УДК 514.743

ТЕНЗОРНАЯ ДРОБЬ КАК ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ТЕНЗОРНОЙ ФУНКЦИИ

О.С. Садаков

Известно, что тензорная алгебра – это алгебра сложений и умножений. Однако в выкладках бывает удобно использовать символическое деление. Вместо «слепого» обозначения тензора можно использовать функциональное, в явном виде показывающее роль данного тензора как оператора некоторой линейной функции. Он может быть представлен в виде дроби, знаменатель которой обозначает область аргументов, а числитель – область функций [1]. В частности, похожее обозначение по умолчанию используют для градиента тензорной функции, однако оно не всегда однозначно. Ниже делается попытка обосновать более строгое обозначение, расширяющее, в частности, роль оператора дифференцирования Гамильтона.

1. Любой тензор $\boldsymbol{T}$ может рассматриваться как оператор однородной линейной функции

$$\boldsymbol{У} = \boldsymbol{T} * \boldsymbol{X}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{У}$ – тензор-аргумент и тензор-функция, символ «*» означает n-кратное скалярное произведение, если n – валентность тензора $\boldsymbol{X}$ – больше нуля, иначе «*» означает тензорное произведение (обычное умножение тензора на число).

Иногда удобно применить функциональное обозначение тензора $\boldsymbol{T}$ – в виде «дроби»

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{У}/\boldsymbol{X}, \tag{2}$$

что позволяет обратить основное внимание на роль этого тензора в преобразовании (1). Например, тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ может быть записан в виде $\boldsymbol{p}/\boldsymbol{n}$, если вектор напряжения на площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$ обозначается как $\boldsymbol{p}$. Заметим, что существование тензора $\boldsymbol{p}/\boldsymbol{n}$ следует доказать (существование такой линейной функции следует из условий равновесия части тела, находящейся в однородном напряженном состоянии). С другой стороны, для тензора так называемой инженерной деформации мы при использовании символической записи получаем относительно привычное для инженера выражение $\Delta\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}$. Существование этого линейного оператора легко доказывается из анализа однородного деформированного состояния (а в более актуальном случае неоднородного состояния – из допущения о дифференцируемости поля смещений).

В приведенных частных примерах дробь – это двухвалентный тензор, определяющий вектор-функцию векторного аргумента и, соответственно, в выражении вида (1) символ «*» означает однократное скалярное произведение «·».

Удобство предлагаемого обозначения связано с его довольно очевидными и простыми свойствами. Например, для вектор-функции векторного аргумента справедливы выражения [2]:

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I}$$

($\boldsymbol{I}$ – единичный тензор, или тензор тождественного преобразования),

$$(\boldsymbol{z}/\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}/\boldsymbol{x}$$

(произведение операторов). Отсюда, в частности, следует, что $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y} = \boldsymbol{I}$, эти тензоры взаимно обратны. Кроме того,

$$(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y})/\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}/\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}/\boldsymbol{x};$$

скаляры в числителе и в знаменателе сокращаются:

$$6\boldsymbol{y}/(2\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x};$$

справедливо и такое выражение ($\boldsymbol{T}$ – некоторый тензор):

$$\boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{y})/\boldsymbol{x}.$$

2. Однородным линейным оператором является, в частности, градиент тензор-функции тензорного аргумента $\boldsymbol{У}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$. Если функция дифференцируема, то в малой окрестности любого аргумента $\boldsymbol{X}_0$ она может быть аппроксимирована в виде линейной

$$\boldsymbol{У} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0) + \boldsymbol{F} * (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0) \tag{3}$$

(символ «*» имеет прежний смысл, зависящий от валентности аргумента $\boldsymbol{X}$). Изменение $\Delta\boldsymbol{У} \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{f}(X_0)$ связано в выражении (3) с изменением аргумента $\Delta\boldsymbol{X}\equiv\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0$ постоянным тензором $\boldsymbol{F}$. Последний, следовательно, может быть обозначен как $\Delta\boldsymbol{У}/\Delta\boldsymbol{X}$. С уменьшением рассматриваемой окрестности (уменьшением $\Delta\boldsymbol{X}$) гладкая функция все меньше отличается от аппроксимации (3). В пределе бесконечно малая разность (дифференциал $d\boldsymbol{У}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0 + d\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0)$) окажется связанной с дифференциалом $d\boldsymbol{X}$ также линейно; соответствующий аппроксимирующий тензор $\boldsymbol{F}$ обозначают $\boldsymbol{f\nabla}$ и называют правым градиентом:

$$d\boldsymbol{У} = \boldsymbol{f\nabla}*d\boldsymbol{X}. \tag{4}$$

Смысл символа «*» остается прежним; валентность градиента $\boldsymbol{f\nabla}$ на n больше, чем валентность тензора $\boldsymbol{У}$. Соответственно, валентность символического оператора Гамильтона $\boldsymbol{\nabla}$ равна валентности аргумента (n). Сам градиент, в соответствии с п. 1, может быть записан в форме (2):

$$\boldsymbol{f\nabla} \equiv d\boldsymbol{У}/d\boldsymbol{X}. \tag{5}$$

3. При вычислении градиента заданной функции можно воспользоваться координатной формой записи. Известно, что градиент функции векторного аргумента может быть определен в косоугольном базисе $\boldsymbol{e}_k$ и взаимном ему базисе $\boldsymbol{e}^i$ (напомним, что $\boldsymbol{e}^i\cdot \boldsymbol{e}_k=\delta_{ik}$ – символ Кронекера) из следующей цепочки выражений:

$$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f\nabla}\cdot d\boldsymbol{x} = (\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x}^i)dx^i = (\partial \boldsymbol{f}/\partial x^i\, \boldsymbol{e}^i)\cdot (\boldsymbol{e}_k\partial x^k),$$

откуда, учитывая, что $d\boldsymbol{x}= \boldsymbol{e}_k\partial x^k$, получим

$$\boldsymbol{f\nabla} = (\partial \boldsymbol{f}/\partial x^i)\, \boldsymbol{e}^i. \tag{6}$$

Валентность $\boldsymbol{f}$ произвольна.

Аналогичный путь прослеживается и для функции двухвалентного тензора

$$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f\nabla}\cdot\cdot d\boldsymbol{X} = (\partial \boldsymbol{f}/\partial X^{kl})\, dX^{kl}=(\partial \boldsymbol{f}/\partial X^{kl})\, \boldsymbol{e}^l\boldsymbol{e}^k\cdot\cdot\, dX^{ij}\, \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

(точки означают двукратное скалярное произведение; при этом первыми перемножаются векторы $\boldsymbol{e}^k$ и $\boldsymbol{e}_i$, затем $\boldsymbol{e}^l$ и $\boldsymbol{e}_j$, что дает символы δ_{ki} и δ_{lj}, превращающие dX^{ij} в dX^{kl}); в итоге получаем

$$\boldsymbol{f\nabla} \equiv d\boldsymbol{f}/d\boldsymbol{X} = (\partial \boldsymbol{f}/\partial X^{kl})\, \boldsymbol{e}^l\boldsymbol{e}^k. \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что порядок индексов в производной и в базисном сопровождении обратны. Возможно, с этим связано то, что в работе [3] для получения дифференциала скалярной функции двухвалентного тензора градиент функции умножается на транспонированный дифференциал аргумента $d\boldsymbol{X}^T$. Такая запись не ведет к ошибке, поскольку и градиент функции там определяется иначе, но в упомянутой работе рассматривается только случай двухвалентного аргумента. В нашей работе валентность произвольна.

Результат (7) с очевидностью обобщается на произвольную валентность аргумента (и, соответственно, валентность оператора Гамильтона):

$$d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f\nabla}*d\boldsymbol{X}\,, \quad \boldsymbol{f\nabla} = (\partial \boldsymbol{f}/\partial X^{ij\ldots kl}) * \boldsymbol{e}^l\boldsymbol{e}^k\ldots\, \boldsymbol{e}^j\boldsymbol{e}^i\,. \tag{8}$$

Если валентность аргумента равна нулю, то градиент $\boldsymbol{f\nabla}$ превращается в обычную производную $d\boldsymbol{Y}/dx$. Например, скорость тела $\boldsymbol{v} \equiv d\boldsymbol{u}/dt$ ($\boldsymbol{u}$ – смещение, t – время) можно рассматривать как оператор линейной связи между элементарными приращениями смещения и времени.

4. Пусть, например, $f=\boldsymbol{X}\cdot\cdot\boldsymbol{X}$ – скалярная функция (один из скалярных инвариантов тензора $\boldsymbol{X}$), аргумент которой – двухвалентный тензор. В декартовом базисе ($\boldsymbol{e}^i=\boldsymbol{e}_i$)

$$f = X_{kl}\, X_{lk} = X_{11}\, X_{11}+ X_{12}\, X_{21}+ X_{21}\, X_{12}+ \ldots+X_{33}\, X_{33}.$$

Частные производные находятся легко: $\partial f /\partial X_{kl}=2X_{lk}$, откуда

$$f\boldsymbol{\nabla} = 2X_{lk}\, \boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_k=2\boldsymbol{X}. \tag{9}$$

Для функции $f_1=\boldsymbol{X}\cdot\cdot\boldsymbol{X}^T$, из подобных выкладок, найдем, что $f_1\boldsymbol{\nabla}=2\boldsymbol{X}^T$.

5. Кубический инвариант $\varphi=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}\cdot\cdot\boldsymbol{X}$ в декартовом базисе представляет сумму 27 слагаемых $\varphi = X_{ij}\, X_{jk}\, X_{ki}$. Дифференцируя обычным образом, найдем

$$\partial \varphi /\partial X_{11} =3X_{1i}\, X_{i1}\,, \qquad \partial \varphi /\partial X_{12} =3X_{1i}\, X_{i2}$$

и еще семь аналогичных выражений. По формуле (8) отсюда следует

$$\partial \varphi /\partial \boldsymbol{X} = 3\, \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}\,. \tag{10}$$

Для кубического инварианта $\varphi_1= \boldsymbol{X}^T\cdot\boldsymbol{X}^T\cdot\cdot\boldsymbol{X}^T$ найдем $\varphi_1=X_{ji}\, X_{kj}\, X_{ik} =X_{ik}\, X_{kj}\, X_{ji} = \varphi$, и его градиент определяется тем же выражением (10).

Еще один вариант для кубического инварианта тензора: $\varphi_2=\boldsymbol{X} \cdot\boldsymbol{X}^T\cdot\cdot\boldsymbol{X} = X_{ik}\, X_{jk}\, X_{ji}= X_{ji}\, X_{ik}\, X_{jk} = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}\cdot\cdot\boldsymbol{X}^T$ (а также, в чем нетрудно убедиться, $\varphi_2 = \boldsymbol{X}^T\cdot\boldsymbol{X} \cdot\cdot\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{X} \cdot\boldsymbol{X}^T\cdot\cdot\boldsymbol{X}^T =\boldsymbol{X}^T \cdot\boldsymbol{X}^T\cdot\cdot\boldsymbol{X}$). Градиент этой функции оказывается отличным от $\varphi\boldsymbol{\nabla}$:

$$\partial \varphi_2 / \partial \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}^T + \boldsymbol{X}^T\cdot\boldsymbol{X}. \qquad (11)$$

6. Вместо дифференцирования по координатам, можно использовать инвариантные выражения, например, дифференцирование произведения в виде суммы производных. В частности,

$$f\boldsymbol{\nabla}=(\boldsymbol{X}\cdot\cdot\boldsymbol{X})\boldsymbol{\nabla} = 2\,(\boldsymbol{X}\cdot\cdot(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\nabla})). \qquad (12)$$

Для расшифровки этого выражения нужен градиент двухвалентной функции двухвалентного аргумента. Его находим по прежней схеме (8):

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{X} = X_{ij}\, \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,$$

$$\boldsymbol{f}\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\nabla} = (\partial \boldsymbol{f}/\partial X_{ij})\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i. \qquad (13)$$

Получившийся тензор представляет тензор тождественного преобразования для двукратного скалярного произведения:

$$\boldsymbol{T}\cdot\cdot\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i = T_{mn\ldots kl}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_{n\ldots}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\cdot\cdot\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i = T_{mn\ldots kl}\delta_{li}\delta_{kj}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i = T_{mn\ldots ji}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_{n\ldots}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{T}. \qquad (14)$$

Из выражения (12) находим: $f\boldsymbol{\nabla} = 2\boldsymbol{X}\cdot\cdot\, \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i = 2\boldsymbol{X}$, что, естественно, совпадает с прежним результатом (9).

7. В заключение напомним еще раз, что «операция деления» (например, дробь $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}$) не представляет результата деления двух векторов; это лишь удобное функциональное обозначение тензора, если мы хотим подчеркнуть его роль в качестве линейного оператора (аргумент – функция). Удобство состоит в простоте и очевидности выкладок (см. п. 1), что может оказаться немаловажным, например, при проведении подготовительной работы в механике сплошной среды. В настоящей работе это качество дроби использовано для корректной записи производных тензорных (в частности, скалярных и векторных) функций тензорного аргумента. Подобная запись встречается в технической литературе в неопределенном виде (например, $\partial y_i/\partial x^k$), не отличающем правый и левый градиент, что, на наш взгляд, не только вредит строгости языка, но и может приводить к ошибкам. В статье представлено естественное обобщение предложенного ранее обозначения «дробь» на операторы дифференцирования, исключающее неоднозначность.

Литература

1. Буслаева О.С., Садаков О.С., Шапиро А.А. Скаляр и тензор логарифмической деформации// Научно-технические ведомости СПбГТУ. – 2003. – № 3 (33). – С. 125–129.

2. Садаков О.С. Символическое «деление» векторов в механике сплошной среды// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». – 2005. – Вып.5. – № 2(42). – С. 115–118.

3. Роговой А.А. Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента/ Вестник ПГТУ «Динамика и прочность машин». – Пермь, 2001. – № 2. – С. 83–90.

Поступила в редакцию 9 сентября 2005 г.