},\ D=\sqrt{D_{\xi\varphi}^2+D_{\eta\varphi}^2};$$

$$P=-\frac{4Ab}{\xi_0^2\eta_0}\int_0^{\eta_0}\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}-\frac{U}{\xi}\right)\left|\frac{\partial U}{\partial\xi}-\frac{U}{\xi}\right|^{m-1}\Bigg|_{\xi_0}d\eta+\frac{4Ab}{\xi_0^4\eta_0}\left[\int_0^{\xi_0}\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)\left|\frac{\partial U}{\partial\eta}\right|^{m-1}\Bigg|_0\xi^2d\xi-\int_0^{\xi_0}\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)\left|\frac{\partial U}{\partial\eta}\right|^{m-1}\Bigg|_{\eta_0}\xi^2d\xi\right];$$

$$b=\frac{q_0^{m-1}k}{\nu\rho},\ U=\frac{V}{dq_0},\ A=\frac{MR^2}{2K},\ T=q_0t,\ d=\sqrt{\frac{\nu}{q_0}},\ \xi_0=\frac{R}{d},\ \xi=\frac{r}{d},\ \eta_0=\frac{H}{d},\ \eta=\frac{z}{d}; \qquad (5)$$

A – отношение моментов инерции жидкости в вискозиметре и пустой подвесной системы K; d – толщина пограничного слоя; D – безразмерный второй инвариант тензора скоростей деформации; $D_{\xi\varphi(\eta\varphi)}$ – безразмерная $\xi\varphi(\eta\varphi)$-я компонента тензора скоростей деформации; k и m – постоянная и показатель степенного реологического закона; M – масса среды; H и R – внутренние высота и радиус цилиндра; t – время; P – момент сил, приложенных к цилиндру со стороны среды; q_0 – циклическая частота колебаний пустого цилиндра; r – радиальная координата ($r=0$ на оси цилиндра); z – осевая координата ($z=0$ на нижнем торце цилиндра, $z=H$ – на верхнем); V – азимутальная компонента скорости; α – угловое смещение цилиндра из положения равновесия; ν, ρ – кинематическая вязкость и плотность среды. В (1)–(5) предполагалось, что колебания малы, скольжение между жидкостью и внутренней поверхностью цилиндра отсутствует, затухание колебаний в отсутствии среды пренебрежимо мало, жидкость смачивает оба торца цилиндра. Численное решение проводилось методом переменных направлений по схеме Бараката и Кларка, значение кажущейся вязкости принималось с предыдущего временного слоя.

Результаты и обсуждение

Особенности колебаний тигля. Качественные особенности движения вискозиметра и заполняющей его нелинейно вязкой среды, обсуждены в [1]. Напомним, что колебания для нелинейных сред даже в отсутствии переходных процессов не изосинхронны [1] и будем оперировать следующими параметрами колебаний: отношением периодов колебаний тигля в присутствии и отсутствии среды λ и декрементом Δ для каждого колебания. Изменение закона колебаний тигля в зависимости от высоты столба жидкости показано на рис. 1.

Анализ подобного поведения можно выполнить наглядно с использованием ньютоновской модели жидкости. Зависимость Δ и λ от ξ_0 и A рассмотрена, например, в [2], а здесь лишь отметим, что λ падает с ростом ξ_0 и при некотором $\xi_{0\Delta} \sim 4\ldots6$ наблюдается максимум функции $\Delta = \Delta(\xi_0)$. Эти закономерности подтверждаются и в случае нелинейно вязких сред, если в качестве ξ_0 рассматривать величину $\xi_{0\text{нв}} = \left(b\widetilde{D}^{m-1}\right)^{-0.5}\xi_0$, где $\widetilde{D}$ – осредненное по полупериоду значение $D\big|_{\xi=\xi_0}$; значения $\xi_{0\text{нв}\Delta}$ близки к таковым для ньютоновской среды. В условиях крутильного вискозиметра $D<1$ и в процессе колебаний эта величина уменьшается, поэтому для дилатантных сред ($m>1$) кажущаяся вязкость $\gamma = b\widetilde{D}^{m-1}$ падает и величина $\xi_{0\text{нв}}$ растет, а для псевдопластичных – $\xi_{0\text{нв}}$ падает и соответствующим образом изменяются с течением времени λ и Δ.

Границу по высоте $\chi = \eta_{0\text{дл}} / \xi_0$, выше которой можно воспользоваться приближением длинного цилиндра, для ньютоновской среды можно описать кривыми, представленными на рис. 2 (точность измерения параметров колебаний не хуже 10^{-3}). Так, например, при значении $\xi_{0\text{нв}}$ в начале колебаний, отвечающему слабовязкому приближению (в общем случае при $\xi_0 > \xi_{0\Delta}$) параметры колебаний λ и Δ тигля, заполненного дилатантной средой, уменьшаются с течением времени, граница χ всегда меньше, чем при соответствующем ξ_0 для ньютоновской жидкости. Для псевдопластичных сред λ растет, значение Δ проходит через максимум, а при $\xi_{0\text{нв}}$, близких к $\xi_{0\text{нв}\Delta}$, реализуются высокие значения Δ и часто колебания затухают быстрее, чем достигаются малые значения Δ; χ выбирается по максимуму $\chi = \chi(\xi_0)$ для ньютоновской среды.

Для ньютоновских жидкостей при фиксированных ξ_0 и A для слабовязкого приближения декремент и период выше при меньшем η_0, а, к примеру, при $\xi_0 = 6$ (как на рис. 1) – Δ ниже. Как видно из рис. 1, для нелинейно вязкой среды Δ меньше и λ больше в случае короткого цилиндра,

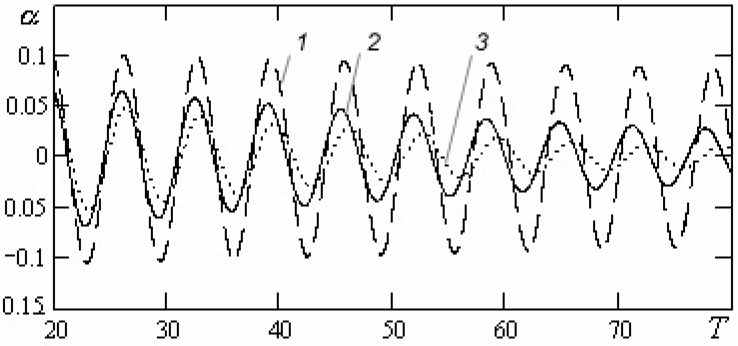

Рис. 1. Закон колебаний цилиндра ($A = 0{,}2$, $\xi_0 = 6$):
1 – $m = 2$, $\eta_0 = 30$; 2 – 2, $\eta_0 \to \infty$; 3 – 1, $\eta_0 \to \infty$

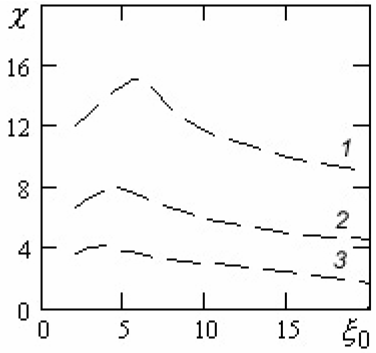

Рис. 2. Зависимость χ от ξ_0:
1 – $A = 0{,}2$; 2 – 0,1; 3 – 0,05

а при $m = 1$ эти значения параметров колебаний выше, чем при $m = 2$, ввиду реализации бóльших значений $\xi_{0_{\text{нв}}}$ в последнем случае. Заметим, что для псевдопластичных сред влияние вторичных течений на колебания сильнее, чем для ньютоновских (и тем более дилатантных) сред, и граница по высоте, когда их можно не учитывать, смещается вверх (это связано с глубиной проникновения, пропорциональной γ и пр.); высота χ для таких сред обычно также больше (так как $\xi_{0_{\text{нв}}}$ меньше); переходные процессы, определяемые начальными условиями (4), протекают дольше.

Оценивание свойств жидкостей. Очевидной в общем случае цилиндра некоторой конечной длины представляется методика оценивания свойств по закону колебаний с учетом в т.ч. и переходных процессов. Тогда оценка свойств проводится путем минимизации функции качества, являющейся критерием соответствия экспериментальных $y_{\text{э}}$ и расчетных $y_{\text{р}}$ значений наблюдаемых в эксперименте параметров и построенной, например, по методу наименьших квадратов: $f(m,b) = \sum (y_{\text{р}j} - y_{\text{э}j})^2$, где j – номер экспериментальной точки; вектор $\mathbf{y} = \boldsymbol{\alpha}$, можно принять также $\mathbf{y} = [\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\delta}]$. В рамках матрицы Якоби необходимо выбрать условия для оптимального эксперимента исходя из большей наблюдаемости неньютоновских эффектов (в т.ч. большей разницы в значениях параметров колебаний в начале ($\Delta_{\text{н}}$ и $\lambda_{\text{н}}$) и конце ($\Delta_{\text{к}}$ и $\lambda_{\text{к}}$) колебательного процесса) и меньшей чувствительности m и b к ошибкам в измеряемых в эксперименте величинах.

При выборе таких условий необходимо принимать во внимание, что при прочих равных условиях эксперимента с увеличением η_0 растут A и разница между $\Delta_{\text{н}}$ и $\Delta_{\text{к}}$, $\lambda_{\text{н}}$ и $\lambda_{\text{к}}$. При малом декременте затухание более долгое (больше разница во времени между значениями α : α_0 и $\alpha_{\text{к}}$ в конце колебаний, когда уверенная регистрация α уже невозможна), т.е. больше число колебаний N до затухания и меньше локальная чувствительность $\partial\Delta/\partial N$ и $\partial\lambda/\partial N$. При большом декременте колебания затухают быстрее, чем завершаются переходные процессы, что может вносить ошибку от неучтенных начальных факторов, и, помимо этого, чем менее длителен колебательный процесс, тем меньше данных для методов параметрической идентификации, так как при равенстве дисперсий в различных точках замера здесь берется максимально возможное их число. Чем меньше A, тем Δ и λ в зависимости от $\xi_{0_{\text{нв}}}$ для среды Оствальда–Вейля (от ξ_0 для ньютоновской среды) изменяются слабее и наблюдаемость нелинейных свойств хуже, но с другой стороны тогда слабее чувствительность свойств к ошибкам в параметрах установки и колебаний. При обсуждении чувствительности можно в начальном приближении воспользоваться результатами, полученными по вязкости для ньютоновской среды.

Заметим, что использование приближения длинного цилиндра для оценки свойств обладает рядом преимуществ. Так, например, ошибки в плотности и высоте тигля слабее влияют на вязкостные свойства среды, вдоль оси оврага на плоскости (m,b) минимум функции качества $f(m,b)$ обычно более выражен, а также численная реализация модели (1)–(5) в этом случае проще, что обеспечивает бóльшую точность, устойчивость и эффективность решения и пр.

Заключение

Итак, при изучении нелинейных свойств жидких сред крутильно-колебательным методом при известной конфигурации тигля целесообразно использовать модель, соответствующую бесконечно длинному цилиндру, с предварительной оценкой высоты тигля, отвечающей ему, а также необходимо выполнить планирование оптимального эксперимента с учетом всех определяющих при заданных условиях факторов.

Литература

1. Елюхина И.В., Вяткин Г.П., Бескачко В.П. Новые возможности крутильно-колебательного метода Швидковского Е.Г.: идентификация реологической принадлежности среды// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2003. – Вып. 3. – № 6 (22). – С. 108–115.

2. Вяткин Г.П., Елюхина И.В. Оценивание методом крутильных колебаний плотности ньютоновской среды одновременно с вязкостью// См. в настоящем выпуске.

Поступила в редакцию 27 октября 2005 г.