

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА ЖИДКИХ СРЕД В ЭКСПЕРИМЕНТАХ С КРУТИЛЬНЫМ ВИСКОЗИМЕТРОМ

*А.Е. Коренченко, В. П. Бескачко*

Конечно-разностными методами получено решение задачи о движении крутильного вискозиметра, заполненного вязкоупругой жидкостью. Исследовано влияние упругих параметров жидкости на характеристики колебаний вискозиметра. Предложен метод идентификации вязкоупругих жидкостей, основанный на наблюдении резонансных эффектов.

**Введение.** Эксперименты [1] с диском, вращающимся по инерции на поверхности жидкости, указывают на существование упругих свойств у такой традиционно считающейся ньютоновской жидкости, как вода. Эти эксперименты подтверждают известный реологический тезис, что упругими свойствами в той или иной мере обладают все жидкости. Вопрос только в том, как их обнаружить, если они выражены так же слабо, как в воде. Для этого необходимы эксперименты, в которых реализуются весьма малые скорости деформации, например, такие, которые возникают в крутильном вискозиметре по мере затухания его колебаний. Изучение возможностей метода крутильных колебаний для определения упругих свойств «почти ньютоновских» жидкостей и является целью настоящей работы.

**Математическая модель.** Для описания вязкоупругих эффектов в работе используется представление о жидкости с конвективной упругостью [2]. Такая жидкость определяется как материал, для которого напряжение зависит как от деформации, так и от скорости деформации, причем деформация определяется через различия в конфигурации материала в последовательные моменты времени, а не в сравнении с некоторой предпочтительной формой. Тензор напряжений в такой жидкости может быть представлен в следующем виде:  $\sigma = \sigma_{\text{вяз}} + \sigma_{\text{упр}}$ . Упругая часть тензора напряжений изотропной жидкости с конвективной упругостью выражается формулой

$$\sigma_{\text{упр}} = \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} \cdot G \cdot d\varepsilon(t').$$

В работе это соотношение использовалось в дискретной форме:

$$\sigma_{\text{упр}}^{n+1} = G \cdot \varepsilon + \sigma_{\text{упр}}^n \cdot e^{-\Delta t/\tau},$$

где  $\sigma_{\text{упр}}^n$  – тензор упругих напряжений в момент времени  $t$ ,  $G$  – модуль сдвига,  $\varepsilon$  – тензор малых деформаций, появившихся за время  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  и учтено, что упругие напряжения за каждый интервал  $\Delta t$  не аддитивны, а имеет место максвелловская релаксация [3]. Вязкая часть тензора напряжений удовлетворяет уравнению Ньютона  $\sigma_{\text{вяз}} = -\eta \cdot \dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{\varepsilon}$  – тензор скоростей деформации. Описанная модель является линейной моделью вязкоупругости и характеризуется помимо вязкости двумя параметрами: модулем сдвига  $G$  и временем релаксации упругих напряжений  $\tau$ .

Введем безразмерные переменные, когда все расстояния отнесены к радиусу  $R_{\text{ц}}$  цилиндра, скорость – к  $v/R_{\text{ц}}$  ( $v$  – кинематическая вязкость жидкости), давление – к  $\rho v^2/R_{\text{ц}}^2$  ( $\rho$  – плотность жидкости), время – к  $R_{\text{ц}}^2/v$ . Тогда в безразмерных координатах  $(r, \theta, z)$  движение цилиндра и заполняющей его жидкости, описывается уравнениями:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Delta \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p - \mathbf{f}_{\text{упр}}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\omega_{\text{ц}}}{dt} = -K \cdot \varphi + M_{\text{вяз}} + M_{\text{упр}}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  и  $p$  – поля скорости и избыточного по сравнению с  $\rho g z$  давления в жидкости;  $\omega_\zeta$  – угловая скорость цилиндра;  $\varphi$  – угол поворота цилиндра относительно равновесного положения;  $K = \frac{R_\zeta^4 \kappa}{\nu^2 I_\zeta}$ ;  $\kappa$  – коэффициент крутильной жесткости нити;  $I_\zeta$  – момент инерции цилиндра;  $M_{\text{вяз}}$  и  $M_{\text{упр}}$  – безразмерные моменты вязкой силы трения и упругой силы, приложенные к цилиндру со стороны жидкости. Безразмерная объемная плотность упругой силы  $\mathbf{f}_{\text{упр}}$  на каждом временном шаге определяется явным образом по формуле

$$\mathbf{f}_{\text{упр}}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{\text{упр}}^t \cdot e^{-\Delta t/\tau} + E \cdot \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{f}_{\text{упр}}^t \cdot e^{-\Delta t/\tau} \cdot \Delta t,$$

здесь  $E = \frac{GR_\zeta^2 \Delta t}{\rho \nu^2}$ ,  $\Delta t$  – безразмерный интервал, соответствующий временному шагу разностной схемы.

Выражение для моментов  $M_{\text{вяз}}$  и  $M_{\text{упр}}$  можно записать в виде

$$M_{\text{вяз}} = \frac{2\pi\rho R_\zeta^5}{I_\zeta} \cdot \left( -\int_0^1 r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \Big|_{z=0} dr + \int_0^1 r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \Big|_{z=H/R_\zeta} dr + \int_0^{H/R_\zeta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \Big|_{r=1} dz \right), \quad (4)$$

$$M_{\text{упр}}^{t+\Delta t} = \frac{2\pi R_\zeta^7 G \cdot \Delta t}{I_\zeta \nu^2} \cdot \left( -\int_0^1 r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \Big|_{z=0} dr + \int_0^1 r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \Big|_{z=H/R_\zeta} dr + \int_0^{H/R_\zeta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \Big|_{r=1} dz \right) + M_{\text{упр}}^t \cdot e^{-\Delta t/\tau}.$$

Здесь  $H$  – высота цилиндра и предполагается, что сверху жидкость соприкасается с твердой границей – крышкой.

В качестве граничных условий приняты условия прилипания жидкости ко всем твердым границам:

$$\begin{aligned} u_\theta(1, z, t) &= \omega_\zeta; & u_\theta(r, 0, t) &= u_\theta(r, H/R_\zeta, t) = \omega_\zeta \cdot r; \\ u_r(r, 0, t) &= u_z(r, 0, t) = u_r(r, H/R_\zeta, t) = u_z(r, H/R_\zeta, t) = 0, \\ u_r(1, z, t) &= u_z(1, z, t) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Начальные условия записываются в виде

$$\varphi(0) = 0; \quad \omega_\zeta(0) = \omega_0, \quad (6)$$

т.е. при  $t < 0$  вискозиметр покоится вместе с жидкостью в положении равновесия и в момент  $t = 0$  толчком приобретает некоторую угловую скорость.

**Численное решение** находилось методом конечных разностей. Использовались равномерные пространственные сетки с максимальной размерностью  $50 \times 50$  в осевом и радиальном направлениях. Дискретизация гидродинамических уравнений производилась по схеме центральных разностей по пространственным переменным и односторонних по времени. Линеаризация полученных в результате нелинейных алгебраических уравнений проводилась по схеме Ньютона, а решение линеаризованных систем уравнений на каждом временном этапе – методом исключения Гаусса [4]. При реализации схемы были приняты меры по предотвращению появления схемной вязкости. Использование для решения системы уравнений метода Гаусса приводит к существенным ограничениям на размеры сеточного разбиения, однако этот метод обладает хорошими консервативными качествами и гарантированной сходимостью. Консервативные свойства численного решения, а именно, равенство нулю интегрального массового потока, проверялись на каждом временном шаге.

Численные расчеты были проведены для цилиндров с различными радиусами, подвешенных на нитях с различной крутильной жесткостью и для модельных жидкостей с различными значениями упругих параметров. Момент инерции цилиндра выбирался так, чтобы  $\beta = I_\zeta / I_{\text{ж}} = 10$ , здесь  $I_{\text{ж}}$  – момент инерции «замороженной» жидкости. Внутренний радиус вискозиметра выбирался в пределах  $0,008 \dots 0,021$  м, а отношение высоты цилиндра к внутреннему радиусу  $\gamma = H / R_\zeta$  было равно 1, так как в [5] было показано, что упругие свойства проявляются при про-

чих равных условиях тем сильнее, чем меньше  $\gamma$ . Плотность и вязкость жидкости отвечали воде. Коэффициент крутильной жесткости нити выбирался так, чтобы период колебаний варьировался в пределах 7,5...18 с. Расчеты были проведены для модельных жидкостей, в которых величина модуля сдвига выбиралась порядка  $10^{-3}$  Па (слабые вязкоупругие свойства).

**Результаты и обсуждение.** Результатом расчета для каждого набора параметров был закон движения вискозиметра  $\varphi(t)$ . Затем этот закон аппроксимировался функцией вида

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-p \cdot t} \sin(f \cdot t + \psi) \tag{7}$$

с целью определения параметров колебаний: частоты  $f$  и коэффициента затухания  $p$ . Подгонка осуществлялась методом наименьших квадратов с минимизацией методом Розенброка [6]. На рис. 1 изображены графики зависимостей коэффициента затухания от периода колебаний для ньютоновской жидкости и для жидкостей с тем же коэффициентом вязкости, но различными значениями упругих параметров. Для получения каждой кривой на рис. 1 варьировалась жесткость нити подвеса, влияющая на частоту колебаний вискозиметра и, таким образом, на период  $T = 2\pi / f$ . Прочие условия численного расчета (масса, внутренний радиус и момент инерции цилиндра, модуль сдвига, вязкость и плотность жидкости) были фиксированы.

Кривые на рис. 1 отличаются тем, что получены для жидких сред с различными временами релаксации. Как видно из рисунка, зависимости  $p(T)$  для жидкостей с временами релаксации  $\tau = 30$  мин и  $\tau = 3$  мин различаются мало. Это можно объяснить тем, что характерное время колебаний – их период  $T$  не превышает 18 с и поэтому для рассмотренных выше времен релаксации  $T \ll \tau$ , так что оба эти времени могут считаться «асимптотически большими». Кривые, отвечающие этим временам релаксации, имеют выраженный максимум, располагающийся при  $T \approx 12$  с. Легко показать, что максимум коэффициента затухания наблюдается при совпадении радиуса цилиндра и расстояния, пробегаемого упругой волной за половину периода колебаний, т.е.

$$V_{\text{упр}} \cdot \frac{T}{2} = 1,038 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx R_{\text{ц}}, \tag{8}$$

где  $V_{\text{упр}} = \sqrt{3G/\rho}$  – скорость распространения упругих сдвиговых возмущений в среде.

«Резонансный» характер зависимостей  $p(T)$  является результатом наложения двух процессов: движения среды, обусловленного крутильными колебаниями цилиндра, и волнового движения, связанного с распространением в ней упругой волны. Анализ временной эволюции распределения скоростей в объеме жидкости показывает, что величина азимутальной скорости во внутренних областях вязкоупругой среды превышает соответствующие значения в ньютоновской жидкости и достигает наибольших значений при выполнении условия (8). Интенсификация относительного движения внутренних слоев жидкости увеличивает диссипацию энергии за счет внутреннего трения и приводит к увеличению коэффициента затухания. Вид зависимостей  $p(T)$ , полученных при  $t = 17$  с и  $t = 3,5$  с, т.е. для значений времен релаксации, сравнимых с периодом колебаний и меньших его, существенно изменяется. Во-первых, как видно из рисунка, максимум на кривых смещается в область меньших  $T$ , и может совсем пропасть (как для  $\tau = 3,5$  с), во-вторых,

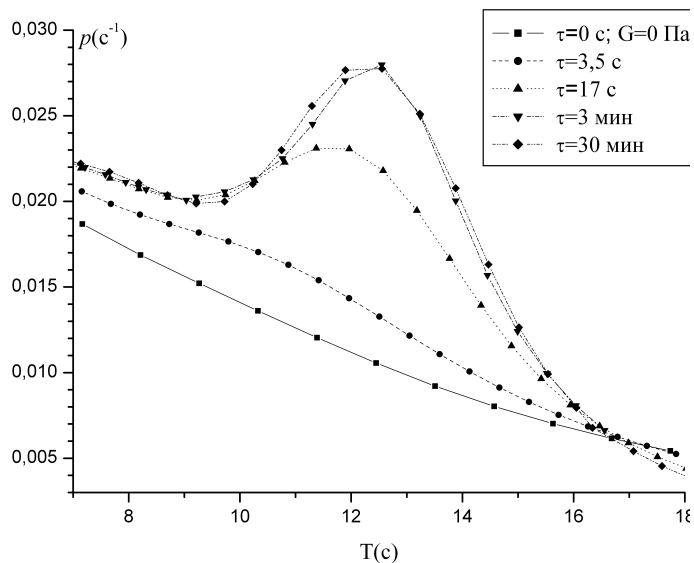


Рис. 1. Зависимость коэффициента затухания крутильных колебаний от их периода для модельных вязкоупругих сред с различными значениями времени релаксации;  $R_{\text{ц}} = 0,0103$  м,  $G = 0,001$  Па

коэффициент затухания колебаний изменяется при резонансе на тем меньшую величину, чем меньше время релаксации.

Для идентификации среды как вязкоупругой и определения в рамках данной модели модуля сдвига жидкости следует получить как можно ярче выраженный максимум на кривой зависимости коэффициента затухания от периода колебаний или от другого аргумента, зависящего от периода. Поэтому важно выяснить, как влияют параметры вискозиметра, например, радиус  $R_0$ , на характер указанной кривой. На рис. 2 изображены зависимости коэффициента затухания колебаний от безразмерной комбинации  $\xi = V_{\text{упр}} \cdot T / (2R_{\text{ц}})$  для различных  $R_{\text{ц}}$ . В соответствии с формулой (8), максимума затухания следует ожидать при значениях  $\xi$ , близких к 1. Как видно из рисунка, функции  $p(\xi)$ , полученные

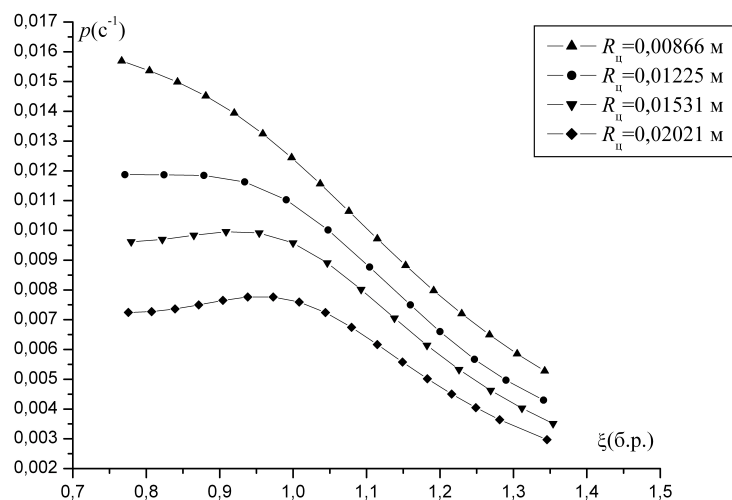


Рис. 2. Зависимость коэффициента затухания от безразмерного параметра  $\xi = V_{\text{упр}} \cdot T / 2R_{\text{ц}}$ ;  $G=0,0005$  Па,  $\tau = 17$  с

для радиусов  $R_{\text{ц}} = 0,00866$  м и  $0,01225$  м, монотонно убывают и, таким образом, не несут информации о модуле сдвига. Максимум коэффициента затухания выражен тем лучше, чем больше радиус цилиндра вискозиметра. Заметим, что величина, на которую возрастает коэффициент затухания при «резонансе» для  $R_{\text{ц}} = 0,02021$  м, достаточна для уверенной регистрации в экспериментах с крутильным вискозиметром, где относительная погрешность измерения коэффициента затухания может быть сделана порядка  $\sim 10^{-4}$ .

Таким образом, обнаруженные в рамках рассмотренной реологической модели «резонансные» эффекты позволяют идентифицировать жидкость с конвективной вязкоупругостью и дают возможность определить модуль сдвига по положению максимума коэффициента затухания на его зависимости от периода колебаний вискозиметра. При практической реализации метода период колебаний можно варьировать, изменяя крутильную жесткость нити подвеса, что легко достигается изменением ее длины.

### Литература

1. Апакашев Р.А., Павлов В.В. Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения// Механика жидкости и газа. – 1997. – № 1. – С. 3–7.
2. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 302 с.
3. Бартнев Г.М., Сандитов Д.С. Релаксационные процессы в стеклообразных системах. – Новосибирск: Наука, 1986. – 236 с.
4. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. – М.: Мир, 1988. – 537 с.
5. Коренченко А.Е., Бескачко В.П. Об определении вязкоупругих свойств жидкости из анализа колебаний крутильного вискозиметра// Труды XI Российской конференции «Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов». – Т. 2. Строение и свойства металлических расплавов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. – С. 126–130.
6. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

Поступила в редакцию 12 августа 2005 г.