

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

О.С. Садаков

Механика деформируемого твердого тела в значительной мере наследует тензорный аппарат механики жидкости, в которой преобладает подход Эйлера. Однако физические (механические) свойства твердых тел принципиально отличаются от свойств жидких необходимостью сопоставлять недеформированное и деформированное состояния. В рассмотрение должны включаться, кроме скорости изменения текущей конфигурации среды, и деформации (дисторсии), определяемые сопоставлением начальной, недеформированной, конфигурации и актуальной, деформированной. В статье сделана попытка на основе анализа скоростей изменения деформаций и поворотов элементарных объемов среды очертить минимально необходимый для этого круг тензоров, если не ограничиваться допущением о бесконечной малости смещений, поворотов и деформаций.

1. Известно, что решение задач деформирования твердых тел требует рассмотрения трех сторон механики:

- геометрической (анализ движения материальных частиц и волокон),
- статической или динамической (условия равновесия действующих на частицы сил, в том числе, сил инерции),
- «физической» (свойства материала).

В случае отказа от стесняющей иногда гипотезы о бесконечной малости смещений, поворотов и деформаций соответствующая система представлений существенно усложняется по сравнению с геометрически линейным подходом. Усложнение главным образом касается геометрической стороны. Статическая вполне решается на основе тензора напряжений Коши, практически без изменения наследуемого из геометрически линейного подхода – если мы не хотим проблем с выяснением смысла тензоров Пиолы–Кирхгофа. Модели деформационных свойств материала, также наследуемые, пока не вступают в противоречие с известными экспериментальными данными.

Конечно, процесс синтеза и численной реализации названных трех сторон механики, даже в случае обретения ясности в каждой из них в отдельности, поставит дополнительные непростые задачи (например, задачу разделения деформации на упругую и неупругую, когда и аддитивность, и мультипликативность выглядят весьма сомнительно; еще сложнее проблема вычисления изменений неупругой деформации за шаг по нагрузке). Пока, однако, судя по публикациям, недостает ясности даже в выборе и использовании базисного арсенала одной только геометрической стороны механики деформируемого тела. Удручает также унаследованное из механики сплошной среды стремление с первых шагов затруднить и без того трудный анализ введением косоугольного базиса, криволинейных координат и, вдобавок, использовать алгебраический тензорный аппарат, требующий для каждого нового построения непростого доказательства того, что оно действительно представляет тензорную величину. Если, однако, использовать определение тензора как суммы полиад, то результат обычных действий с тензорами представит инвариантную тензорную величину по определению.

2. При анализе кинематических соотношений мы опираемся на понятие абсолютного неподвижного пространства с неподвижной же системой отсчета, в которой каждая точка пространства идентифицируется уникальным радиус-вектором $X = X_k e_k$, $k=1..3$. Начало отсчета $X=0$ и базис $\{e_k\}$ мы выбираем сами. Пока не вынудят обстоятельства, будем использовать ортонормированный базис. Зная координаты вектора в одном базисе, нетрудно найти, при необходимости, его координаты и в любом другом. Привлекать криволинейные координаты нам не понадобится.

Кроме радиус-векторов (измеряемых в метрах) в пространстве рассматриваются и другие векторы с различной физической размерностью. При анализе кинематических соотношений нам понадобятся безразмерные величины и обратные секунды.

Любые два вектора пространства $\mathbf{a} = a_k \mathbf{e}_k$ и $\mathbf{b} = b_l \mathbf{e}_l$ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование; $k, l = 1..3$) могут образовать диаду $\mathbf{D} = \mathbf{ab} = a_k b_l \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$ – сумму девяти базисных диад $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$, умноженных на число $a_k b_l$ (это произведение соответствующих координат векторов). При умножении диады скалярно справа на вектор $\mathbf{c}$ получим вектор $\mathbf{a}$, умноженный на скалярное произведение $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, если слева – вектор $\mathbf{b}$, увеличенный в $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ раз. Диада $\mathbf{D}$ представляет простейший двухвалентный тензор, ранг матрицы координат которой $D_{kl} = a_k b_l$ равен единице. Суммируя диады, можно получить двухвалентные тензоры с матрицами второго и третьего ранга (последние матрицы и тензоры называются невырожденными). Тензор – это сумма произвольного числа диад (а в общем случае – полиад), которым можно придать (а можно и не придавать) координатный вид (вроде $\mathbf{ab} = a_k b_l \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$). Скаляры принято считать ноль-валентными тензорами, векторы – одновалентными. Ниже нам понадобится трехвалентный тензор – сумма произвольного числа триад.

3. Тензор может использоваться как оператор однородной линейной функции $\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}$ (как правило, аргумент в этом выражении будем располагать справа от тензора, хотя в общем случае это не обязательно). Такой тензор можно обозначать в виде «дроби» $\mathbf{T} \equiv \mathbf{y}/\mathbf{x}$ [1, 2], чтобы подчеркнуть роль данного оператора. Например, тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ может быть записан в виде $\boldsymbol{\sigma}/\mathbf{n}$, если вектор напряжения на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ обозначается как $\mathbf{p}$. Для этого потребуются предварительное доказательство линейности функции $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ (напомним, что оно связано с условиями равновесия в случае однородного напряженного состояния).

Можно отметить следующие свойства дроби:

$$\mathbf{a}/\mathbf{x} + \mathbf{b}/\mathbf{x} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/\mathbf{x}; \quad \lambda \mathbf{a}/(\lambda \mathbf{x}) = \mathbf{a}/\mathbf{x}; \quad (\mathbf{z}/\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y}/\mathbf{x}) = \mathbf{z}/\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}/\mathbf{x} = \mathbf{I}. \quad (1)$$

Здесь λ – скалярная величина (число), $\mathbf{I}$ – единичный тензор, или тензор тождественного преобразования ($\mathbf{I} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k$). Подчеркнем, что тензор, обозначенный дробью, связывает два множества векторов, а не два вектора, стоящие в числителе и в знаменателе. Последние являются лишь представителями этих множеств.

4. Однородным линейным оператором является, в частности, градиент $\mathbf{fV}$ функции $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ (правый), определяющий линейную связь между дифференциалами: $d\mathbf{y} = \mathbf{fV} \cdot d\mathbf{x}$. Поэтому правый градиент может быть записан в форме $\mathbf{fV} \equiv d\mathbf{y}/d\mathbf{x}$. Для записи левого градиента вектор-функции вектора придется использовать символ транспонирования $\nabla \mathbf{f} = (\mathbf{fV})^T = (d\mathbf{y}/d\mathbf{x})^T$.

Понятие градиента легко обобщается и на другие валентности тензоров. Например, скорость $\mathbf{v}$ тела представляет дробь $d\mathbf{u}/dt$ – градиент вектор-функции (смещения $\mathbf{u}$) скалярного аргумента (времени). Градиент скалярной функции двухвалентного тензора (например, один из скалярных инвариантов тензора) представляет двухвалентный тензор; оператор Гамильтона ∇ при этом двухвалентен.

5. В механике сплошной среды последняя моделируется как непрерывное множество материальных частиц (материальных точек) бесконечно малого объема, которые смещаются относительно точек $\mathbf{X}$ неподвижного пространства. При изучении кинематики деформируемого *твердого* тела анализируют три мгновенные конфигурации частиц:

- начальную, в момент времени $t = t_0$, принимаемую за недеформированную;
- текущую (актуальную) – в момент t ;
- бесконечно близкую по времени к последней – в момент $t + \delta t$ – для анализа скоростей (см. таблицу).

Движение отдельной частицы можно описать функцией $\mathbf{X}(t)$, где $\mathbf{X}$ – радиус-вектор той точки пространства, которую занимает рассматриваемая частица в рассматриваемый (актуальный) момент времени. Но при анализе движения

множества частиц приходится идентифицировать каждую из них. Для этого используют радиус-вектор той точки пространства, которую занимала частица в начальный момент времени; обозначим его $\mathbf{x} \equiv \mathbf{X}(t_0)$. Положение частицы в актуальный момент времени будем обозначать $\mathbf{r} \equiv \mathbf{X}(t)$ (см. таблицу). Это позволяет сокращать запись, описывая движение всего множества частиц в виде

Таблица

Три мгновения	t_0	t	$t + \delta t$
Судьба волокна	$\mathbf{l}_0$	$\mathbf{l}$	$\mathbf{l} + \delta \mathbf{l}$
Судьба материальной точки	$\mathbf{x}$	$\mathbf{r}$	$\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$
Судьба бесконечно малого волокна	$d\mathbf{x}$	$d\mathbf{r}$	$d\mathbf{r} + \delta(d\mathbf{r})$

функции $\mathbf{r}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ – в подходе Лагранжа. В подходе Эйлера, наоборот, аргументом является актуальное положение частицы: $\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, t)$.

6. Для анализа деформаций рассматривают так называемые материальные волокна – совокупности материальных точек, лежащих на некотором отрезке кривой. В случае *однородной* деформации, то есть когда тензоры деформации всех материальных объемов среды одинаковы, рассматривают прямые волокна; в процессе деформирования они переходят в прямые (а круговые и эллиптические – в эллиптические). При этом вся бесконечная совокупность прямых волокон AB , характеризуемая в момент t_0 одним вектором $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ (будем его обозначать $\mathbf{l}_0$), преобразуется к моменту t в совокупность отрезков *прямых* $A'B'$, характеризуемых также одним вектором $\mathbf{B}'-\mathbf{A}'\equiv\mathbf{l}$. Из однородности следует (это доказательство тоже, для краткости, опустим), что все множество волокон $\mathbf{l}_0$, различно ориентированных и имеющих различную длину, преобразуется в множество $\mathbf{l}$ по одному общему линейному закону $\mathbf{l}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{l}_0$. Название тензора $\mathbf{F}=\mathbf{l}/\mathbf{l}_0$ (на наш взгляд, центрального в анализе деформаций) не устоялось. Иногда его называют градиентом деформации (однако настоящий градиент деформации – тензор $\boldsymbol{\varepsilon}\nabla$ – представляет трехвалентный тензор, который практически не используется в расчетах); иногда градиентом места (смысл этого термина от нас ускользает). Поскольку тензор $\mathbf{F}$ характеризует и деформацию, и жесткий поворот элемента объема среды, мы его будем называть «дисторсия» – вместе с родственными ему тензорами $\mathbf{l}_0/\mathbf{l}$, $\Delta\mathbf{l}/\mathbf{l}_0$ и $\Delta\mathbf{l}/\mathbf{l}$ ($\Delta\mathbf{l}\equiv\mathbf{l}-\mathbf{l}_0$ – изменение вектора волокна). Зная $\mathbf{F}$, нетрудно найти три остальных тензора дисторсии. Подчеркнем: тензор дисторсии характеризует преобразование *каждого* из пучка волокон различного направления и разной длины.

7. Если тензор $\mathbf{F}$ симметричен, то его называют тензором коэффициентов длины, и он может быть представлен в главных осях (орты $\mathbf{c}_i$): $\mathbf{F}=k_i\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i=\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon}$. Тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ иногда называют инженерной или натуральной деформацией; $\varepsilon_i\equiv k_i-1$ – три главные деформации.

В случае жесткого (без деформации) поворота тензор $\mathbf{F}$ ортогонален. Это тензор, в частности, преобразует декартов базис $\{\mathbf{e}_k\}$ в другой декартов базис $\{\mathbf{e}'_k\}$; его часто обозначают $\mathbf{R}$. В координатной для тензора $\mathbf{T}$ форме ($\mathbf{T}\equiv T_k\mathbf{e}_k$, где $T_k\equiv\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_k$) этот тензор примет вид $\mathbf{R}=\mathbf{e}'_k\mathbf{e}_k$, или, в виде дроби, $\mathbf{R}=\mathbf{e}'/\mathbf{e}$ (мы учитываем произвольность базиса $\{\mathbf{e}_k\}$, то есть поворачиваются не только три вектора базиса, а любые, в частности, единичные, векторы). Определитель тензора поворота равен +1 (в отличие от не интересного для нас случая, когда поворот сочетается с зеркальным отражением и определитель тензора – также ортогонального – равен –1).

Если известны ось $\mathbf{n}$ и угол φ конечного поворота, то нетрудно получить следующее выражение:

$$\mathbf{R} = \mathbf{n}\mathbf{n} + (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n})\cos\varphi + \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}\cdot\sin\varphi. \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор Леви–Чивита, который мы определяем в левом декартовом базисе как сумму шести триад $\delta_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$, где δ_{ijk} – символы Веблена, равные 1 для четных перестановок индексов 1, 2, 3 и –1 для нечетных. В правом базисе знаки координат обратны. Тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$, как и любой тензор, инвариантен, то есть не зависит от базиса, хотя его координаты – как и у других тензоров – зависят от базиса. Смысл выражения (2): при умножении тензора $\mathbf{R}$ на «вектор волокна» $\mathbf{l}$ параллельная оси $\mathbf{n}$ составляющая вектора $\mathbf{l}$ не изменяется (первое слагаемое), а ортогональная – поворачивается на угол φ против часовой стрелки (если смотреть из конца вектора $\mathbf{n}$) и прибавляется к первому (второе и третье слагаемые). Естественно, длина волокна не изменяется, не изменяется и угол между любыми двумя волокнами при их одновременном повороте. Наоборот, имея тензор $\mathbf{R}$, нетрудно найти ось $\mathbf{n}$ и угол поворота φ – например, по результатам скалярной и векторной свертки тензора (сверткой называют сумму результатов скалярного или векторного перемножения диад, составляющих тензор). Как следует из выражения (2), первая ($\mathbf{R}_{\odot}$) равна $1+2\cos\varphi$, вторая ($\mathbf{R}_{\otimes}$) равна $-2\mathbf{n}\cdot\sin\varphi$. Из того же выражения следует, что транспонированием из $\mathbf{R}$ получается обратный тензор (поворот в обратную сторону вокруг той же оси): $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$.

8. Возможно отсутствие и деформации, и поворота ($\mathbf{F}=\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{R}=\mathbf{I}$) и, наконец, присутствие и деформации, и поворота. В последнем, самом общем, случае мы вольны считать, что $\mathbf{F}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$; при умножении $\mathbf{F}\cdot\mathbf{l}_0$ сначала происходит деформирование, затем жесткий поворот деформированного элемента объема. Если при первом движении поворачиваются все волокна, кроме главных, то при втором движении главные волокна (испытывающие экстремальные деформации) поворачиваются вместе с остальными. Тензор $\mathbf{U}$ называют правым тензором коэффициентов длины.

Можно также представить дисторсию в виде $F=V \cdot R$ (V – левый тензор коэффициентов длины – тензор деформирования *после* жесткого поворота). Тензоры U и V имеют одинаковые главные значения, но преобразованные тензором R главные (и не только главные) направления: $V=R \cdot U \cdot R^T$. Иногда говорят, что U и V – один и тот же тензор, только с различных точек зрения (например, [3]). Однако нам кажется очевидным, что растяжение вдвое по горизонтали или по вертикали – это две различные деформации (можно вспомнить, для примера, анизотропные среды).

Отметим, кстати, что деформация и поворот определяются одним тензором F , но имеют принципиально различную природу: если тензор деформации элементарного объема связан с напряжениями в этом объеме, то есть имеет локальную природу, то жесткий поворот имеет глобальную природу: он определяется деформациями всего множества соседних элементов.

Кроме названных, в литературе обсуждаются тензор Грина $(F^T \cdot F - I)/2$ и тензор Альманси $(I - F^{-1} \cdot F^{-T})/2$, связанные с квадратами деформаций. В наш минимум необходимых понятий они не входят. В вычислительных пакетах используют также тензор логарифмической деформации (тензор Генки) $e \equiv \ln U$, что делается, на наш взгляд, недостаточно корректно; ниже мы попытаемся это показать.

9. При анализе *неоднородного* деформированного состояния исследуют поле $r=f(x)$. Считают, что функция $f(x)$ дифференцируема. Это эквивалентно допущению об однородности деформации, то есть допущению, что в бесконечно малой окрестности любого аргумента функция является линейной. Бесконечно короткие прямые волокна, соединяющие частицы x и $x+dx$, при деформировании переходят в прямые волокна – между точками r и $r+dr$. Для краткости будем эти два состояния одного и того же волокна обозначать dx и dr . Названная линейность означает наличие функции $dr=A \cdot dx$, отражающей преобразование любых волокон данной окрестности из недеформированного состояния в деформированное. Нетрудно видеть, что тензор A представляет дисторсию $F=dr/dx$ и является правым градиентом $f \nabla$ поля $f(x)$. Зная F , можно найти тензор поворота R , тензор коэффициентов длины U и другие, с ними связанные, тензоры, характеризующие деформированное состояние в данной точке среды (в частности, тензор Генки e).

10. Наибольшие трудности возникают при анализе *скоростей* рассматриваемых тензоров. Скорость материальной частицы $v \equiv \dot{r} \equiv \delta r / \delta t$ в подходе Лагранжа определяется достаточно просто: поскольку $r=f(x, t)$, то $\delta r = f(x, t+\delta t) - f(x, t)$, откуда $v = \partial f / \partial t = df/dt$. Полученное поле неудобно тем, что его трудно анализировать: зависимость $v(x, t)$ показывает актуальную скорость частиц как функцию точек пространства, которые эти частицы уже покинули. Однако, если вместо x в эту зависимость подставить его выражение через актуальное положение частицы $x=\varphi(r, t)$, то получим более полезную информацию: поле $v(r, t)$ – актуальное поле скоростей в актуальных координатах.

11. Для анализа деформаций более важна скорость изменения *волокон*. В случае однородного деформирования скорость $\dot{l} \equiv \delta l / \delta t$ волокна $l=B \cdot A$ представляет разность между скоростями концов волокна $B^* - A^*$. Если эти две скорости одинаковы, то вектор l не изменяется во времени.

Если изменение волокна δl направлено вдоль l , то происходит деформирование волокна без поворота. При этом удобно ввести понятие линейной деформации $\varepsilon = (l-l_0)/l_0$ (l, l_0 – длины волокна в два момента времени) и логарифмической линейной деформации $e = \ln(l/l_0)$. Отношение скорости удлинения волокна $\dot{l} \equiv \delta l / \delta t$ к *актуальной* длине представляет скорость линейной логарифмической деформации $e^* \equiv \dot{l}/l$ (при этом $\dot{l} = l e^*$).

Если изменение δl ортогонально l , то длина волокна не изменяется, но происходит его элементарный поворот с угловой скоростью $w = l \times \dot{l} / l^2$ (в числителе стоит векторное произведение двух векторов). В общем случае происходят и удлинение, и поворот; можно получить выражения

$$e^* = (l \cdot \dot{l}) / l^2; \quad w = (l \times \dot{l}) / l^2. \quad (3)$$

Отметим, что по скорости e^* нетрудно найти и скорость деформации ε^* :

$$\varepsilon^* = (l/l_0 - 1)^* = \dot{l}/l_0 = (\dot{l}/l)(l/l_0) = e^*(\varepsilon + 1) \equiv e^*k \quad (4)$$

(k – коэффициент длины – скалярный аналог тензора дисторсии для случая линейной деформации).

12. Для описания скорости *набора* волокон, которые вначале характеризовались векторами l_0 , а в актуальный момент времени – векторами l , следует обратиться к тензору дисторсии $F=l/l_0$. Линейность дроби относительно числителя (см. выражения (1)) позволяет записать

$$F^{\bullet} \equiv \delta F / \delta t = (F(t + \delta t) - F(t)) / \delta t = ((I + \delta I) / I_0 - I / I_0) / \delta t = \dot{I} / I_0. \quad (5)$$

Скорость дисторсии $F^{\bullet}$ вполне корректно интегрируется на интервале от t_0 до t :

$$F = I / I_0 = \int (\dot{I} / I_0) \delta t + I_0 / I_0 = \int F^{\bullet} \delta t + I. \quad (6)$$

Начальное значение тензора F есть, очевидно, I .

13. В случае *неоднородного* деформированного состояния волокна I и I_0 предыдущего выражения следует заменить на малые dr и dx . Скорость дисторсии связана с полем скоростей частиц $v(x, t)$. Нетрудно найти, что

$$(dr)^{\bullet} = v(x + dx, t) - v(x, t) = v \nabla_x \cdot dx \equiv (\partial v / \partial x) \cdot dx, \quad (7)$$

то есть роль скорости дисторсии $F^{\bullet} = \dot{I} / I_0 = (dr)^{\bullet} / dx$ здесь играет градиент поля скоростей

$$F^{\bullet} = v \nabla_x \equiv \partial v / \partial x = F^{\bullet}(x, t). \quad (8)$$

Индекс при символе Гамильтона подчеркивает, что аргументом поля скоростей здесь является начальное положение точек x .

14. Выражение (7) представляет актуальную скорость изменения волокна, которое в начальный момент занимало положение dx . Анализировать поле $\partial v / \partial x$ весьма неудобно: частицы, о которых информирует поле (8), находятся уже в других точках пространства и волокна, дисторсия которых анализируется, занимают другие (актуальные) положения.

Поэтому, как выше отмечалось, более популярно поле скоростей в актуальных координатах $v(r, t)$. С его помощью выражение для актуальной скорости актуального волокна получается аналогично (7):

$$(dr)^{\bullet} = v(r + dr, t) - v(r, t) = v \nabla_r \cdot dr \equiv (\partial v / \partial r) \cdot dr \equiv L \cdot dr. \quad (9)$$

Тензор $L \equiv \partial v / \partial r \equiv v \nabla_r$ (градиент поля скоростей частиц на множестве r) в случае однородной деформации представляет отношение $\dot{I} / I$. Он характеризует *деформацию деформированного состояния* – в отличие от обычно принятого сопоставления деформированного и недеформированного состояний – и играет важную роль в механике жидкости. На рис. 1 дана иллюстрация выражения (9); здесь для удобства штриховыми линиями еще раз показаны векторы $v(r)$ и dr (напомним, что вектор не имеет точки приложения, это лишь величина и направление).

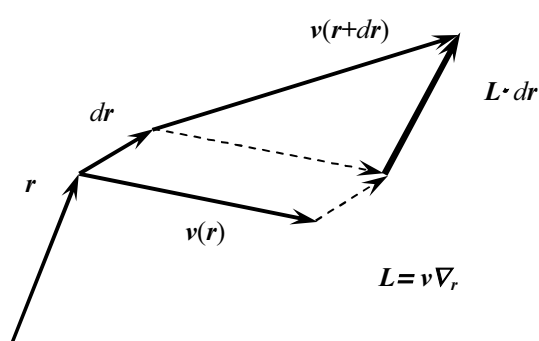


Рис. 1. Скорость изменения волокна

Из свойств дроби (1) с отчетливостью следует выражение для $F^{\bullet}$, содержащее «эйлеров» тензор L :

$$F^{\bullet} = (I / I_0)^{\bullet} = \dot{I} / I_0 = \dot{I} / I \cdot I / I_0 = L \cdot F. \quad (10)$$

Выражение $\dot{I} = L \cdot I$ напоминает выражение для скорости линейной логарифмической деформации $\dot{I} = e \cdot I$. Однако тензор L в общем случае несимметричен и не может играть роль скорости деформации.

Его раскладывают на симметричную и кососимметричную составляющие $S = (L + L^T) / 2$ и $W = (L - L^T) / 2$ (заметим, что такая операция лишена смысла в отношении тензора $F^{\bullet} = \dot{I} / I_0$). Эти тензоры, еще со времен Гельмгольца, называют скоростью деформации (по упомянутой аналогии – логарифмической) и скоростью поворота (например, [3]). Однако их интегрирование по времени, как станет яснее ниже, не дает ни деформации, ни поворота; видимо, эти названия не следует понимать буквально.

15. Диагональный элемент матрицы тензора S (и тензора L) представляет проекцию

$$S \cdot ii = L \cdot ii = S_{ii} = L_{ii} \quad (11)$$

(при двойном скалярном умножении тензора на симметричный тензор кососимметричная часть первого обнуляется). Вектор i здесь представляет орт некоторого выбранного направления. Произведение $L \cdot i$, как следует из смысла тензора L , представляет $i^{\bullet}$ – скорость изменения единичного волокна, ориентированного в данном направлении. Второе умножение на i дает проекцию вектора скорости $i^{\bullet}$ на ось i (рис. 2) – L_{ii} – скорость удлинения «волокна i » (в отличие от иллюстрации, все изменения волокон i и j здесь бесконечно малы, поскольку речь идет о скоростях, а не о конечных приращениях).

Боковой элемент матрицы тензора $\mathbf{S}$ представляет половину суммы $L_{ij} + L_{ji}$ ($\mathbf{j}$ – единичный вектор, ортогональный $\mathbf{i}$):

$$L_{ij} + L_{ji} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{i}) = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{i}) = 2S_{ij}; \quad (12)$$

нетрудно видеть (рис. 2), что это – скорость уменьшения угла между волокнами, ориентированными в актуальный момент по направлениям $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$.

16. Выражения (11) и (12) помогают понять смысл интеграла $\mathbf{H} \equiv \int \mathbf{L} \, \delta t$ за предысторию – от t_0 до t . Этот смысл зависит от рассматриваемой ситуации.

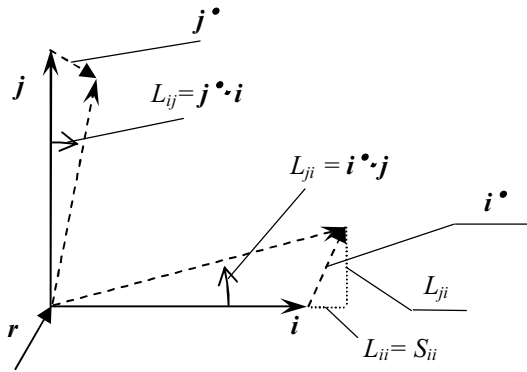


Рис. 2. Скорости удлинения единичного волокна S_{ii} и уменьшения прямого угла $L_{ij} + L_{ji}$

Ситуация 1 (простейшая): пусть во все моменты предыстории

- тензор $\mathbf{L}$ симметричен ($\mathbf{W} = \mathbf{0}$);
- ось $\mathbf{i}$ является главной.

Тогда диагональный элемент интеграла H_{ii} , как нетрудно видеть, представляет величину

$$H_{ii} = \int l_i \cdot l_i \delta t = e_i = \ln(1 + \varepsilon_i), \quad (13)$$

где l_i , $l_i \cdot$ – длина волокна, направленного вдоль орта $\mathbf{i}$ и скорость его удлинения; e_i , ε_i – главные значения логарифмической и инженерной деформации, отвечающие этому направлению. Названная ситуация возникает, в частности, в случае плоского напряженного состояния или плоской деформации (в последнем случае $e_i = 0$).

Если $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ и все три главные оси неподвижны, то интеграл $\mathbf{H}$ представляет тензор Генки $\mathbf{e} = \ln(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \ln \mathbf{U} = \ln \mathbf{V}$.

Ситуация 2 (общая): направление $\mathbf{i}$ не является во все моменты предыстории главным, в частности, происходит жесткий поворот ($\mathbf{W} \neq \mathbf{0}$). Волокна в окрестности этого направления поворачиваются, и величина H_{ii} представляет интеграл скоростей относительных удлинений (l/l) всех волокон, которые в разное время проходили через направление $\mathbf{i}$. Похожая картина наблюдается и в отношении бокового компонента H_{ij} матрицы тензора $\mathbf{H}$. Можно утверждать, что всегда, когда H_{ij} не равен нулю, он представляет интеграл скоростей сдвига различных пар волокон, которые разное время оказывались на осях $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, поскольку само наличие сдвига означает смену на этой паре направлений одних волокон другими.

16. Если градиент $\mathbf{L}$ кососимметричен ($\mathbf{S} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L} = \mathbf{W}$), то скорость деформации действительно равна нулю (хоть $\mathbf{S}$ и не является скоростью деформации); в данный момент происходит жесткий поворот элемента объема. Для его рассмотрения удобно вернуться к однородному деформированному состоянию.

Напомним, что бесконечно малое изменение вектора $\mathbf{l}$ при его повороте на угол $\delta\alpha$ вокруг оси $\mathbf{a}$ (орт) определяется вектором

$$\delta \mathbf{l} = \delta\alpha \mathbf{a} \times \mathbf{l}, \quad (14)$$

а конечный поворот – ортогональным тензором $\mathbf{R} = \mathbf{e}'_k \mathbf{e}_k$, имеющим структуру (2). Таким образом, как бесконечно малый поворот, так и конечный поворот характеризуются тремя скалярными величинами, но принципиально различно. Результат ряда бесконечно малых поворотов получается суммированием соответствующих векторов, тогда как результат ряда конечных поворотов – произведением соответствующих ортогональных тензоров (дающим ортогональный тензор).

С этим связан еще один аспект. Известно, что сумма бесконечного числа бесконечно малых величин не всегда представляет конечную величину. Это мы и наблюдаем, в частности, при анализе вращения. Скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$ и бесконечно малый угол поворота $\boldsymbol{\omega} \delta t$ представляют векторные величины. Соответственно, результат суммирования любого числа таких поворотов, в том числе и интеграл $\int \boldsymbol{\omega} \delta t$ является вектором. Если ось вращения $\mathbf{n}$ неподвижна (например, при вращении вала), то названный интеграл $\mathbf{n}\phi$ представит ось и конечный поворот вала. Но в общем случае ось вращения переменна и названный интеграл, даже если он конечен, не характеризует ни ось, ни угол поворота. Последние характеризуются тензором (2).

17. Итак, элементарный поворот (и, соответственно, скорость вращения) отображается вектором. Конечный поворот также можно (формально) запоминать в виде «вектора» $n\varphi$ (ось и угол), однако главное свойство вектора – умение складываться с себе подобным – у этого «вектора» отсутствует. Для получения *тензора* конечного поворота R следует интегрировать скорость этого тензора ($R^\bullet$), которая, естественно, представляет тензор.

Дифференцируя по времени выражение (2), можно без труда выразить $R^\bullet$ через скорости $n^\bullet$ и $\varphi^\bullet$, что даст нам громоздкое и почти бесполезное выражение, поскольку при решении практических задач параметры $n^\bullet$ и $\varphi^\bullet$ отыскивать оказывается еще труднее. Удобнее использовать другой путь.

Пусть тензор $R = e'_k e_k$ изменяется за интервал времени δt (происходит дополнительный к текущему жесткий поворот). Исходный базис e_k мы имеем право считать при этом неизменным. Тогда в представлении тензора в виде суммы трех диад $e'_k e_k$ будут изменяться только три вектора e'_k – на бесконечно малую величину $\delta e'_k = e'_k(t + \delta t) - e'_k(t)$. Если известна текущая (мгновенная) скорость вращения $w = (\delta\alpha/\delta t)a$, то для определения $\delta e'_k$ можно использовать выражение (14): $\delta e'_k = a\delta\alpha \times e'_k$. Отсюда:

$$\delta R = \delta e'_k e_k = a\delta\alpha \times e'_k e_k = w \times R \delta t \quad (15)$$

и

$$R^\bullet = w \times R. \quad (16)$$

Векторное произведение всегда может быть заменено скалярным – через упомянутый выше тензор Леви–Чивита:

$$a \times b \equiv ab \cdot \mathcal{E} \equiv a \cdot \mathcal{E} \cdot b \equiv \mathcal{E} \cdot ab. \quad (17)$$

Соответственно, $w \times R \equiv w \cdot \mathcal{E} \cdot R$. Сопоставив выражения $I^\bullet = L \cdot \mathcal{E} = W \cdot \mathcal{E}$ и, из определения (14), $I^\bullet = w \times I = w \cdot \mathcal{E} \cdot I$, найдем, что кососимметричный тензор W представляет произведение $w \cdot \mathcal{E}$. Векторная свертка тензора $\mathcal{E}$, как нетрудно убедиться прямым подсчетом, равна $-2I$, откуда следует, что векторная свертка тензора W (она же векторная свертка градиента скорости L) определяет вектор угловой скорости:

$$W_\otimes = L_\otimes = w \cdot \mathcal{E}_\otimes = w \cdot (-2I),$$

откуда

$$w = -L_\otimes/2 = -(v \times \nabla_r)/2 = (\nabla_r \times v)/2. \quad (18)$$

Таким образом, скорость (16) изменения тензора, характеризующего жесткий поворот малой окрестности произвольной точки тела, *не совпадает* с тензором W . Последний связан с полем скоростей в актуальный момент и поставляет лишь «вихрь» – вектор w , входящий в выражение (16). Необходимость присутствия в этом выражении тензора R (характеризующего текущее состояние), по-видимому, объясняется тем, что изменение тензора, связывающего новое положение волокна с начальным (напомним, что R входит сомножителем в тензор дисторсии $F = I/I_0$), не может зависеть только от актуального элементарного поворота; сюда должен входить и накопленный к данному моменту поворот. Мы ищем, *насколько* изменяется объект, показывающий, *во сколько раз* искажается начальное волокно.

18. Полезно иметь в виду, что четырехвалентный тензор $\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}$ при двукратном скалярном умножении на произвольный двухвалентный тензор обнуляет симметричную часть последнего: $(\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}) \cdot T = T^T - T$. Это позволяет придать выражению (16) другой вид:

$$R^\bullet = w \times R = (-R^T \times w)^T = (R^T \times L_\otimes/2)^T = (R^T \cdot \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} \cdot L)^T/2 = -(R^T \cdot W)^T = -(W^T \cdot R) = W \cdot R. \quad (19)$$

Это выражение по структуре (и идеологически) напоминает выражение (10) и, более простое, – последнее из выражений (4).

В общем случае несимметричного градиента скорости $L = S + W$ скорость вращения определяется теми же выражениями, поскольку для бесконечно малых смещений (и, следовательно, скоростей) справедливо разложение на сумму: $I^\bullet = I_s^\bullet + I_w^\bullet = S \cdot I + W \cdot I$. Вихрь по-прежнему определяется формулой $w = -W_\otimes/2 = -L_\otimes/2$, поскольку векторная свертка симметричного тензора равна нулю.

Умея вычислять скорость поворота (16), (19), нетрудно получить и выражение для скорости деформации $\mathcal{E}^\bullet$. Продифференцировав по времени произведение $F = R \cdot U$, получим

$$F^\bullet = R^\bullet \cdot U + R \cdot U^\bullet,$$

откуда

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{R}^T (\dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{U}). \quad (20)$$

19. Высказанные выше сомнения в отношении интегрирования тензора $\mathbf{L}$ заставляют нас вернуться к подходу Лагранжа (выражение (6)). Зная $\mathbf{F}^\bullet$, трудно сказать, как изменяется, и изменяется ли вообще, тензор $\mathbf{R}$ или тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$, но интеграл (6) дает актуальное значение $\mathbf{F}$. Выражение (10) показывает, что и тензор $\mathbf{L}$ может сыграть при интегрировании свою роль.

Зная $\mathbf{F}$, можно найти все интересующие нас тензоры, например, $\mathbf{R}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, а также и тензор логарифмической деформации $\mathbf{e} \equiv \ln \mathbf{U}$ (или, при желании, $\ln \mathbf{V}$).

Добавим, что при решении начальных и краевых задач для *неупругих* тел тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, в отличие от тензора $\mathbf{F}$, не входит в число параметров состояния [4, 5].

20. Основные выводы

1. Симметричная часть тензора $\mathbf{L}$, используемая в некоторых конечно-элементных оболочках в качестве скорости деформации, дает при интегрировании тензор Генки лишь в исключительных случаях. В общем случае компоненты этого интеграла не характеризуют ни деформации какого-либо волокна, ни какого-либо сдвига.

2. Диагональный элемент тензора Генки не характеризует линейной деформации какого-либо волокна [2] – кроме случая, когда все боковые равны нулю.

3. Боковые элементы матрицы тензора Генки не характеризуют сдвига – кроме случая, когда все они равны нулю.

4. Выражения для скорости деформации и скорости жесткого поворота слишком громоздки для практического использования. Проще интегрировать скорость дисторсии. Зная дисторсию, нетрудно найти все остальные тензоры (в том числе, и тензор Генки). Поскольку в геометрически нелинейный расчет безусловно входят смещения, а тензор $\mathbf{F}$ представляет их градиент (то есть линейно связан со смещениями), он находится без труда.

Литература

1. Садаков О.С. Символическое «деление» векторов в механике сплошной среды// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып. 5. – № 2(42). – С. 115–118.
2. Буслаева О.С., Садаков О.С., Шапиро А.А. Скаляр и тензор логарифмической деформации// Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2003. – № 3(33). – С. 125–129.
3. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Finite Elements for Nonlinear Continua and Structures. McCormick School of Engineering and Applied Science Northwestern University Evanston, IL 60208 copyright 1996. Published by Wiley.
4. Волков С. А., Садаков О.С. К учету геометрической нелинейности в расчетах неупругого деформирования конструкций. Сообщение 1: Напряженно-деформированное состояние тела// Динамика, прочность и износостойкость машин (Международный журнал на электронных носителях). – Челябинск–Москва. – 2000. – Вып. 6. – С. 99–106.
5. Садаков О.С. К расчетам напряженно-деформированного состояния конструкций в геометрически нелинейной постановке// Труды Международной конференции «Снежинск и наука – 2003. Современные проблемы атомной науки и техники». – Снежинск: СГФТА, 2003. – С.73–74.

Поступила в редакцию 9 сентября 2005 г.