УДК 303.7 DOI: 10.14529/mmph230203

ПРОСТРАНСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.А. Сагадеева, Д.Е. Шафранов
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: sagadeevama@susu.ru, shafranovde@susu.ru

Аннотация. Статья посвящена проблеме построения пространств дифференциальных форм с коэффициентами, являющимися стохастическими комплекснозначными K-процессами. Рассматривается полное вероятностное пространство и комплекснозначные случайные величины на измеримых подмножествах этого пространства, и также вводятся непрерывные случайные комплекснозначные K-процессы. Далее строятся пространства дифференциальных форм с коэффициентами в виде таких стохастических комплекснозначных K-процессов.

Ключевые слова: комплекснозначные случайные величины; комплекснозначные стохастические процессы; стохастические K-процессы; дифференциальные формы.

Введение

В челябинской научной школе по неклассическим уравнениям математической физики под руководством профессора Г.А. Свиридюка [1] с давних пор идут исследования решения различных задач для абстрактных и конкретных уравнений соболевского типа. В последнее время особенно интенсивно стали проводиться исследования в области стохастических вариантов этих уравнений [2, 3]. Здесь тоже имеются различные направления, в частности, в работах Д.Е. Шафранова стохастические варианты уравнения рассматриваются в пространствах дифференциальных форм со стохастическими коэффициентами [4, 5]. Для неклассических уравнений с относительно ограниченными операторами и относительно секториальными операторами (см. [1]) рассматривались случайные величины $\xi:\Omega\to\mathbf{R}$, действующие из полного вероятностного пространства $\Omega=(\Omega,\mathrm{A},\mathbf{P})$ в действительные числа, но в случае уравнений и систем, содержащих в своей записи комплексную мнимую единицу и редуцируемых к уравнению с относительно радиальным оператором (см. [1]), требуется исследовать разрешимость стохастических вариантов уравнений в пространствах с комплексными числами в основе.

Статья помимо введения и заключения содержит два пункта. В первом пункте вводятся комплекснозначные случайные величины $\xi:\Omega\to\mathbf{C}$ и строятся комплекснозначные непрерывные стохастические процессы. Описывается процедура построения пространств дифференцируемых в смысле Нельсона–Гликлиха [6] стохастических процессов. Во втором пункте описываются дифференциальные формы с комплекснозначными стохастическими коэффициентами.

1. Пространство стохастических K-процессов

Отождествим $\Omega=(\Omega,\mathrm{A},\mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство с вероятностной мерой A, ассоциированное σ-алгеброй A измеримых подмножеств множества Ω, а $\mathbf{C}$ – множество комплексных чисел, наделенное борелевой σ-алгеброй.

Измеримое отображение $\xi:\Omega\to\mathbf{C}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образует гильбертово пространство $\mathbf{L_2}=\mathbf{L_2}(\Omega;\mathbf{C})=\{\xi:\mathbf{E}\xi=0, D\xi<r<+\infty\}$ со скалярным произведением $(\xi_1,\xi_2)=\mathbf{E}\xi_1\overline{\xi}_2$ и нормой $\|\xi\|^2_{\mathbf{L_2}}=\mathbf{D}\xi$. В дальнейшем будут очень важны те случайные величины $\xi\in\mathbf{L_2}(\Omega;\mathbf{C})$, которые имеют нормальное (гауссово) распределение; их назовем *гауссовыми величинами*.

Замечание 1. В $\mathbf{L_2}$ ортогональность векторов ξ и η (т. е. $(\xi,\eta)=0$) эквивалентна отсутствию корреляции.

Возьмем множество $I \subset \mathbf{R}$ и рассмотрим два отображения: $f : I \to \mathbf{L_2}$, которое каждому $t \in I$ ставит в соответствие случайную величину $\xi \in \mathbf{L_2}$, и $g : \mathbf{L_2} \times \Omega \to \mathbf{C}$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствие точку $\xi(\omega) \in \mathbf{C}$.

Отображение $\eta : I \times \Omega \to \mathbf{C}$ (или что то же самое $\eta : I \to \mathbf{L_2}$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$, мы назовем *комплекснозначным стохастическим процессом.*

Стохастический процесс $\eta = \eta(t)$ непрерывен на интервале I, если п. н. (почти наверное) все его траектории непрерывны (т. е. при п. в. (почти всех) $\omega \in \mathrm{A}$ траектории $\eta(\cdot, \omega)$ являются непрерывными функциями).

Множество непрерывных стохастических процессов $\eta : I \to \mathbf{L_2}$ образует банахово пространство со стандартной sup-нормой, которое мы обозначим символом $C(I; \mathbf{L_2})$.

Пусть H есть комплексное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$, монотонная последовательность $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \mathbf{R}_+$ такова, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$, и последовательность $\{\xi_k = \{\xi_k(\omega)\}\} \subset \mathbf{L_2}$ случайных величин таких, что $\|\xi_k\|_{\mathbf{L_2}} \le \mathrm{const}$ при всех $k \in \mathbf{N}$.

Построим H*-значную случайную* $\mathbf{K}$*-величину*

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k(\omega) \varphi_k .$$

Пополнение линейной оболочки множества $\{\lambda_k \xi_k \varphi_k\}$ по норме $\|\xi\|_{\mathsf{H}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D} \xi_k \right)^{1/2}$ называется *пространством* H*-значных случайных* $\mathbf{K}$*-величин* и обозначается символом $\mathsf{H}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}$. Как нетрудно видеть, пространство $\mathsf{H}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}$ – гильбертово, причем построенная выше случайная $\mathbf{K}$ величина $\xi = \xi(\omega) \in \mathsf{H}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}$.

Отображение $\eta : I \to \mathsf{H}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}$, заданное формулой

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \eta_k(t) \varphi_k ,$$

где $\{\eta_k(t)\} \subset C(I; \mathbf{L_2})$, называется *непрерывным* H*-значным стохастическим* $\mathbf{K}$*-процессом,* если ряд в этом равенстве сходится равномерно по норме $\|\cdot\|_{\mathsf{H}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}}$ на любом компакте в I и траектории процесса $\eta = \eta(t)$ почти наверное непрерывны. H-значный стохастический $\mathbf{K}$-процесс назовем *дифференцируемым по Нельсону–Гликлиху*, если ряд в выражении $\overset{\circ}{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overset{\circ}{\eta}_k(t) \varphi_k$ сходится равномерно по норме $\|\cdot\|_{\mathsf{H}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}}$ на любом компакте в I и траектории процесса $\overset{\circ}{\eta} = \overset{\circ}{\eta}(t)$ почти наверное непрерывны. Здесь $\overset{\circ}{\eta}_k(t)$ есть производная Нельсона–Гликлиха стохастического процесса и $\eta_k : I \to \mathbf{L_2}$. Через $C(I; \mathsf{H}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2})$. обозначим пространство непрерывных H-значных стохастических $\mathbf{K}$-процессов и аналогично через $C^{\ell}(I; \mathsf{H}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2})$ обозначим пространство H-значных стохастических $\mathbf{K}$-процессов, непрерывно дифференцируемых по Нельсону–Гликлиху до порядка $\ell \in \mathbf{N}$ включительно.

Пусть теперь U и F есть комплексные сепарабельные гильбертовы пространства с ортонормированными базисами $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ соответственно. Символами $\mathsf{U}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}$ и $\mathsf{F}_{\mathbf{K}}\mathbf{L_2}$ обозначим гильбертовы пространства, которые есть пополнение линейной оболочки *случайных* $\mathbf{K}$*-величин*

$\xi(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k\varphi_k$, $\xi_k\in\mathbf{L_2}$ и $\zeta(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\zeta_k\psi_k$, $\zeta_k\in\mathbf{L_2}$ по нормам $\|\eta\|^2_{\mathsf{U}_\mathbf{K}\mathbf{L_2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\mathbf{D}\eta_k$ и $\|\chi\|^2_{\mathsf{F}_\mathbf{K}\mathbf{L_2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\mathbf{D}\chi_k$ соответственно.

Заметим, что в разных пространствах ($\mathsf{U}_\mathbf{K}\mathbf{L_2}$ и $\mathsf{F}_\mathbf{K}\mathbf{L_2}$) последовательность $\mathbf{K}$ может быть разной ($\mathbf{K}=\{\lambda_k\}$ в $\mathsf{U}_\mathbf{K}\mathbf{L_2}$ и $\mathbf{K}=\{\mu_k\}$ в $\mathsf{F}_\mathbf{K}\mathbf{L_2}$), однако все последовательности, отмеченные символом $\mathbf{K}$, должны быть монотонными и суммируемыми с квадратом.

Все результаты, вообще говоря, будут верны при разных последовательностях $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$, и простоты ради мы ограничимся случаем $\lambda_k=\mu_k$.

2. Пространство дифференциальных форм с комплекснозначными стохастическими коэффициентами

Следуя работе Р. Нарасимхана, хаусдорфово топологическое пространство V называется *комплексным многообразием комплексной размерности* n, если задано семейство $\{(U_i,\varphi_i):i\in\mathcal{J}\}$, где φ_i – гомеоморфизм U_i на открытое множество в $\mathbf{C}^n$ и $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ голоморфны в $\varphi_i\left(U_i\cap U_j\right)$ для всех $i,\ j$. *Комплексно аналитическая структура* определяется аналогично дифференцируемой структуре в вещественном случае. Также обозначим через $n=\dim V=\dim_\mathbf{C} V$ (комплексную) *размерность* V.

Далее если V есть C^k-многообразие (дифференцируемое до k порядка включительно), U открытое подмножество V, то отображение $f:U\to\mathbf{R}$ называется C^r*-функцией в* U, если для любой системы координат $(W,\ \psi)$ на V такой, что $W\subset U$, функция $f\circ\psi^{-1}:\psi(W)\to\mathbf{R}$ принадлежит классу $C^r\ (0\le r\le k)$. Множество C^r-функций на V обозначается $C^r(V)$. *Носителем* C^r-функций f на V называется замыкание в V множества $\{x\in V: f(x)\neq 0\}$. Голоморфные функции определяются аналогично.

Достаточно просто определяется диффеоморфизм и изоморфизм двух многообразий V и V' в случае $\mathbf{R}$. А в комплексном случае вводится голоморфный (= комплексно аналитический) изоморфизм.

Дифференциал в точке $a\in V$ для комплексной C^k-функции f является элементом пространства $T_a^*(V)\otimes\mathrm{C}$. Для любого $X\in T_a(V)$ и для любой комплексной функции f значение $(df)_a(X)$ есть комплексное число. Более того, если запишем $f=f_1+if_2$, где f_1, f_2 – действительные C^k-функции, то

$$(df)_a(X)=(df_1)_a(X)+\ (df_2)_a(X).$$

Зачастую вместо пространства $T_a(V),T_a^*(V)$ рассматриваются $T(V)\otimes\mathrm{C}$, $T_a^*(V)\otimes\mathrm{C}$ и оперируют с комплекснозначными числами.

Пусть далее V – комплексное многообразие комплексной размерности n и $a\in V$. Пусть $(U,\ \varphi)$ – система координат, $a\in U$; тогда φ – голоморфный изоморфизм U на некоторое открытое множество в $\mathbf{C}^n$. Запишем $\varphi(z)=(z_1,z_2,...,z_n)$, где $z\in U, z_j=x_j+y_j$, x_j, y_j – действительные функции класса C^∞. Касательное пространство $T_a(V)$, где V рассматривается как действительное C^∞-многообразие размерности $2n$, имеет естественную структуру комплексного векторного пространства ($\mathbf{C}^\mathrm{n}\cong\mathbf{R}^{2n}$) относительно изоморфизма

$$(z_1,z_2,...,z_n)\mapsto(x_1,y_{1,}x_2,y_2,...,x_n,y_n).$$

Отображение $X \mapsto \left((dx_1)_a(X),\ (dy_1)_a(X),\ldots,(dx_n)_a(X),\ (dy_n)_a(X) \right)$ является $\mathbf{R}$-изоморфизмом $T_a(V) \mapsto \mathbf{R}^{2n}$, а отображение $X \mapsto \left((dz_1)_a(X),\ (dz_2)_a(X),\ldots,(dz_n)_a(X) \right)$ является $\mathbf{R}$-изоморфизмом $T_a(V) \mapsto \mathbf{C}^n$ и одновременно определяет на $T_a(V)$ структуру $\mathbf{C}$-векторного пространства.

Если $V,\ W$ – комплексные многообразия и $f: V \to W$ – голоморфное отображение, то $f_*: T_a(V) \to T_{f(a)}(W)$ является $\mathbf{C}$-линейным отображением.

Комплекснозначной дифференциальной формой $\varpi(a)$ *типа* (p,q) *будет*

$$\varpi(a) = \sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_p \\ k_1<k_2<\ldots k_q}} \varpi_{\boldsymbol{JL}} dz_{\boldsymbol{J}} \wedge d\overline{z}_{\boldsymbol{L}}\,,\ J = (j_1, j_2, \ldots, j_p), K = (k_1, k_2 \ldots k_q),$$

где $dz_{\boldsymbol{J}} \wedge d\overline{z}_{\boldsymbol{L}} = dz_{j_1} \wedge dz_{j_2} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge d\overline{z}_{k_2} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}$.

Мы рассматриваем пространства дифференциальных r-форм ($r = p+q$), в которых добавляется зависимость коэффициентов от времени t при действии на r-форму группой или полугруппой операторов и также в случае стохастических коэффициентов зависимость от $\omega \in \Omega$.

Окончательно получаем дифференциальную r форму $\varpi(a)$ типа (p,q) вида

$$\varpi(a,t,\omega) = \sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_p \\ k_1<k_2<\ldots k_q}} \varpi_{\boldsymbol{JL}}(t,\omega) dz_{\boldsymbol{J}} \wedge d\overline{z}_{\boldsymbol{L}}\,,\ J = (j_1, j_2, \ldots, j_p), K = (k_1, k_2 \ldots k_q),$$

где $dz_{\boldsymbol{J}} \wedge d\overline{z}_{\boldsymbol{L}} = dz_{j_1} \wedge dz_{j_2} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge d\overline{z}_{k_2} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{k_q}$

Заключение. В дальнейшем планируется проведение вычислительных экспериментов для стохастических вариантов уравнений Шредингера и/или Гинзбурга–Ландау, содержащих мнимую единицу и, следовательно, требующих поиска решений в комплекснозначных пространствах $\mathbf{K}$-процессов и в пространствах дифференциальных форм со стохастическими комплекснозначными коэффициентами, являющихся $\mathbf{K}$-процессами.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4(298). – С. 47–74.

2. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова и аддитивными «шумами» / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

3. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively P-Radial Operators in Space of «Noises» / A. Favini, G.A. Sviridyuk, M. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – T. 13, № 6. – С. 4607–4621.

4. Shafranov, D.E. The Barenblatt–Zheltov–Kochina Model with the Showalter–Sidorov Condition and Additive “White Noise” in Spaces of Differential Forms on Riemannian Manifolds without Boundary / D.E. Shafranov, O.G. Kitaeva // Global and Stochastic Analysis. – 2018. – Vol. 5, no. 2. – P. 145–159.

5. Shafranov, D.E. Degenerate Holomorphic Semigroups of Operators in Spaces of K-“Noises” on Riemannian Manifolds / D.E. Shafranov, G.A. Sviridyuk // Semigroups of Operators: Theory and Applications SOTA-2018, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2020. – P. 279–292.

6. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011. – 436 p.

Поступила в редакцию 24 апреля 2023 г.

Сведения об авторах

Сагадеева Минзиля Алмасовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sagadeevama@susu.ru

Шафранов Дмитрий Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Российская Федерация, e-mail: shafranovde@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2023, vol. 15, no. 2, pp. 21–25

MSC 93E03 **DOI: 10.14529/mmph230203**

SPACES OF DIFFERENTIAL FORMS WITH STOCHASTIC COMPLEX-VALUED COEFFICIENTS

M.A. Sagadeeva, D.E. Shafranov
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: sagadeevama@susu.ru, shafranovde@susu.ru

Abstract. This article investigates the construction of spaces of differential forms with coefficients which are stochastic complex-valued K-processes. A complete probability space and complex-valued random variables on measurable subsets of this space are considered, and continuous random complex-valued K-processes are also introduced. Next, we construct spaces of differential forms with coefficients in the form of such stochastic complex-valued K-processes.

Keywords: complex-valued random variables; complex-valued stochastic processes; stochastic K-processes; differential forms.

References

1. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, Vol. 49, no 4, pp. 45–74. DOI: 10.1070/RM1994v049n04ABEH002390

2. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 2014, Vol. 7, no. 1, pp. 90–103. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140108

3. Favini A., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M. Linear Sobolev Type Equations with Relatively P-Radial Operators in Space of "Noises". *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, Vol. 13, no 6, pp. 4607–4621. DOI: 10.1007/s00009-016-0765-x

4. Shafranov D.E., Kitaeva O.G. The Barenblatt–Zheltov–Kochina Model with the Showalter–Sidorov Condition and Additive "White Noise" in Spaces of Differential Forms on Riemannian Manifolds without Boundary. *Global and Stochastic Analysis*, 2018, Vol. 5, no. 2, pp. 145–159.

5. Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A. Degenerate Holomorphic Semigroups of Operators in Spaces of K-"Noises" on Riemannian manifolds. In: Banasiak, J., Bobrowski, A., Lachowicz, M., Tomilov, Y. (eds) *Semigroups of Operators – Theory and Applications*. SOTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol 325. Springer, Cham., 2020, pp. 279–292. DOI: 10.1007/978-3-030-46079-2_16

6. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. London, Dordrecht, Heidelberg, N.Y., Springer, 2011, 436 p.

Received April 24, 2023

Information about the authors

Sagadeeva Minzilya Almasovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical and Computer Modelling Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sagadeevama@susu.ru

Shafranov Dmitriy Evgen'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical and Computer Modelling Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: shafranovde@susu.ru