УДК 517.956.2 DOI: 10.14529/mmph230204

# МАССИВНЫЕ МНОЖЕСТВА, ПОРОЖДЁННЫЕ ПОЛУЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

***В.В. Филатов***
*Волгоградский государственный университет, г. Волгоград, Российская Федерация*
*E-mail: filatov@volsu.ru*

**Аннотация. Одним из истоков тематики данного исследования является классификационная теория некомпактных римановых поверхностей. Хорошо известно, что на поверхностях параболического типа всякая ограниченная снизу супергармоническая функция является тождественной постоянной. В свою очередь поверхности гиперболического типа содержат нетривиальные супергармонические функции. Данное свойство поверхностей параболического типа легло в основу определений многообразий параболического типа размерности выше двух.**

**Классификационная теория римановых многообразий имеет прямое отношение к теоремам типа Лиувилля, утверждающих тривиальность ограниченных решений эллиптических уравнений. Высокую эффективность в данной тематике показала емкостная техника, развиваемая в работах А.А. Григорьяна, А.Г. Лосева, Е.А. Мазепы и других исследователей. В частности, были получены оценки размерностей ограниченных гармонических функций и решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях в терминах массивных множеств.**

**Исследуются свойства массивных множеств, порожденных полулинейным эллиптическим оператором. Удалось доказать, что свойство массивности сохраняется при вариациях потенциала. Также получено необходимое условие существования нетривиальных ограниченных решений полулинейного уравнения.**

*Ключевые слова: полулинейное уравнение; интеграл энергии; массивное множество; теорема Лиувилля.*

## Введение

Данная работа посвящена исследованию решений полулинейных эллиптических уравнений вида

$$Lu \equiv \Delta u - u\varphi\left(\left|u\right|\right) = 0 \tag{1}$$

на некомпактных римановых многообразиях. Предполагается, что $\varphi\left(\xi\right) \geq 0$ – гладкая, монотонно невозрастающая функция.

Пусть $M$ -произвольное некомпактное риманово многообразие с пустым краем. Сформулируем понятие $L$-массивных множеств введённое в работе [1]. Говорят, что множество $\Omega \subset M$ является $L$-массивным, если на $M$ существует $v$-нетривиальное субрешение уравнения (1), такое, что $v\big|_{M\setminus\Omega} = 0, 0 \leq v \leq 1.$ Если, кроме того, выполнено

$$D\left(M,v,\varphi\right) = \int\limits_M \left|\Delta v\right|^2 + 2\left(\int\limits_0^{|v|} t\varphi\left(t\right)dt\right)dx < \infty,$$

то такое множество называют $LD$-массивным. Такую функцию $v$ называют допустимой для $\Omega$.

Сформулируем некоторые уже известные результаты, полученные с помощью данного понятия. В случае стационарного уравнения Шредингера

$$Lu \equiv \Delta u - q\left(x\right)u = 0$$

в работах [2, 3] доказано, что размерность пространств ограниченных решений стационарного уравнения Шрёдингера (с конечным интегралом энергии) не менее числа попарно непересекающихся $L$-массивных ($LD$-массивных) множеств.

Приведём результат, полученный Е.А. Мазепой [4], для лучшего понимания дальнейшего изложения. Пусть $0 \le \varphi_1(\xi) \le A\varphi(\xi)$, где $A = \text{const} > 0, \varphi_1(\xi) \not\equiv 0$ при $\xi \ge 0$. Рассмотрим также уравнение $L_1 u \equiv \Delta u - u\varphi_1(|u|) = 0$. Тогда если всякое ограниченное решение уравнения $L_1 u = 0$ есть тождественный ноль, то и всякое ограниченное решение уравнения $Lu = 0$ будет являться тождественным нулём. Заметим, что объединяя теоремы, полученные в работах [1, 4], можно получить следующее утверждение: если на $M$ существует $L$-массивное множество, то на $M$ существует $L_1$-массивное множество. Однако данное утверждение удалось существенно уточнить.

**Связь между существованием массивных множеств при вариациях потенциала**

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

**Теорема 1.** Всякое $LD$-массивное множество является $L_1 D$-массивным.

**Доказательство.** 1) Рассмотрим случай $0 < A \le 1$. Пусть $\Omega - LD-$ массивное множество, $v$ – допустимая функция для $\Omega$. Покажем, что в данном случае $\Omega$ будет являться $L_1 D-$ массивным множеством. Рассмотрим $L_1 v$.

$$L_1 v = \Delta v - v\varphi_1(v) \ge v\varphi(v) - v\varphi_1(v) v(\varphi(v) - \varphi_1(v)) = v\left(\frac{A\varphi(v)}{A} - \varphi_1(v)\right) \ge$$

$$\ge v\left(\frac{\varphi_1(v)}{A} - \varphi_1(v)\right) = v\varphi_1(v)\left(\frac{1}{A} - 1\right).$$

Так как $0 < A \le 1$ то $v\varphi_1(v)\left(\frac{1}{A} - 1\right) \ge 0$, и, следовательно, $L_1 v \ge 0.$ Несложно показать (см. [1, 4]), что, можно считать, что $v \in C^2(\Omega)$, учитывая, что $L_1 v \ge 0$ в $\Omega$, то $v$ является субрешением в $\Omega.$ Таким образом, $\Omega$ является $L_1$-массивным множеством. Рассмотрим $D(M, v, \varphi_1).$

$$D(M, v, \varphi_1) = \int\limits_M |\nabla v|^2 + 2\left(\int\limits_0^v t\varphi_1(t)dt\right)dx \le \int\limits_M |\nabla v|^2 + 2\left(\int\limits_0^v t\varphi(t)dt\right)dx < \infty.$$

Таким образом $\Omega$ есть $L_1 D$ массивное множество и первый случай рассмотрен.

2) Пусть теперь $A > 1.$ Пусть на $M$ существует $\Omega$ – $LD$ – массивное множество, $v^*$ – допустимая для $\Omega$ функция. Построим $v$ – нетривиальное ограниченное $0 \le v \le 1$ решение уравнения $Lv = 0$ на $M$ с конечным интегралом энергии $D(M, v, \varphi).$ Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ – гладкое исчерпание $M,$ то есть последовательность предкомпактных открытых множеств, таких, что $\overline{B_k} \subset B_{k+1}, \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = M.$ Рассмотрим следующие решения задач Дирихле в $B_k$ :

$$\begin{cases} \Delta v_k - v_k\varphi(v_k) = 0, \\ v_k\big|_{\partial B_k} = v\big|_{\partial B_k}^* . \end{cases}$$

В силу принципа максимума (см. [4]) получаем $0 \le \sup\limits_{B_k} v_k \le \sup\limits_M v^* \le 1.$ Учитывая, что $v^*$ – нетривиальное субрешение уравнения $Lu = 0,$ то с помощью принципа сравнения (см. [4]) мы получаем $v_k^* \ge v^*$ в $B_k$ . Следовательно, мы делаем вывод, что на семейство функций $\{v\}_{k=1}^{\infty}$ компактно в классе $C^{2,\alpha}(B)$ (см. [4]). Из последнего следует, что существует подпоследовательность последовательности $\{v\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к предельной функции $v$ в норме $C^2(B)$. Применяя переобозначения, мы будем считать, что $\{v\}_{k=1}^{\infty}$ и есть сходящаяся подпоследовательность. Всюду далее мы будем применять аналогичные рассуждения. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = v$ – нетривиальное решение уравнения $Lv = 0,$ такое, что $0 \le v^* \le v \le 1$, очевидно, что последние неравенства выполнены, в частности, на $\Omega$. Сходимость интеграла энергии $D(M,v,\varphi)$ следует из принципа Дирихле (см. [1]) и сходимости интеграла энергии $D\left(M,v^*,\varphi\right)$.

Обозначим $\varphi_2(u) \equiv A\varphi(u)$ и $L_3 u = \Delta u - u\varphi_2(u)$. Покажем теперь, что на $M$ существует $L_3$-массивное множество. Рассмотрим решения задач Дирихле в $B_k \cap \Omega$.

$$\begin{cases} \Delta u_k - u_k \varphi_2(u_k) = 0, \\ u_k\big|_{\partial(B_k \cap \Omega)} = u\big|^*_{\partial(B_k \cap \Omega)}. \end{cases}$$

В силу принципа максимума выполнено $0 \le u_k \le \sup\limits_{\Omega} v \le 1$. Следовательно, на $\Omega$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u^*$. Из оценок $\Delta u_k = A u_k \varphi(u_k) \ge u_k \varphi(u_k)$ получаем, что $u_k\varphi(u_k) - \Delta u_k \le 0$, что эквивалентно $\Delta u_k - u_k \varphi(u_k) \ge 0$. Последнее означает, что $u_k$ – субрешение уравнения $Lu = 0$, и, таким образом, в $B_k \cap \Omega$ в силу принципа сравнения выполнено $u_k \le v$ и как следствие $u^* \le v$. Покажем, что $D\left(\Omega, u^*, \varphi_2\right) < \infty$. Справедливы следующие соотношения:

$$D(B_k \cap \Omega, u_k, \varphi_2) = D(B_k \cap \Omega, u_k, A\varphi) = \int\limits_{B_k \cap \Omega} |\nabla u_k|^2 + 2\left(\int\limits_0^{u_k} At\varphi(|t|)dt\right)dx \le$$

$$\le \int\limits_{B_k \cap \Omega} |\nabla v|^2 + 2\left(\int\limits_0^{v} At\varphi(|t|)dt\right)dx \le A\int\limits_M |\nabla v|^2 + 2\left(\int\limits_0^{v} t\varphi(|t|)dt\right)dx < \infty.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем нужное.

Покажем нетривиальность $u^*$. Пусть $w_k, \overline{v_k}, \overline{u_k}$ – решения следующих задач Дирихле в $B_k \cap \Omega$:

$$\Delta w_k = 0, \Delta\overline{v_k} = -v\varphi(v), \Delta\overline{u_k} = -Au_k\varphi(u_k),$$
$$w_k\big|_{\partial(B_k \cap \Omega)} = v\big|_{\partial(B_k \cap \Omega)}, \overline{v_k}\big|_{\partial(B_k \cap \Omega)} = 0, \overline{u_k}\big|_{\partial(B_k \cap \Omega)} = 0.$$

Ясно, что $w_k - \overline{u_k} = u_k, w_k - \overline{v_k} = v$ и $v \le w_k \le \sup\limits_M v, \overline{u_k} \ge 0, \overline{v_k} \ge 0$. Покажем, что $\overline{u_k} \le A\overline{v_k}$. Действительно,

$$\Delta\left(A\overline{v_k}\right) = -Av\varphi(v) \le -Au_k\varphi(u_k) = \Delta\overline{u_k},$$

тогда из принципа сравнения получаем $A\overline{v_k} \ge \overline{u_k}$. Пусть $x_0$ – точка, в которой $v(x_0) > \sup\limits_{\Omega} v - \xi$, где $\xi$ – достаточно малая положительная постоянная. Тогда

$$w_k(x_0) > \sup_{\Omega} v - \xi,$$
$$\overline{v_k}(x_0) = w_k(x_0) - v(x_0) \le \sup_{\Omega} v - v(x_0) < \xi,$$
$$\overline{u_k}(x_0) \le A\xi, u_k(x_0) = w_k(x_0) - \overline{u_k}(x_0) > \sup_{\Omega} v - (A+1)\xi.$$

Отсюда при $k \to \infty$ получаем $u(x_0) \ge \sup\limits_{\Omega} v - (A+1)\xi > 0$ при достаточно малом $\xi$. Следовательно, $u^*$ – нетривиальное, ограниченное решение уравнения $\Delta u^* - u^*\varphi_2\left(u^*\right) = 0$ на $\Omega$ с конечным интегралом энергии $D\left(\Omega, u^*, \varphi_2\right) < \infty$.

Пусть $\sup u^* = a > 0$. Несложно показать, что $L_2D$-массивным множеством будет, например, множество $\Omega \supset \Omega^* = \{x : u^* > \frac{a}{2}\}$ с допустимой функцией $\left(u^* - \frac{a}{2}\right)_+$, где $f_+$ – положительная срезка. В силу доказанного пункта 1) заключаем, что $\Omega^*$ является $L_1D$-массивным множеством. Учитывая, что если у множества есть $L_1D$-массивное подмножество, то оно само является $L_1D$-массивным, получаем нужное.

**Необходимое условие лиувиллева свойства ограниченных решений полулинейного уравнения**

Для формулировки второго результата работы введём необходимые понятия. Пусть $M$ – произвольное некомпактное риманово многообразие, $B$ – компакт в $M$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ – гладкое исчерпание $M$. Рассмотрим решения задач Дирихле в $B_k \setminus B$:

$$Lh_k = \Delta h_k - h_k\varphi(|h_k|) = 0, h_k|_{\partial B} = 1, h_k|_{\partial B_k} = 1,$$

$$Ls_k = \Delta s_k - s_k\varphi(|s_k|) = 0, s_k|_{\partial B} = 1, s_k|_{\partial B_k} = 1,$$

$$Lu_k = \Delta u_k - h_k\varphi(|u_k|) = 0, u_k|_{\partial B} = 1, u_k|_{\partial B_k} = 1.$$

Несложно показать с помощью принципа сравнения, что каждая из последовательностей будет иметь предел. Предельную функцию $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = h_B$ называют функцией Лиувилля внешности компакта $B$, порожденную оператором $L$. Предельную функцию $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s_B$ называют ёмкостным потенциалом внешности компакта $B, \lim\limits_{k\to\infty} u_k = u_B$ называют гармонической мерой внешности компакта $B$.

Рассмотрим решения задач Дирихле в $B_k$

$$\begin{cases} LH_k = \Delta H_k - H_k\varphi(|H_k|) = 0 \\ H_k|_{\partial B_k} = 1 \end{cases}.$$

Предельную функцию $\lim\limits_{k\to\infty} H_k = H$ называют функцией Лиувилля многообразия $M$, порожденную оператором $L$. Отметим две теоремы, доказанные в работе [1]. Первая теорема утверждает, что на многообразии $M$ всякое ограниченное решение уравнения $Lu = 0$ является тождественным нулём тогда и только тогда, когда функция Лиувилля $H \equiv 0$. Вторая теорема утверждает, что функция Лиувилля $H \equiv 0$ тогда и только тогда, когда всякая гармоническая мера $u_B \equiv 0$.

В текущей работе получены необходимое условие тривиальности функции Лиувилля многообразия $M$, порожденной оператором $L$. Перейдём к точной формулировке результата.

**Теорема 2.** *Если функция Лиувилля* $H \equiv 0$ *то для всякого компакта* $B$ *выполнено* $h_B \equiv s_B$.

**Доказательство.** Рассмотрим $L(h_k - s_k)$. Справедливы следующие равенства

$$L(h_k - s_k) = \Delta(h_k - s_k) - (h_k - s_k)\varphi(h_k - s_k) = \Delta h_k - \Delta s_k - h_k\varphi(h_k - s_k) + s_k\varphi(h_k - s_k) =$$
$$(\Delta h_k - h_k\varphi(h_k)) - (\Delta s_k - s_k\varphi(s_k)) + h_k\varphi(h_k) - s_k\varphi(s_k) - h_k\varphi(h_k - s_k) + s_k\varphi(h_k - s_k) =$$
$$h_k\varphi(h_k) - s_k\varphi(s_k) - h_k\varphi(h_k - s_k) + s_k\varphi(h_k - s_k).$$

Оценим снизу $h_k\varphi(h_k)$:

$$h_k\varphi(h_k) = (s_k + (h_k - s_k))\varphi(s_k + (h_k - s_k)) = s_k\varphi(s_k + (h_k - s_k)) + (h_k - s_k)\varphi(s_k + (h_k - s_k))$$
$$\geq s_k\varphi(s_k) + (h_k - s_k)\varphi(h_k - s_k).$$

Из последнего следует, что $L(h_k - s_k) \geq 0$ и, как следствие, $(h_k - s_k)$ – субрешение полулинейного уравнения, такое, что $(h_k - s_k)\big|_{\partial B} = 0, (h_k - s_k)\big|_{\partial B} = 1$, следовательно, в силу принципа сравнения выполнено $u_k \geq (h_k - s_k) \geq 0$ в $B_k \setminus B$. Учитывая, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$, делаем вывод, что $h_B = s_B$.

**Замечание 1.** Заметим, что в работе [1] были получены необходимые и достаточные условия тривиальности функции Лиувилля многообразия $M$, порождённой оператором Шредингера:

$$Lu = \Delta u - q(x)u = 0.$$

А именно, доказано, что $H$-функция Лиувилля, порождённая оператором Шредингера, есть тождественный ноль тогда и только тогда, когда для всякого компакта $B \subset M$ его ёмкостный потенциал совпадает с функцией Лиувилля внешности компакта, то есть $h_B \equiv s_B$.

**Замечание 2.** Вообще говоря, данная теорема справедлива и для более общих полулинейных эллиптических уравнений вида

$$Lu \equiv \Delta u - g(x,u) = 0.$$

Предполагается, что функция $g{:}M \times R \to R$ является липшицевой и обладает следующими тремя свойствами:

- $g(x,-\xi) = -g(x,\xi)$;
- $g(x,\xi_1) \geq g(x,\xi_2), \forall \xi_1, \xi_2 : \xi_1 > \xi_2$;
- $g(x,a) - g(x,b) \geq g(x,a-b), \forall a,b : 1 > a \geq b > 0.$

Несложно показать, что при данных условиях на функцию $g$ разность $h_k - s_k$ будет являться субрешением и, как следствие, получить необходимый результат.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90110.*

**Литература**

1. Losev, A.G. Liouville Type Theorems for Solutions of Semilinear Equations on Non-Compact Riemannian Manifolds // A.G. Losev, V.V. Filatov // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2021. – Т. 31, № 4 – С. 629–639.

2. Григорьян, А.А. О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // А.А. Григорьян, А. Г. Лосев // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20, № 3. – С. 34–42.

3. Losev A. G. Dimensions of Solution Spaces of the Schrodinger Equation with Finite Dirichlet Integral on Non-compact Riemannian Manifolds // A.G. Losev, V.V. Filatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Т. 40. – С. 1363–1370.

4. Мазепа, Е.А. Краевые задачи и лиувиллевы теоремы для полулинейных эллиптических уравнений на римановых многообразиях // Е.А. Мазепа // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 3. – С. 59–66.

***Поступила в редакцию 8 февраля 2023 г.***

**Сведения об авторах**

Филатов Владимир Владимирович – ассистент, кафедра математического анализа и теории функций, Волгоградский государственный университет, г. Волгоград, Российская Федерация, e-mail: vladimfilatov@yandex.ru

*Bulletin of the South Ural State University*
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*
*2023, vol. 15, no. 2, pp. 26–31*

**DOI: 10.14529/mmph230204**

## MASSIVE SETS PRODUCED BY SEMILINEAR ELLIPTIC OPERATORS ON NON-COMPACT RIEMANN MANIFOLDS

***V.V. Filatov***
*Volgograd State University, Volgograd, Russian Federation*
*E-mail: filatov@volsu.ru*

Abstract. One of the origins of the topic of this study is the classification theory of non-compact Riemannian surfaces. It is well known that on parabolic surfaces, any superharmonic functions bounded from below is the identical constant. Hyperbolic surfaces contain nontrivial superharmonic functions. This distinct property of parabolic surfaces form the basis for the definitions of parabolic manifolds with dimensions greater than two.

The classification theory of Riemannian manifolds is directly related to Liouville-type theorems which assert the triviality of bounded solutions of elliptic equations. High efficiency in this topic was shown by the capacitive technique developed in the works of Grigoryan, Losev, Mazepa, and others. In particular, estimates were obtained for the dimensions of bounded harmonic functions and solutions of the stationary Schrödinger equation on noncompact Riemannian manifolds in terms of massive sets. In this paper, we study the properties of massive sets generated by a semilinear elliptic operator. It was possible to prove that the property of massiveness is preserved under variations of the potential.

The current work generalizes or strengthens the results of Mazepa. A necessary condition for the existence of nontrivial bounded solutions of a semilinear equation is also obtained.

*Keywords: semilinear equation; energy integral; massive set; Liouville's theorem.*

### References

1. Losev A.G., Filatov V.V. Liouville Type Theorems for Solutions of Semilinear Equations on Non-Compact Riemannian Manifolds. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2021, Vol. 31, no. 4, pp. 629–639. DOI: 10.35634/vm210407

2. Grigor'yan A.A., Losev A.G. Dimension of Spaces of Solutions of the Schrodinger Equation on Noncompact Riemannian Manifolds. *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2017, Vol. 20, Iss. 3, pp. 34–42. DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.3

3. Losev A.G., Filatov V.V. Dimensions of Solution Spaces of the Schrodinger Equation with Finite Dirichlet Integral on Non-compact Riemannian Manifolds. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, Vol. 40, pp. 1363–1370. DOI: 10.1134/s1995080219090142

4. Mazepa E.A. Boundary value Problems and Liouville Theorems for Semilinear Elliptic Equations on Riemannian Manifolds. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2005, Vol. 49, Iss. 3, pp. 56–62.

***Received February 8, 2023***

### Information about the author

Filatov Vladimir Vladimirovich is Assistant, Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Volgograd State University, Volgograd, Russian Federation, e-mail: vladimfilatov@yandex.ru