УДК 517.956.35 DOI: 10.14529/mmph230201

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

***О.Л. Бозиев*[1,2]**

[1] *Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Российская Федерация*
[2] *Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Российская Федерация*
E-mail: boziev@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается вторая начально-краевая задача с однородными граничными условиями для одномерного модифицированного уравнения теплопроводности. Модификация состоит в замене коэффициента температуропроводности интегральной нагрузкой. В работе она имеет вид степенной функции от интеграла квадрата модуля производной решения уравнения по пространственной переменной. Уравнения с подобной нагрузкой ассоциированы с некоторыми практически важными параболическими уравнениями со степенной нелинейностью в главной части. Это позволяет использовать решения нагруженных задач для начала процесса последовательного приближения к решениям редуцируемых к ним нелинейных задач. В этом случае по отношению к исходному нелинейному уравнению нагруженное уравнение содержит ослабленную нелинейность. Линеаризация нагруженного уравнения позволяет найти его приближенное решение. В рассматриваемых в работе трех случаях интегральная нагрузка представляет собой квадрат нормы производной решения по x в пространстве L_2 в натуральной, обратной к натуральной и целой отрицательной степенях. Установлены соответствующие априорные неравенства, правая часть которых используется для перехода к линеаризованным уравнениям. Приводятся примеры линеаризации данным способом уравнений теплопроводности с интегральной нагрузкой в главной части.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности; интегральная нагрузка; априорная оценка; линеаризация.

Введение

Как известно, заданное в области $Q=\{(x,t): x\in\Omega\subseteq R^n, t\in(0,T)\}$ дифференциальное уравнение называется нагруженным, если оно содержит на принадлежащих $\overline{\Omega}$ многообразиях размерности меньше n один или несколько следов операций от искомого решения. Будем говорить об интегральной нагрузке в случае, когда дифференциальное уравнение в частных производных содержит какую-либо функцию от интеграла по пространственной переменной некоторой степени решения или его производной. На практике интегральная нагрузка возникает, в частности, в случае, когда при невозможности определения точного значения какого-либо коэффициента уравнения используется его усредненное значение на некотором промежутке.

Параболическое уравнение с интегральной нагрузкой в главной части, по-видимому, впервые рассматривалось в работе [1, с. 23]. Подобные уравнения, в том числе с младшими членами, исследовались в работах [2, 3]. В настоящее время продолжается изучение вопросов разрешимости начально-краевых задач для таких уравнений (см., например, [4–6]). К подобным уравнениям можно редуцировать практически важные параболические уравнения со степенной нелинейностью в главной части описывающих процессы фильтрации и диффузии газов [7, с. 136–137]. В этом случае редукция производится путем замены нелинейного члена его интегралом по пространственной переменной. Также представляют интерес параболические уравнения с интегральной нагрузкой в младших членах или редуцируемые к таковым [8–11]. Подобные уравнения возникают, например, при исследовании нестационарных процессов в биологии и экологии. Можно заметить, что в уравнениях, содержащих степенную нелинейность под знаком интеграла, интегральная нагрузка либо непосредственно, либо после простых преобразований представляет собой функцию от натуральной степени модуля искомого решения или его производной, т. е. норму в некотором лебеговом пространстве. Этот факт позволяет использовать правую часть априорного неравенства, оценивающего данную норму, для линеаризации нагруженного уравнения. Точное или приближенное решение линеаризованного уравнения можно впоследствии принять за исходное приближение к решению ассоциированного нелинейного уравнения [12–14].

В работе рассматривается модифицированное одномерное неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t - a\left(\|u_x\|^2\right)u_{xx} = f(x,t),\ a>0, \tag{1}$$

при условиях

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l, \quad u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{2}$$

Модификация уравнения состоит в замене коэффициента температуропроводности интегральной нагрузкой $a\left(\|u_x\|^2\right)$, т. е. функцией, зависящей от квадрата нормы производной решения в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\|u_x\|^2 = \int_\Omega |u_x|^2\,dx,\ \Omega = [0,l].$$

В указанной норме устанавливаются априорные неравенства для пространственной производной решения задачи (1)–(2) с функциями

$$a\left(\|u_x\|^2\right) = \left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \|u_x\|^p,\ a\left(\|u_x\|^2\right) = \left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{1}{p}} = \|u_x\|^{\frac{2}{p}},\ a\left(\|u_x\|^2\right) = \left(\|u_x\|^2\right)^{-\frac{p}{2}} = \|u_x\|^{-p},\ p \in N.$$

Случай $p=2$ был отдельно рассмотрен в [15]. Приводятся примеры, в которых с целью линеаризации первоначального уравнения интегральная нагрузка заменяется некоторой известной функцией от t, определяемой посредством правой части априорной оценки.

В предположении $u \in H^1(\Omega)$ всюду ниже будут использоваться следующие преобразования скалярных произведений функций в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$(u_t, u_t) = \int_\Omega u_t^2\,dx = \int_\Omega |u_t|^2\,dx = \|u_t\|^2,$$

$$-(u_{xx}, u_t) = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_t)dx + \int_\Omega u_x u_{tx} dx = -(u_x u_t)\Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}u_x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2,$$

$$\int_\Omega f u_t dx \le \int_\Omega |f u_t|\,dx \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2 dx + 2\int_\Omega u_t^2 dx\right). \tag{3}$$

В последнем случае использовано неравенство Коши с $\varepsilon = 0,5$.

1. Интегральная нагрузка $a\left(\|u_x\|^2\right) = \|u_x\|^p,\ p \in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_t - \|u_x\|^p u_{xx} = f(x,t). \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (2), (4), $\varphi_x, f \in L_2(\Omega)$. Тогда для всех $p \in N$ функция $\|u_x\|^{p+2}$ ограничена константой, зависящей только от t.

Доказательство. Запишем скалярное произведение (1) с u_t:

$$(u_t, u_t) - \|u_x\|^p (u_{xx}, u_t) = (f, u_t).$$

Заметим, что

$$-\|u_x\|^p\left(u_{xx},u_t\right)=\|u_x\|^p\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2=\left(\|u_x\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2=\frac{1}{p+2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^{p+2}.$$

Это приводит скалярное произведение к виду

$$\|u_t\|^2+\frac{1}{p+2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^{p+2}=\int_\Omega fu_t dx.$$

Интегрируя его по t, получим

$$(p+2)\int_0^t\|u_t\|^2 d\tau+\|u_x\|^{p+2}=(p+2)\int_0^t\int_\Omega fu_t dxd\tau+\|u_x(x,0)\|^{p+2}.$$

К пространственному интегралу в правой части применим неравенство (3):

$$(p+2)\int_\Omega fu_t dx\le\frac{p+2}{2}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2 dx+2\int_\Omega u_t^2 dx\right)=\frac{p+2}{4}\int_\Omega f^2 dx+(p+2)\int_\Omega u_t^2 dx.$$

Это позволяет перейти к неравенству

$$(p+2)\int_0^t\|u_t\|^2 d\tau+\|u_x\|^{p+2}\le(p+2)\int_0^t\|u_t\|^2 d\tau+\frac{p+2}{4}\int_0^t\|f\|^2 d\tau+\|\varphi_x\|^{p+2},$$

в силу которого имеем

$$\|u_x\|^{p+2}\le\frac{p+2}{4}\int_0^t\|f\|^2 d\tau+\|\varphi_x\|^{p+2}.$$

Таким образом, получена выполняющаяся для всех $t\in[0,T]$ оценка

$$\|u_x\|^{p+2}\le K(t), \tag{5}$$

$$K(t)=\frac{p+2}{4}\int_0^t\|f\|^2 d\tau+\|\varphi_x\|^{p+2}.$$

Теорема 1 доказана.

Из (5) следует, что

$$\|u_x\|^p\le\left(K(t)\right)^{\frac{p}{p+2}}. \tag{6}$$

Выбирая в (6) верхнюю границу оценки и подставляя в (4), получаем его линеаризацию

$$u_t-\left(K(t)\right)^{\frac{p}{p+2}}u_{xx}=f(x,t). \tag{7}$$

Пример 1. Пусть в условиях (2)

$$l=1,\ \varphi(x)=x(x-1),\ f(x,t)=xt. \tag{8}$$

В этом случае

$$\|\varphi_x\|^2=\int_0^1(2x-1)^2 dx=\frac{1}{3},\ \int_0^t\|f\|^2 d\tau=\frac{t^3}{9}, \tag{9}$$

$$\|\varphi_x\|^{p+2}=\left(\|\varphi_x\|^2\right)^{\frac{p+2}{2}}=3^{-\frac{p+2}{2}},\ K(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{p+2}{12}t^3+\frac{1}{\sqrt{3^p}}\right).$$

Подстановка в (4) приводит к линейному уравнению

$$u_t-\sqrt[p+2]{\left(\frac{1}{3}\left(\frac{p+2}{12}t^3+\frac{1}{\sqrt{3^p}}\right)\right)^p}\,u_{xx}=xt.$$

В частности, при $p=2$ получаем уравнение

$$u_t-\frac{1}{3}\sqrt{t^3+1}\,u_{xx}=xt.$$

2. Интегральная нагрузка $a\left(\|u_x\|^2\right)=\|u_x\|^{\frac{2}{p}}$, $p\in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_t-\|u_x\|^{\frac{2}{p}}u_{xx}=f(x,t). \tag{10}$$

Теорема 2. Пусть функция $u\in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t\in L_2(\Omega)$, является решением задачи (2), (10), $\varphi_x, f\in L_2(\Omega)$. Тогда для всех $p\in N$ функция $\|u_x\|^{\frac{2}{p}}$ ограничена константой, зависящей только от t.

Доказательство. Запишем скалярное произведение (10) с u_t:

$$(u_t,u_t)-\|u_x\|^{\frac{2}{p}}(u_{xx},u_t)=(f,u_t).$$

Заметим, что

$$-\|u_x\|^{\frac{2}{p}}(u_{xx},u_t)=\|u_x\|^{\frac{2}{p}}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2=\frac{1}{2}\left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{1}{p}}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2=\frac{1}{2}\frac{p}{p+1}\frac{d}{dt}\left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

Это приводит к уравнению

$$\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{p}{p+1}\frac{d}{dt}\left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{p+1}{p}}=\int_\Omega fu_t dx.$$

Интегрирование последнего дает

$$2\frac{p+1}{p}\int_0^t\|u_t\|^2d\tau+\left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{p+1}{p}}=2\frac{p+1}{p}\int_0^t\int_\Omega fu_t dxd\tau+\left(\|u_x(x,0)\|^2\right)^{\frac{p+1}{p}}. \tag{11}$$

Воспользуемся (3) в первом слагаемом правой части:

$$2\frac{p+1}{p}\int_\Omega fu_t dx\le\frac{p+1}{p}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega f^2dx+2\int_\Omega u_t^2dx\right).$$

Это позволяет перейти от (11) к неравенству

$$\left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{p+1}{p}}\le\frac{p+1}{2p}\int_0^t\|f\|^2d\tau+\left(\|\varphi_x\|^2\right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

Отсюда легко получается оценка, выполняющаяся для всех $t\in[0,T]$:

$$\|u_x\|^{\frac{2}{p}}\le\left(K(t)\right)^{\frac{1}{p+1}}, \tag{12}$$

$$K(t)=\frac{p+1}{2p}\int_0^t\|f\|^2d\tau+\left(\|\varphi_x\|^2\right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

Теорема 2 доказана.

Выбирая равенство в (12), перейдем от (10) к линейному уравнению

$$u_t-\left(K(t)\right)^{\frac{1}{p+1}}u_{xx}=f(x,t).$$

Пример 2. Пусть имеет место (8). Пользуясь (9), получаем

$$K(t)=\frac{p+1}{2p}t^3+3^{-\frac{p+1}{p}}.$$

Тогда уравнение (10) можно записать в виде

$$u_t-\left(\frac{p+1}{2p}t^3+3^{-\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{1}{p+1}}u_{xx}=f(x,t).$$

В частности, при $p=2$ получаем

$$K(t)=0,75t^3+0,19245.$$

Подстановка в (12) приводит к линейному уравнению

$$u_t-\sqrt[3]{0,75t^3+0,19245}u_{xx}=xt.$$

3. Интегральная нагрузка $a\left(\|u_x\|^2\right)=\|u_x\|^{-p}$, $p\in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_t-\|u_x\|^{-p}u_{xx}=f(x,t). \tag{13}$$

Теорема 3.1. Пусть функция $u\in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t\in L_2(\Omega)$, является решением задачи (12), (2), $\varphi_x, f\in L_2(\Omega)$. Тогда для всех натуральных $p\neq 2$ функция $\|u_x\|^{2-p}$ ограничена константой, зависящей только от *t*.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (13) и функции *u*:

$$(u_t,u)-\|u_x\|^{-p}(u_{xx},u)=(f,u).$$

С учетом того, что

$$(u_t,u)=\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}u^2\,dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2,$$

$$-(u_{xx},u)=-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}(u_xu)dx+\int_\Omega u_xu_xdx=-(u_xu)\Big|_{x=0}^{x=l}+\int_\Omega u_x^2dx=\|u_x\|^2,$$

$$-\|u_x\|^{-p}(u_{xx},u)=\|u_x\|^{2-p},$$

запишем уравнение

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2+2\|u_x\|^{2-p}=2\int_\Omega fudx,$$

от которого перейдем к неравенству

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2+2\|u_x\|^{2-p}\le\|f\|^2+\|u\|^2. \tag{14}$$

Проинтегрируем (14), предварительно опустив в левой части второе слагаемое:

$$\|u\|^2\le\int_0^t\|u\|^2\,d\tau+F(t),\quad F(t)=\int_0^t\|f\|^2\,d\tau+\|\varphi(x)\|^2.$$

Применяя к последнему неравенству обобщение неравенства Гроноулла [16, теорема 1.4]) получаем

$$\|u\|^2\le K_0(t), \tag{15}$$

$$K_0(t)=\int_0^t F(\tau)e^{t-\tau}d\tau+F(t).$$

Предполагая равенство в (15), подставим его правую часть в (14).

$$2\|u_x\|^{2-p}\le\|f\|^2+K_0(t)-K_0'(t). \tag{16}$$

Пусть функция $K_0(t)$ не убывает при $t\in[0,T]$, т. е. $K_0'(t)\ge 0$. Тогда для гарантированного сохранения знака неравенства в (16) опустим отрицательное слагаемое. В случае невозрастающей $K_0(t)$, т. е. при $K_0'(t)\le 0$, сохраним (16) без изменения. В результате для всех $t\in[0, T]$ приходим к оценке

$$\|u_x\|^{2-p}\le K(t), \tag{17}$$

$$K(t)=0,5\left(\|f\|^2+K_0(t)+K_1(t)\right),$$

$$K_1(t)=\begin{cases}0,\ K_0'(t)\geq 0,\\ -K_0'(t),\ K_0'(t)\leq 0.\end{cases}$$

Теорема доказана.

Выбирая верхнюю границу оценки (17), запишем, что

$$\|u_x\|^{-p}=\left(K(t)\right)^{\frac{p}{p-2}},$$

что позволяет перейти от (13) к линейному уравнению

$$u_t-\left(K(t)\right)^{\frac{p}{p-2}}u_{xx}=f(x,t).$$

Пример 3.1. Пусть при $p=3$ имеет место (8). Тогда

$$\|\varphi\|^2=\int_0^1|x(x-1)|^2\,dx=\frac{1}{30},\ \int_0^t\|f\|^2\,d\tau=\frac{t^3}{9},\ F(t)=\frac{1}{6}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{5}\right),\ K_0(t)=\frac{1}{6}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{5}\right)e^t.$$

Так как функция $K_0(t)$, т. е. $K_0'(t)$ возрастающая, то $K(t)$ ищем в виде

$$K(t)=\frac{1}{2}\left(\int_0^t\|f\|^2\,d\tau+K_0(t)\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{t^3}{3}+\left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{5}\right)e^t\right).$$

С помощью последней функции линеаризуем уравнение (13):

$$u_t-\frac{1}{216}\left(\frac{t^3}{3}+\left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{5}\right)e^t\right)^3u_{xx}=xt.$$

Теорема 3.2. Пусть функция $u\in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t\in L_2(\Omega)$, является решением задачи (13), (2), $\varphi_x,\ f\in L_2(\Omega)$. Тогда при $p=2$ функция $\|u_x\|^2$ ограничена константой, зависящей только от t.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (13) и функции u_t

$$(u_t,u_t)-\|u_x\|^{-2}(u_{xx},u_t)=(f,u_t)$$

и заметим, что имеет место равенство

$$-\|u_x\|^{-2}(u_{xx},u_t)=\frac{1}{2}\|u_x\|^{-2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\|u_x\|^2.$$

С учетом этого запишем (14) в виде

$$\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\|u_x\|^2=\int_\Omega fu_t dx,$$

а от последнего перейдем к неравенству

$$2\int_0^t\|u_t\|^2\,d\tau+\ln\|u_x\|^2\leq\frac{1}{2}\int_0^t\|f\|^2\,d\tau+2\int_0^t\|u_t\|^2\,d\tau+\ln\|\varphi_x\|^2.$$

Отсюда следует выполняющаяся для всех $t\in[0,T]$ априорная оценка

$$\|u_x\|^2\leq K(t), \tag{18}$$

$$K(t)=\|\varphi_x\|^2e^{0{,}5\int_0^t\|f\|^2d\tau}.$$

Теорема доказана.

Рассматривая (18) как равенство, можно записать

$$\|u_x\|^{-2}=\left(K(t)\right)^{-1}.$$

Это позволяет перейти от (13) к линейному уравнению

$$u_t-\left(K(t)\right)^{-1}u_{xx}=f(x,t). \tag{19}$$

Пример. 3.2. Пусть при $p=2$ имеет место (8). В этом случае из (9) следует

$$\left(K(t)\right)^{-1} = 3e^{-\frac{t^3}{18}}.$$

Подстановка в (19) приводит к линейному уравнению

$$u_t - 3e^{-\frac{t^3}{18}} u_{xx} = xt.$$

Заключение

В работе установлены априорные оценки производных решений второй смешанной задачи (2) для одномерных неоднородных уравнений теплопроводности (1) с интегральной нагрузкой в главной части. Рассмотрено три случая, в которых интегральная нагрузка $a\left(\|u_x\|^2\right)$ последовательно принимает вид $\|u_x\|^p, \|u_x\|^{\frac{2}{p}}, \|u_x\|^{-p}$, $p \in N$. Первому случаю соответствует оценка (5), второму – оценка (12), третьему – оценки (17) и (18) при $p \neq 2$ и $p = 2$ соответственно. Правые части оценок используются для линеаризации нагруженных уравнений. Данный способ линеаризации в отличие от других позволяет переходить от нагруженного уравнения к линейному с сохранением в общих чертах физического (биологического, экологического) смысла процесса, моделируемого нагруженным уравнением. Точное или приближенное решение линеаризованного уравнения, найденное при исходных начальном и граничных условиях, можно принять за приближенное решение нагруженного уравнения, которое может быть использовано для запуска итерационного процесса последовательных приближений к точному решению нагруженной задачи.

Литература

1. Бернштейн, С.Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными / С.Н. Бернштейн // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1940. – Т. 4, Вып. 1. – С. 17–26.

2. Джангвеладзе, Т.А. Об одном нелинейном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа / Т.А. Джангвеладзе // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 41–46.

3. Лаптев, Г.И. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка с интегральными коэффициентами / Г.И. Лаптев // ДАН СССР. – 1987. – Т. 293, № 2. – С. 306–309.

4. Dawidowski, L. The Quasilinear Parabolic Kirchhoff Equation / L. Dawidowski // Open Math. – 2017. – Vol. 15, Iss. 1. – P. 382–392.

5. Matsuyama, T. On the Gevrey Well-Posedness of the Kirchhoff Equation / T. Matsuyama, M. Ruzhansky // arXiv:1508.05305 [math.AP].

6. On a Kirchhoff Diffusion Equation with Integral Condition / D.H.Q. Nam, D. Dalenu, N.H. Luc, N.H. Can // Advances in Difference Equations. – 2020. – Article number: 617.

7. Калашников, А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка / А.С. Калашников // Успехи мат. наук. – 1987. – Т. 42, вып. 2(254). – С. 135–176.

8. Xulong, Q. Boundary Layer Study of a Nonlinear Parabolic Equation with a Small Parameter / Q. Xulong, Z. Xu, Zh. Wenshu // Mathematical methods in the applied Sciences. – 2021 – Vol. 45, Iss 7. – P. 3393–3400.

9. Yaman, M. Finite-Time Behaviour of Solutions to Nonlinear Parabolic Equation / M. Yaman, Z. Misir // New Trends in Mathematical Sciences. – 2022 – Vol. 10, no. 4. – P. 47–53.

10. On the Fujita exponent for a nonlinear parabolic equation with a forcing term / A. Alshehri, N. Aljaber, H. Altamimi, M. Majdoub // arXiv:2206.04930v1 [math.AP] 10.06.2022. https://arxiv.org/abs/2206.04930

11. Boccardo, L. Solutions of Nonlinear Parabolic Equations without Growth Restrictions on the Data / L. Boccardo, T. Gallouet, J.L. Vazquez // Electronic Journal of Differential Equations. – 2001. – no. 60. – P. 1–20. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2001/60/boccardo.pdf

12. Бозиев, О.Л. Об одном методе приближенного решения параболического уравнения с интегральной нагрузкой / О.Л. Бозиев // Математический вестник Вятского государственного университета. – 2021. – № 2(21). С. 9–12.

13. Бозиев, О.Л. О приближенном методе решения нагруженных уравнений гиперболического и параболического типов / О.Л. Бозиев // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2021. – № 2(100). – С. 5–10.

14. Бозиев, О.Л. Об одном методе приближенного решения параболического уравнения со степенной нелинейностью / О.Л. Бозиев // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика–Математика. – 2021. – № 3. – С. 18–28.

15. Бозиев, О.Л. О линеаризации параболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений / О.Л. Бозиев // Математический вестник Вятского государственного университета. – 2022. – № 2(25). – С. 4–8.

16. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М.: Наука, 1976. – 152 с.

Поступила в редакцию 10 февраля 2023 г.

Сведения об авторе

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности института искусственного интеллекта и цифровых технологий Кабардино-Балкарского государственного университета, г. Нальчик, Российская Федерация; старший научный сотрудник института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Российская Федерация, E-mail: boziev@yandex.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2023, vol. 15, no. 2, pp. 5–13

DOI: 10.14529/mmph230201

A PRIORI ESTIMATES FOR DERIVATIVE SOLUTIONS OF ONE-DIMENSIONAL INHOMOGENEOUS HEAT CONDUCTION EQUATIONS WITH AN INTEGRAL LOAD IN THE MAIN PART

O.L. Boziev[1,2]
[1] *Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of KBSC of the Russian Academy of Sciences, Nal'chik, Russian Federation*
[2] *Kabardino-Balkar State University, Nal'chik, Russian Federation*
E-mail: boziev@yandex.ru

Abstract. This article considers the second initial-boundary value problem with homogeneous boundary conditions for a one-dimensional modified heat equation. The modification consists in replacing the temperature-conductivity coefficient with an integral load. In our case, it has the form of a power function of the integral of the square of the modulus of the derivative of the solution of the equation with respect to the spatial variable. Equations with such a load are associated with some practically important parabolic equations with a power nonlinearity in the main part. This makes it possible to use previously found solutions of loaded problems to start the successive approximation to solutions of the nonlinear problems reduced to them. In this case, with respect to the original nonlinear equation, the loaded equation contains a weakened nonlinearity. Linearization of the loaded equation makes it possible to find its approximate solution. The article considers three cases of integral load: the square of the norm of the derivative of the solution with respect to x in the space L2 in natural, inverse to natural, and integer negative powers. The corresponding *a priori* inequalities are established. Their right sides are used to pass to linearized equations. Examples of linearization of heat conduction equations with an integral load in the main part are given.

Keywords: parabolic equation; integral load; a priori estimation; linearization.

References

1. Bernstein S.N. Ob odnom klasse funktsional'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi (Sur Une Classe D'équations Fonctionnelles aux Dérivées Partielles). *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya*, 1940, Vol. 4, Iss. 1, pp. 17–26. (in Russ.).

2. Jangveladze T.A. Ob odnom nelineynom integro-differentsial'nom uravnenii parabolicheskogo tipa (A Nonlinear Integro-Differential Equation of Parabolic Type). *Differ. Uravn.*, 1985, Vol. 21, no. 1, pp. 41–46. (in Russ.).

3. Laptev G.I. Kvazilineynyye parabolicheskiye uravneniya vtorogo poryadka s integral'nymi koeffitsiyentami (Second-Order Quasilinear Parabolic Equations with Integral Coefficients). *Dokl. Akad. nauk SSSR*, 1987, Vol. 293, no. 2, pp. 306–309. (in Russ.).

4. Dawidowski L. The Quasilinear Parabolic Kirchhoff Equation, *Open Math*., 2017, Vol. 15, Iss. 1, pp. 382–392. DOI: 10.1515/math-2017-0036.

5. Matsuyama T., Ruzhansky M. On the Gevrey Well-Posedness of the Kirchhoff Equation. *arXiv:*1508.05305 [math.AP]. DOI: 10.48550/arXiv.1508.05305

6. Nam D. H.Q., Dalenu D., Luc N.H., Can N.H. On a Kirchhoff Diffusion Equation with Integral Condition. *Advances in Difference Equations*, 2020, Article no. 617. DOI: 10.1186/s13662-020-03077-y

7. Kalashnikov, A.S. Some Problems of the Qualitative Theory of Non-Linear Degenerate Second-Order Parabolic Equations. *Russian Mathematical Surveys*, 1987, Vol. 42, Iss. 2, pp. 169–222. DOI: 10.1070/RM1987v042n02ABEH001309

8. Xulong Q., Xu Zh., Wenshu Zh. Boundary Layer Study of a Nonlinear Parabolic Equation with a Small Parameter. *Mathematical methods in the applied Sciences*, 2021, Vol. 45, Iss. 7, pp. 3393–3400. DOI: 10.1002/mma.7985

9. Yaman M., Misir Z. Finite-Time Behaviour of Solutions to Nonlinear Parabolic equation. *New Trends in Mathematical Sciences*, 2022, Vol. 10, no. 4, pp. 47–53. DOI: 10.20852/ntmsci.2022.487

10. Alshehri A., Aljaber N., Altamimi H., Majdoub M. On the Fujita Exponent for a Nonlinear Parabolic Equation with a Forcing Term. *arXiv:*2206.04930v1 [math.AP] 10.06.2022. DOI: 10.48550/arXiv.2206.04930

11. Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J.L. Solutions of Nonlinear Parabolic Equations without Growth Restrictions on the Data. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2001, no. 60, pp. 1–20. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2001/60/boccardo.pdf

12. Boziev O.L. On One Method of Approximate Solution of a Parabolic Equation with an Integral Load. *Mathematical bulletin of Vyatka State University*, 2021, Iss. 2 (21). pp. 9–12. DOI: 10.25730/VSU.0536.21.009 (in Russ.).

13. Boziev O.L. On an Approximate Method for Solving Loaded Equations of Hyperbolic and Parabolic types. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*, 2021, no. 2 (100), pp. 5–10. DOI: 10.35330/1991-6639-2021-2-100-5-10

14. Boziev O.L. A Method for an Approximate Solution to a Parabolic Equation with a Power-Law Nonlinearity. *Bulletin MSRU. Series: Physics and Mathematics*, 2021, no. 3, pp. 18–28. DOI: 10.18384/2310-7251-2021-3-18-28 (in Russ.).

15. Bosiev O.L. On the Linearization of Parabolic Equations with Integral Load in the Main Part by a Priori Estimation of Their Solutions. *Mathematical bulletin of Vyatka State University*, 2022, Iss. 2 (25). pp. 4–8. DOI: 10.25730/VSU.0536.22.010 (in Russ.).

16. Filatov A.N., Sharova L.V. *Integral'nye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* (Integral Inequality and Theory of Nonlinear Oscillations). Moscow, Nauka Publ., 1976, 152 p. (in Russ.).

Received February 10, 2023

Information about the author

Boziev Oleg Ludinovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Computer Technologies and Information Security Department, Kabardino-Balkarian State University, Nal'chik, Russian Federation; Senior Re-searcher, Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nal'chik, Russian Federation, e-mail: boziev@yandex.ru