

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА

М.С. Жарылканова, Н.Л. Клиначева, А.П. Яловец

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: klinachevanl@susu.ru

Аннотация. Представлен полуаналитический метод решения системы уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах. Поскольку конечными разностями заменяются только пространственные производные, система уравнений газовой динамики сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на пространственной сетке. Приближенное аналитическое решение данной системы дифференциальных уравнений для малого временного интервала применяется для описания динамики газа во всем требуемом временном интервале. Проведена верификация на одномерных тестовых задачах о распаде произвольного разрыва и распространении стационарных ударных волн различной интенсивности. Для сравнения одномерных задач приведено решение тестовых задач простым в реализации базовым методом крупных частиц. Показано, что полуаналитический метод обладает высокой точностью вычислений, а также является наиболее универсальным методом для расчета прикладных задач.

Ключевые слова: полуаналитический метод; метод крупных частиц; ударная волна; распад произвольного разрыва.

Введение

В работе [1] описан метод решения системы уравнений механики сплошной среды, записанной в лагранжевых переменных, который отличается от традиционных методов тем, что конечными разностями заменяются только производные по пространственным переменным. В результате такого подхода уравнения в частных производных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на пространственной сетке. Для малого временного интервала было найдено приближенное аналитическое решение этой системы уравнений. Полученное аналитическое решение дает возможность описать динамику рассматриваемой системы во всем требуемом временном интервале. Применение данного метода для решения задач газовой динамики и расчета упругопластических течений в твердых телах показало, что данный метод обеспечивает высокую точность выполнения законов сохранения и характеризуется высокой устойчивостью решения, что обусловлено отказом от аппроксимации конечными разностями производных по времени.

Поскольку применение лагранжевых переменных для решения задач газовой динамики ограничено характером течений рассматриваемой системы, то возникает необходимость обобщения метода [1] на случай решения задач в эйлеровых переменных. В данной работе приводится описание применения метода [1] к решению задач газовой динамики в эйлеровых переменных, тестирование его на стандартных задачах путем сравнения результатов расчета предлагаемым методом с решениями, полученными базовым методом крупных частиц (МКЧ) [2], различные модификации которого широко используется для решения многих прикладных задач [3, 4].

Описание метода для эйлеровых координат

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах в одномерном случае (законы сохранения массы, импульса и энергии):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U v)}{\partial x} = -P \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Здесь и далее ρ – плотность, v – массовая скорость, U – внутренняя энергия единицы массы, P – давление. Данную систему уравнений следует дополнить начальными и граничными условиями.

Чтобы данная система уравнений обеспечивала выполнение второго закона термодинамики, в ней применяется неравновесное давление, которое учитывает конечное время релаксации физической системы к равновесию [5]. Следствием конечного времени релаксации к равновесному состоянию является то, что при уменьшении объема газа с конечной скоростью он в каждый момент времени не находится в равновесии, и тогда неравновесное давление может быть представлено в виде

$$P = P^0 + \delta P, \quad (4)$$

где P^0 – равновесное давление, которое находится через уравнение состояния $P^0 = P^0(\rho, U)$, $\delta P = c^2 \delta \rho$ – неравновесная добавка, обусловленная локальным изменением массовой плотности среды при сжатии, c – скорость звука. Локальное изменение плотности определяется как $\delta \rho = \dot{\rho} \tau_{rel}$, где $\tau_{rel} = \xi / c$ – время релаксации к равновесию, ξ – характерный линейный размер рассматриваемого объема среды. Поскольку изменение плотности среды связано с изменением объема соотношением $\dot{\rho} / \rho = -\dot{V} / V$, то из сказанного выше следует, что при сжатии среды неравновесная добавка к давлению имеет вид при $\dot{V} < 0$:

$$\delta P = -\rho c \xi \dot{V} / V. \quad (5)$$

Адиабатическое расширение среды происходит за счет убыли внутренней энергии, причем максимальная скорость убыли внутренней энергии определяется свойствами самой среды и реализуется при равновесном процессе. Примером может служить разлет газа в пустоту [5], который является равновесным процессом (энтропия сохраняется). Таким образом, в случае расширения среды, когда $\dot{V} > 0$, величина $\delta P = 0$.

Для численного решения уравнений (1)–(3) на занятую область наносится неподвижная сетка $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_l$. Массовая скорость среды v_i определена в узлах, а центрах ячеек определяются термодинамические характеристики среды $\rho_{i+1/2}, m_{i+1/2}, P_{i+1/2}, U_{i+1/2}$.

Для построения численной схемы проинтегрируем уравнения (1) и (3) в интервале от x_i до x_{i+1} , а уравнение движения (2) – в интервале от $x_{i-1/2}$ до $x_{i+1/2}$. Для малых интервалов интегрирования можно записать соотношения:

$$m_{i+1/2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho dx = \rho_{i+1/2} \xi_{i+1/2}, \quad (mU)_{i+1/2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho U dx, \quad (mv)_i = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho v dx,$$

где $\xi_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$ есть объем ячейки с единичной поперечной площадью.

Сумма диагональных элементов тензора скоростей деформации определяет скорость относительного изменения объема и, соответственно, массовой плотности при сжатии или разрежении. В плоской геометрии разностный аналог этого выражения будет иметь вид:

$$(\nabla \vec{v})_{i+1/2} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i+1/2} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\xi_{i+1/2}} = \frac{\dot{V}_{i+1/2}}{\xi_{i+1/2}}.$$

Таким образом, имеем $\dot{V}_{i+1/2} = v_{i+1} - v_i$. Данное выражение характеризует изменение объема массы в ячейке только за счет процессов разрежения или сжатия без потоков массы через границы ячейки.

В результате интегрирования уравнения (1) получим:

$$\frac{\partial m_{i+1/2}}{\partial t} = -(J_{i+1} - J_i), \quad (6)$$

где потоки массы через границы ячеек вычисляются как в [2]:

$$J_i = v_i \begin{cases} \rho_{i-1/2}, & v_i > 0 \\ \rho_{i+1/2}, & v_i < 0 \end{cases}, J_{i+1} = v_{i+1} \begin{cases} \rho_{i+1/2}, & v_{i+1} > 0 \\ \rho_{i+3/2}, & v_{i+1} < 0 \end{cases}$$

Интегрирование уравнения (2) дает:

$$m_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial m_i}{\partial t} v_i = -(P_{i+1/2} - P_{i-1/2}) - (I_{i+1/2} - I_{i-1/2}), \quad (7)$$

где потоки импульса через границы $x_{i-1/2}$ и $x_{i+1/2}$ вычисляются аналогично потокам массы:

$$I_{i-1/2} = v_{i-1/2} \begin{cases} \rho_{i-1} v_{i-1}, & v_{i-1/2} > 0 \\ \rho_i v_i, & v_{i-1/2} < 0 \end{cases}, I_{i+1/2} = v_{i+1/2} \begin{cases} \rho_i v_i, & v_{i+1/2} > 0 \\ \rho_{i+1} v_{i+1}, & v_{i+1/2} < 0 \end{cases}$$

$$v_{i\pm 1/2} = 0,5(v_{i\pm 1} + v_i), \quad \rho_i = \frac{m_{i+1/2} + m_{i-1/2}}{x_{i+1} - x_{i-1}}, \quad m_i = 0,5(m_{i+1/2} + m_{i-1/2}).$$

Результат интегрирования уравнения (3) может быть представлен в виде

$$\frac{\partial(mU)_{i+1/2}}{\partial t} = -P_{i+1/2}(v_{i+1} - v_i) - (\mathfrak{S}_{i+1} - \mathfrak{S}_i), \quad (8)$$

где потоки внутренней энергии вычисляются аналогично потокам массы или импульса:

$$\mathfrak{S}_i = v_i \begin{cases} \rho_{i-1/2} U_{i-1/2}, & v_i > 0 \\ \rho_{i+1/2} U_{i+1/2}, & v_i < 0 \end{cases}, \mathfrak{S}_{i+1} = v_{i+1} \begin{cases} \rho_{i+1/2} U_{i+1/2}, & v_{i+1} > 0 \\ \rho_{i+3/2} U_{i+3/2}, & v_{i+1} < 0 \end{cases}$$

Уравнения (6)–(8) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений на всей пространственной сетке. Будем интегрировать эту систему на некотором временном интервале от t_n до t_{n+1} .

Полагая, что в интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ потоки массы через границы ячеек постоянны, решение уравнения (6) и новая плотность запишется в виде

$$m_{i+1/2}(t_{n+1}) = m_{i+1/2}(t_n) + (J_{i+1} - J_i)^n \Delta t, \quad \rho_{i+1/2}(t_{n+1}) = m_{i+1/2}(t_{n+1}) / \xi_{i+1/2}. \quad (9)$$

Чтобы получить систему дифференциальных уравнений для скорости, продифференцируем уравнение (7) по времени, полагая, что потоки массы, импульса и неравновесная добавка (5) постоянны в рассматриваемом временном интервале, то есть

$$\frac{\partial^2 m_i}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial I_{i+1/2}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \delta P_{i+1/2}}{\partial t} = 0.$$

Выразим также частную производную от давления по времени через субстанциональную производную:

$$\frac{\partial P_{i+1/2}^0}{\partial t} = \dot{P}_{i+1/2}^0 - \left(v \frac{\partial P^0}{\partial x} \right)_{i+1/2}. \quad (10)$$

Полную производную по времени в (10) представим в виде

$$\dot{P}_{i+1/2}^0 = (c^2 \dot{\rho})_{i+1/2} = -Q_{i+1/2}(v_{i+1} - v_i), \quad (11)$$

где $Q_{i+1/2} = \rho_{i+1/2} c_{i+1/2}^2 / \tilde{\xi}_{i+1/2}$, $\tilde{\xi}_{i+1/2}$ – эффективный объем ячейки, который учитывает, что при ее сжатии возмущается лишь слой. Таким образом, следуя [1], эффективный объем ячейки будет определяться выражением

$$\tilde{\xi}_{i+1/2} = \begin{cases} c \Delta t, & v_{i+1} - v_i < 0 \\ \xi_{i+1/2}, & v_{i+1} - v_i \geq 0 \end{cases}$$

С учетом сделанных замечаний и выражений (10) и (11) получим

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + 2\gamma_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \omega_i^2 v_i = L_i, \quad (12)$$

где

$$\gamma_i = \frac{1}{m_i} \frac{\partial m_i}{\partial t}, \quad \omega_i^2 = \frac{1}{m_i} (Q_{i+1/2} + Q_{i-1/2}), \quad L_i = \frac{1}{m_i} \left[(Q_{i+1/2} v_{i+1} + Q_{i-1/2} v_{i-1}) + \left(v \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+1/2} - \left(v \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2} \right].$$

Для построения разностной схемы для вычисления входящих в последнее выражение производных удобно представить $v\partial P/\partial x = \partial(vP)/\partial x - P\partial v/\partial x$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \left(v \frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i+1/2} &= \frac{1}{2\xi_{i+1/2}} \left[v_{i+1} (P_{i+3/2} - P_{i+1/2}) + v_i (P_{i+1/2} - P_{i-1/2}) \right], \\ \left(v \frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i-1/2} &= \frac{1}{2\xi_{i-1/2}} \left[v_i (P_{i+1/2} - P_{i-1/2}) + v_{i-1} (P_{i-1/2} - P_{i-3/2}) \right]. \end{aligned}$$

Здесь также уместно привести разностную аппроксимацию для вычисления неравновесной добавки к давлению:

$$\delta P_{i+1/2} = \begin{cases} -(c\rho)_{i+1/2} (v_{i+1} - v_i), & v_{i+1} - v_i < 0 \\ 0, & v_{i+1} - v_i \geq 0 \end{cases}.$$

Таким образом, выражение (12) представляет собой систему дифференциальных уравнений, решение которой позволит найти поле скоростей во всех узлах эйлеровой сетки. Для решения (12) необходимо задать начальные условия: $v_i(t_n) = v_i^n$ и $(\partial v_i / \partial t)^n$, которое находится из уравнения (7), где все величины в момент времени t_n должны быть известны. Подставляя (6) в (7), можно записать второе начальное условие в виде

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)^n = -\frac{1}{m_i(t_n)} \left\{ (P_{i+1/2} - P_{i-1/2}) + (\psi_{i+1/2} - \psi_{i-1/2}) \right\}^n,$$

где

$$\psi_{i+1/2} = \begin{cases} 0, & v_{i+1/2} \geq 0 \\ \rho_{i+1} (v_{i+1} - v_i) v_{i+1/2}, & v_{i+1/2} < 0 \end{cases}, \quad \psi_{i-1/2} = \begin{cases} \rho_{i-1} (v_{i-1} - v_i) v_{i-1/2}, & v_{i-1/2} > 0 \\ 0, & v_{i-1/2} \leq 0 \end{cases}.$$

Для малого временного шага можно получить простое аналитическое решение системы (12). Полагая в (12) найденные для момента t_n величины γ_i , ω_i^2 , L_i постоянными на шаге интегрирования, можно решение (12) записать в виде

$$v_i(t_{n+1}) = v_i^n + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)^n e^{-\gamma\Delta t} \frac{S(\Omega\Delta t)}{\Omega} + \left(\frac{L}{\omega^2} - v^n\right) \left[1 - e^{-\gamma\Delta t} \left(C(\Omega\Delta t) + \gamma \frac{S(\Omega\Delta t)}{\Omega} \right) \right], \quad (13)$$

где

$$\Omega^2 = \omega^2 - \gamma^2, \quad \Omega = \sqrt{|\Omega^2|}, \quad C(\Omega\Delta t) = \begin{cases} \cos(\Omega\Delta t), & \Omega^2 \geq 0 \\ \text{ch}(\Omega\Delta t), & \Omega^2 < 0 \end{cases}, \quad S(\Omega\Delta t) = \begin{cases} \sin(\Omega\Delta t), & \Omega^2 \geq 0 \\ \text{sh}(\Omega\Delta t), & \Omega^2 < 0 \end{cases}.$$

Для решения уравнения (8) воспользуемся методом разделения по физическим процессам, для чего представим искомое решение в виде

$$U_{i+1/2}(t) = U_{i+1/2}^n + \delta U_{i+1/2}^P + \delta U_{i+1/2}^{conv}, \quad (14)$$

где $\delta U_{i+1/2}^P$ – приращение внутренней энергии за счёт работы сил давления, $\delta U_{i+1/2}^{conv}$ – приращение внутренней энергии за счёт конвекции.

Уравнение для $\delta U_{i+1/2}^P$ запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta U_{i+1/2}^P = -\frac{1}{m_{i+1/2}^n} P_{i+1/2} \dot{V}_{i+1/2}, \quad (15)$$

Отметим, что в уравнении (15) не учитываются потоки массы и энергии, что соответствует описанию в переменных Лагранжа. Подставляя выражение (14) в уравнение (8) и учитывая (15), запишем уравнение для $\delta U_{i+1/2}^{conv}$ в виде

$$\frac{\partial (m \delta U_{i+1/2}^{conv})}{\partial t} = -(\mathfrak{F}_{i+1} - \mathfrak{F}_i) - \left(\frac{\partial m_{i+1/2}}{\partial t}\right) U_{i+1/2}^n. \quad (16)$$

Уравнение (16) записано в переменных Эйлера.

Начальные условия для уравнений (15), (16) имеют вид $\delta U_{i+1/2}^P(t_n) = \delta U_{i+1/2}^{conv}(t_n) = 0$.

Интегрируя по времени выражение (11) от t_n до $t \leq t_{n+1}$ и учитывая (4), запишем выражение

$$P_{i+1/2}(t) = P_{i+1/2}^0(t_n) + \delta P_{i+1/2} - Q_{i+1/2} (V(t) - V(t_n))_{i+1/2}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (15), получим после интегрирования выражение

$$\delta U_{i+1/2}^P = \frac{1}{m_{i+1/2}^n} \left[-P(t_n) \Delta V + Q \frac{\Delta V^2}{2} \right]_{i+1/2}, \quad (18)$$

где $\Delta V_{i+1/2} = \dot{V}_{i+1/2} \cdot \Delta t$.

Интегрирование уравнения (16) с учетом (6) приводит к выражению

$$\delta U_{i+1/2}^{conv} = \frac{\Delta t}{m_{i+1/2}^{n+1}} \left\{ \left[\rho_{i+3/2} (U_{i+3/2} - U_{i+1/2}) v_{i+1} \right]_{v_{i+1} < 0} - \left[\rho_{i-1/2} (U_{i-1/2} - U_{i+1/2}) v_i \right]_{v_i > 0} \right\}^n. \quad (19)$$

Таким образом, здесь приведен полный набор формул для описания динамики газа или жидкости в одномерной геометрии. Выражения (9) с приведенными в (6) потоками позволяют определить массы и плотности вещества в ячейках в новый момент времени. Выражение (13) позволяет вычислить новое поле скоростей, а выражения (14), (17) и (18) – внутренние энергии в ячейках. Новые равновесные давления и температура находятся с помощью уравнения состояния.

Основным приближением, которое было сделано при интегрировании системы (1)–(3), является постоянство $Q_{i+1/2}$ на шаге интегрирования Δt . Это приближение выполняется, если на шаге интегрирования относительное изменение объема мало, то есть

$$\Delta t \left| \frac{v_{i+1} - v_i}{\xi_{i+1/2}} \right| < \varepsilon_H,$$

где ε_H – некоторая малая величина. Данное условие позволяет найти величину шага интегрирования рассматриваемой системы. В случае состояний среды, близких к покою, или в случае гладких течений сформулированный выше критерий для выбора временного шага работать не будет. Поэтому для выбора временного шага при интегрировании уравнений применяется комплексный критерий, включая условие Куранта:

$$\Delta t = \min \left(\frac{\varepsilon_H \xi_{i+1/2}}{|v_{i+1} - v_i|}, \frac{\varepsilon_C \xi}{c} \right), \quad (20)$$

где $\varepsilon_C \sim 1/3$ – характерная константа в условии Куранта, $\varepsilon_H \sim 0,01$. Условие (20) проверяется для всех ячеек. Обычно оба условия дают близкие значения временных шагов, однако в области распространения ударных волн первое условие будет определяющим.

Точность интегрирования рассматриваемой системы можно повысить, решение (13) осуществить в два этапа. На первом этапе по формуле (13) для момента времени $t_{n+1/2} = t_n + \Delta t/2$ находится поле скоростей $v_i^{n+1/2}$, $L_i^{n+1/2}$, а также потоки массы и энергии через границы ячеек. На втором этапе по формуле (13), в которой вместо L_i^n подставлено $L_i^{n+1/2}$, находим v_i^n . По формулам (9) и (18) вычисляются новая масса, плотность и внутренняя энергия через потоки для момента $t_{n+1/2}$.

Тестовые расчеты

Для верификации полуаналитического метода в эйлеровых координатах были решены одномерные задачи о распаде произвольного разрыва, о распространении стационарных ударных волн различной интенсивности и проведено сравнение полученного решения с аналитическим и решением, полученным базовым методом крупных частиц.

Задача 1. Распад произвольного разрыва. В некоторой области, ограниченной отрезком $[0;1]$ (см), находится газ, в начальный момент времени ($t = 0$) разделенный контактной границей на две подобласти. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Геометрия сетки: $N = 800$ равномерно распределенных точек вдоль оси x .

Начальные распределения параметров газа вдоль пространственной координаты x равны

$$\rho_1 = 3,87 \text{ кг/м}^3; T_1 = 611,5 \text{ К}; U_1 = 0 \text{ м/с}; P_1 = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Па}; x \leq 0,5 \text{ см};$$

$$\rho_0 = 2,58 \text{ кг/м}^3; T_0 = 91,7 \text{ К}; U_0 = 0 \text{ м/с}; P_0 = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Па}; x > 0,5 \text{ см}.$$

На рис. 1 представлены распределения параметров на момент времени $t = 4,5$ мкс. Решение, полученное полуаналитическим методом (ПА метод), совпадает с аналитическим решением [6], что говорит о высокой точности метода. Исходя из графиков, видно, что в момент времени, отличный от нуля, влево начинает распространяться волна разрежения, вправо – ударная волна. Решение, полученное численными методами, имеет «размытие» в области контактного разрыва. Решение, полученное базовым МКЧ, дает небольшой скачок параметров на фронте ударной волны.

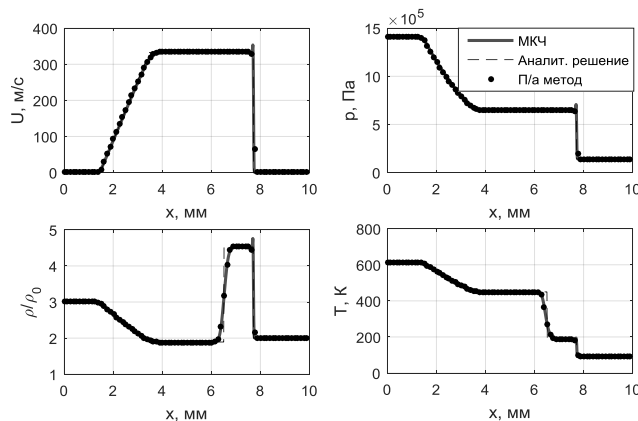


Рис. 1. Распад произвольного разрыва. Распределения скорости, давления, безразмерной плотности и температуры на момент времени $t = 4,5$ мкс

Задача 2. Распространение сильной ударной волны (УВ). В некоторой области, ограниченной отрезком $[0;1]$ (см), находится газ (показатель адиабаты $\gamma = 5/3$), начальные значения параметров которого равны:

$$\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3, T_0 = 300 \text{ К}, U_0 = 0 \text{ м/с}, P_0 = 2,29 \cdot 10^5 \text{ Па}; 0 < x \leq 1 \text{ см}.$$

Через границу ($x = 0$) в расчетную область втекает стационарный поток с параметрами:

$$P_1 = 10P_0, U_1, T_1, \rho_1.$$

Параметры U_1, T_1, ρ_1 рассчитываются из соотношений на разрыве (соотношения Ренкина–Гюгонио). Геометрия сетки: $N = 800$ равномерно распределенных точек вдоль оси x .

На рис. 2 представлены распределения параметров падающей сильной ударной волны на момент времени $t = 3$ с. На рис. 3 представлены распределения параметров отраженной ударной волны на момент времени $t = 9$ с. Полуаналитический метод дает хорошее совпадение с точным решением как для падающей, так и для отраженной ударных волн, в отличие от МКЧ. Решение, полученное базовым методом крупных частиц, имеет сильные осцилляции при отражении ударной волны от жесткой стенки. Это говорит о том, что МКЧ нуждается в введении дополнительных слагаемых, обеспечивающих устойчивость решения, не всегда имеющих физическую обоснованность. Одним из способов обеспечения устойчивости решения МКЧ является введение искусственной вязкости [7], в которую входят эмпирические константы. Использование таких слагаемых делает метод не универсальным. В то же время полуаналитический метод не требует введения никаких искусственных добавок.

Задача 3. Распространение слабой УВ. В некоторой области, ограниченной отрезком $[0;1]$ (см), находится газ (показатель адиабаты $\gamma = 5/3$), начальные значения параметров которого равны:

$$\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3, T_0 = 300 \text{ К}, U_0 = 0 \text{ м/с}, P_0 = 2,29 \cdot 10^5 \text{ Па}; 0 < x \leq 1 \text{ см}.$$

Через границу ($x = 0$) в расчетную область втекает стационарный поток с параметрами

$$P_1 = 1,5P_0, U_1, T_1, \rho_1.$$

Параметры U_1, T_1, ρ_1 рассчитываются из соотношений на разрыве. Геометрия сетки: $N = 800$ равномерно распределенных точек вдоль оси x .

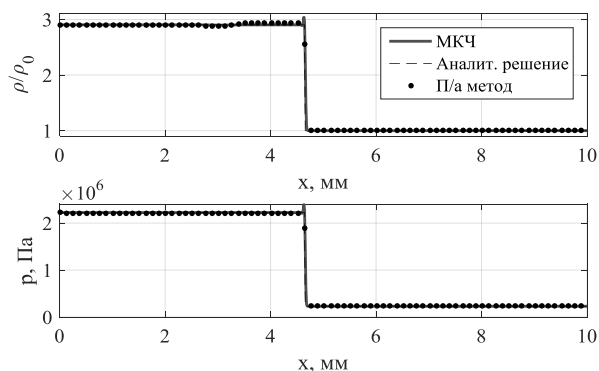


Рис. 2. Распространение сильной ударной волны. Распределения безразмерной плотности и давления на момент времени $t = 3$ мкс

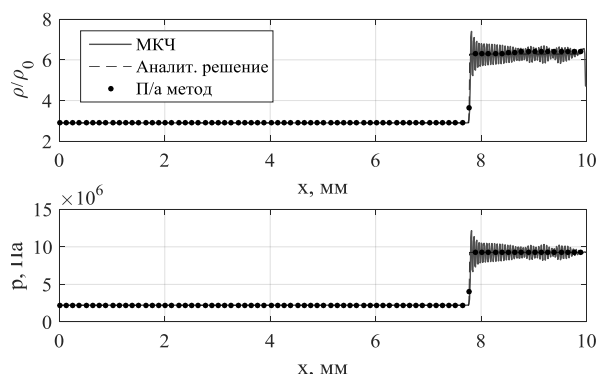


Рис. 3. Распространение сильной ударной волны. Распределения безразмерной плотности и давления на момент времени $t = 9$ мкс

На рис. 4 представлены распределения параметров падающей ударной волны на момент времени $t = 6$ мкс. На рис. 5 представлены распределения параметров отраженной ударной волны на момент времени $t = 24$ мкс.

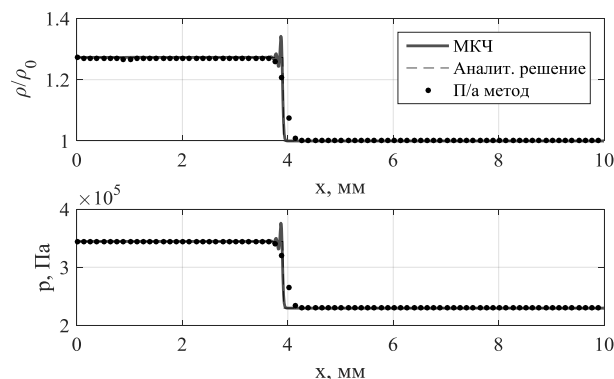


Рис. 4. Распространение слабой УВ. Распределения безразмерной плотности и давления на момент времени $t = 6$ мкс

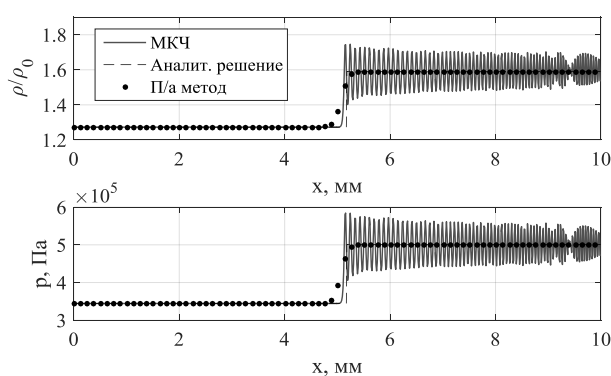


Рис. 5. Распространение слабой УВ. Распределения безразмерной плотности и давления на момент времени $t = 24$ мкс

Исходя из полученных графиков для слабой ударной волны, видно, что решение, полученное базовым методом крупных частиц, не совпадает с аналитикой и показывает сильные осцилляции, то есть метод не устойчив при описании распространения слабых ударных волн. В свою очередь решение, полученное рассматриваемым методом, полностью совпадает с аналитическим, что говорит об универсальной применимости данного метода для решения различных прикладных задач.

Заключение

В данной работе представлен полуаналитический метод в эйлеровых координатах для решения задач гидрогазодинамики. Представлены результаты верификации данного метода на одномерных задачах и сравнение с другим численным методом. Предложенный в данной работе метод показывает высокую точность для ударных волн различной интенсивности, что делает метод универсальным и применимым для различных прикладных задач.

Данный метод применим для расчетов в многомерном случае, поскольку в этом случае описанный здесь алгоритм решения задачи сохраняется полностью.

Литература

1. Яловец, А.П. Расчет течений среды при воздействии интенсивных потоков заряженных частиц / А.П. Яловец // Прикладная механика и техническая физика. – 1997. – Т. 38, № 1. – С. 151–166.

2. Белоцерковский, О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский. – М.: Физматлит, 1994. – С. 27–39.
3. Shestakovskaya, E.S. On one Method of Calculating Moving Boundaries in Euler Coordinates / E.S. Shestakovskaya, Ya.E. Starikov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2019. – Т. 6, № 4. – Р. 44–56.
4. Беляев, П.Е. Влияние экранирующего слоя газозвеси на силовое воздействие ударной волны на жёсткую стенку / П.Е. Беляев, Н.Л. Клиначева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2016. – Т. 8, № 4. – С. 49–55.
5. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 733 с.
6. Куропатенко, В.Ф. Основы численных методов механики сплошной среды: монография / В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская. – Челябинск: Издат. центр Южно-Уральского государственного университета, 2017. – 253 с.
7. Садин, Д.В. Модификация метода крупных частиц до схемы второго порядка точности по пространству и времени для ударно-волновых течений газозвеси / Д.В. Садин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 112–122.

Поступила в редакцию 27 марта 2023 г.

Сведения об авторах

Жарылканова Мадина Салимжановна – студент, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: zharylkanovams@susu.ru

Клиначева Наталия Леонидовна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: klinachevanl@susu.ru

Яловец Александр Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Вычислительная механика», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: yalovetsap@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2023, vol. 15, no. 2, pp. 32–40

DOI: 10.14529/mmph230205

SEMIANALYTIC METHOD FOR SOLVING GAS DYNAMICS EQUATIONS IN EULER VARIABLES

M.S. Zharylkanova, N.L. Klinacheva, A.P. Yalovets
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: klinachevanl@susu.ru

Abstract. This paper presents a semi-analytical method for solving a system of equations of gas dynamics in Eulerian coordinates. Since only spatial derivatives are replaced by finite differences, the system of gas dynamic equations is reduced to a system of ordinary differential equations on a spatial grid. An approximate analytical solution of this system of differential equations for a small time-interval is used to describe the dynamics of a gas in the entire required time interval. Verification was carried out on one-dimensional test problems on the decay of an arbitrary discontinuity and the propagation of stationary shock waves of various intensities. To compare one-dimensional problems, the solution of test problems is given by the simple-to-implement basic particle-in-cell method. It is shown that the semi-analytical method has high accuracy of calculations, and is also the most universal method for calculating applied problems.

Keywords: semi-analytical method; particle-in-cell method; shock wave; decay of an arbitrary discontinuity.

References

1. Yalovets A.P. Raschet techeniy sredy pri vozdeystvii intensivnykh potokov zaryazhennykh chastits (Calculation of Medium Flows under the Influence of Intense Flows of Charged Particles). *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1997, Vol. 38, no. 1, pp. 151–166. (in Russ.).
2. Belotserkovskiy O.M. *Chislennoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred* (Numerical Modeling in Continuum Mechanics). Moscow, Fizmatlit Publ., 1994, pp. 27–39. (in Russ.).
3. Shestakovskaya E.S., Starikov Ya.E. On One Method of Calculating Moving Boundaries in Euler Coordinates. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, Vol. 6, no. 4, pp. 44–56. DOI: 10.14529/jcem190404
4. Belyaev P.E., Klinacheva N.L. Impact of Gas Suspension Shielding Layer on the Force Effect of Shock Waves on a Rigid Wall. *Bulletin of the South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2016, Vol. 8, no. 4, pp. 49–55. (in Russ.). DOI:10.14529/mmph160406
5. Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika* (Hydrodynamics), Moscow: Nauka Publ., 1988, 733 p. (in Russ.).
6. Kuropatenko V.F., Shestakovskaya E.S. *Osnovy chislennykh metodov mekhaniki sploshnoy sredy: monografiya* (Fundamentals of Numerical Methods of Continuum Mechanics: Monograph), Chelyabinsk, Izdat. tsentr Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta Publ., 2017, 253 p. (in Russ.).
7. Sadin D.V. A Modification of the Large-Particle Method to a Scheme Having the Second Order of Accuracy in Space and Time for Shockwave Flows in a Gas Suspension. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematical Modelling, Programming and Computer Software”*, 2019, Vol. 12, no. 2, pp. 112–122. DOI: 10.14529/mmp190209

Received March 27, 2023

Information about the authors

Zharylkanova Madina Salimzhanovna is Student, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: zharylkanovams@susu.ru

Klinacheva Nataliya Leonidovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of “Computational Mechanics”, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: klinachevanl@susu.ru

Yalovets Aleksandr Pavlovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of “Computational Mechanics”, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: yalovetsap@susu.ru