

## МАГНИТОДИНАМИКА РАЗБАВЛЕННОГО ФЕРРОКОЛЛОИДА В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

**А.А. Кузнецов**

Венский университет, г. Вена, Австрия

E-mail: andrey.kuznetsov@univie.ac.at

**Аннотация.** Работа посвящена теоретическому исследованию разбавленной суспензии магнитных наночастиц при совместном действии на неё простого сдвигового течения и постоянного магнитного поля. Основное внимание уделено динамике вектора намагниченности системы. В первую очередь рассмотрен предельный случай, при котором влиянием вращательной броуновской диффузии на поведение частиц можно пренебречь. Показано, что в зависимости от соотношения гидродинамического и магнитного вращательных моментов атермальная магнитодинамика наночастиц может иметь периодический либо аperiodический характер. Дополнительный учёт влияния тепловых флуктуаций произведен в рамках теории эффективного поля Марцениюка–Райхера–Шлиомиса. Показано, что при любой ненулевой температуре намагниченность ферроколлоида за конечное время принимает некоторую стационарную ориентацию. Направление намагниченности в общем случае не совпадает с направлением поля. Равновесная (параллельная внешнему магнитному полю) и неравновесная (перпендикулярная внешнему полю) компоненты намагниченности рассчитаны как функции двух безразмерных параметров – числа Мейсона (т. е. отношения гидродинамического вращательного момента к магнитному) и числа Пекле (т. е. отношения гидродинамического момента к тепловому). Продемонстрировано, что неравновесная компонента всегда является немонотонной функцией числа Мейсона, но при этом всегда увеличивается с ростом числом Пекле.

*Ключевые слова:* магнитные наночастицы; ферроколлоид; сдвиговое течение; неравновесная магнитодинамика.

### Введение

Ферроколлоиды, или магнитные жидкости, – это коллоидные растворы однодоменных наночастиц в немагнитной жидкости-носителе [1]. Сочетание высокой магнитной восприимчивости со способностью сохранять текучесть в широком диапазоне внешних воздействий обуславливают активное применение этой искусственно синтезируемой субстанции в различных отраслях промышленности и медицине. Примеры применения включают адаптивные демпферы и уплотнители [2], системы магнитожидкостного охлаждения [3], магнитные смазки [4], системы адресной доставки лекарств [5], магнитную гипертермию опухолевых заболеваний [6] и magnetic particle imaging [7].

Известно, что теоретическое понимание магнитных, транспортных и реологических свойств реальных ферроколлоидов требует корректного учёта многих факторов, включая межчастичные взаимодействия, полидисперсность и броуновское движение [8]. Особую сложность для исследователей представляет поведение магнитных наноансамблей в неравновесных условиях, примером которых может являться сильное сдвиговое течение. До сих пор теоретический анализ ферроколлоидов в потоке ограничивался лишь изменением *реологических* свойств системы во внешнем поле [9, 10]. В этой работе мы попытаемся детально изучить, как комбинация течения и внешнего поля влияют на *магнитные* свойства суспензии, а именно на динамику её намагниченности.

### Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим суспензию идентичных сферических частиц диаметром  $d$ . Каждая частица обладает постоянным по величине магнитным моментом  $\mu$ . Частицы погружены в ньютоновскую жидкость с динамической вязкостью  $\eta$ . В системе создано простое сдвиговое течение со скоростью сдвига  $\dot{\gamma}$ . На систему дополнительно действует однородное магнитное поле  $\mathbf{H}$ . Вектор поля лежит в плоскости сдвига и перпендикулярен вектору скорости потока. Система термостатирована

на и поддерживается при постоянной температуре  $T$ . Выберем лабораторную систему координат так, чтобы поле было направлено вдоль оси  $Z$ , т. е.  $\mathbf{H} = \{0, 0, H\}$ , а скорость потока – вдоль оси  $X$ ,  $\mathbf{U} = \{\dot{\gamma}z, 0, 0\}$ .

Целью работы является анализ поведения вектора намагниченности системы  $\mathbf{M}$  при совместном воздействии магнитного поля и сдвигового течения. Задача будет рассматриваться в следующих предположениях:

- система сильно разбавлена, и взаимодействием между частицами можно пренебречь;
- внутренняя магнитная анизотропия частиц достаточно велика, чтобы магнитные моменты были «вморожены» в частицы (т. е. ориентация магнитных моментов может меняться только вследствие механического вращения частиц);
- взаимодействие частиц с потоком можно рассматривать в рамках приближения Стокса (т. е. в приближении малых чисел Рейнольдса).

Уравнение вращательного движения для одиночной частицы в вязкой жидкости можно записать следующим образом [11]:

$$J \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mu_0 [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}] + \Gamma (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}), \quad (1)$$

где  $J$  – момент инерции частицы,  $\boldsymbol{\omega}$  – её угловая скорость. Поскольку магнитный момент «вморожен» в частицу, справедливо соотношение

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu}]. \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (1) представляет магнитный вращательный момент, создаваемый полем. Второе слагаемое – гидродинамический вращательный момент,  $\boldsymbol{\Omega} = (1/2)[\nabla \times \mathbf{U}] = \{0, \dot{\gamma}/2, 0\}$  – завихренность потока,  $\Gamma = \eta\pi d^3$  – коэффициент трения. Инерционным слагаемым в левой части уравнения (1) традиционно можно пренебречь благодаря допущению о малых числах Рейнольдса [12].

Введем безразмерный вектор намагниченности  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$ ,  $M_s$  – намагниченность насыщения. Будем рассматривать динамику вектора  $\mathbf{m}$  в плоскости сдвига, т. е. будем искать решение в форме  $\mathbf{m} = \{m_x, 0, m_z\}$ . В отсутствие тепловых флуктуаций уравнения для вектора намагниченности будут идентичны уравнениям (1)–(2), запишем их в форме

$$\frac{dm_x}{d\tau} = m_z - \frac{m_z m_x}{Ma}, \quad (3)$$

$$\frac{dm_z}{d\tau} = -m_x + \frac{m_x^2}{Ma}, \quad (4)$$

где  $\tau = \Omega t$  – безразмерное время,  $Ma = \Gamma\Omega/\mu_0\mu H$  – вращательное число Мейсона, отношение гидродинамического вращающего момента к магнитному [13].

Влияние броуновского движения на динамику намагниченности учтем в рамках теории эффективного поля Марценюка–Райхера–Шлиомиса [14–15]. В общем виде уравнение для намагниченности разбавленного ферроколлоида в рамках этой теории можно записать в форме

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = [\mathbf{o} \times \mathbf{m}] - \frac{1}{Ma} \frac{\zeta - m}{\zeta m^2} [\mathbf{m} \times [\mathbf{m} \times \mathbf{h}]] - \frac{1}{Pe} \frac{\zeta^2 - \xi \cdot \zeta}{\zeta^2} \mathbf{m}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{o} = \boldsymbol{\Omega}/\Omega$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ ,  $Pe = \Gamma\Omega/2k_B T$  – вращательное число Пекле,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $\xi = \mu_0\mu\mathbf{H}/k_B T$  – т. н. параметр Ланжевена. В термодинамическом равновесии (при  $\Omega = 0$ ) намагниченность зависит от параметра Ланжевена как  $\mathbf{m} = L(\xi)\mathbf{h}$ ,  $L(\xi) = \coth \xi - 1/\xi$  – функция Ланжевена.  $\zeta$  – эффективное поле, основной параметр описываемой теории. В произвольном неравновесном состоянии этот параметр связан с мгновенным значением намагниченности  $\zeta = L^{-1}(m)\mathbf{m}/m$ . В термодинамическом равновесии  $\zeta = \xi$ . В нашей предыдущей работе [16] уравнение (5) было детально протестировано на примере задачи о динамике намагниченности ферроколлоида в переменном поле произвольной амплитуды и частоты. Прямое сравнение с ре-

результатами численного моделирования методом Ланжевеновской динамики показало высокую точность уравнения (5) вдали от термодинамического равновесия. Получим из (5) уравнения для компонент намагниченности по аналогии с (3)–(4):

$$\frac{dm_x}{d\tau} = m_z - \frac{m_z m_x}{Ma} \frac{\zeta - 3m}{\zeta m^2} - \frac{m_x}{Pe}, \quad (6)$$

$$\frac{dm_z}{d\tau} = -m_x + \frac{m_x^2}{Ma} \frac{\zeta - 3m}{\zeta m^2} + \frac{2}{Ma} \frac{m}{\zeta} - \frac{m_z}{Pe}. \quad (7)$$

Уравнения (3)–(4) и (6)–(7) в этой работе решались численно с помощью функции `odeint` библиотеки `scipy` [17].

## Результаты

В первую очередь рассмотрим частный случай атермальной динамики, описываемый уравнениями (3) и (4). Формально этот случай соответствует пределу  $Pe \rightarrow \infty$ . Для определенности предположим, что в начальный момент суспензия находилась в состоянии насыщения, т. е.  $\mathbf{m}(\tau=0) = \{0, 0, 1\}$ . Расчётные зависимости компонент намагниченности от времени при различных числах Мейсона показаны на рис. 1. Можно видеть, что при  $Ma \gg 1$  влияние внешнего поля слабо и вектор намагниченности равномерно вращается, увлекаемый вихрем скорости потока. Угловая скорость вращения близка к  $\Omega$ . По мере уменьшения числа Мейсона скорость вращения замедляется, а само вращение становится нелинейным – временные зависимости  $m_x$  и  $m_z$  пере-

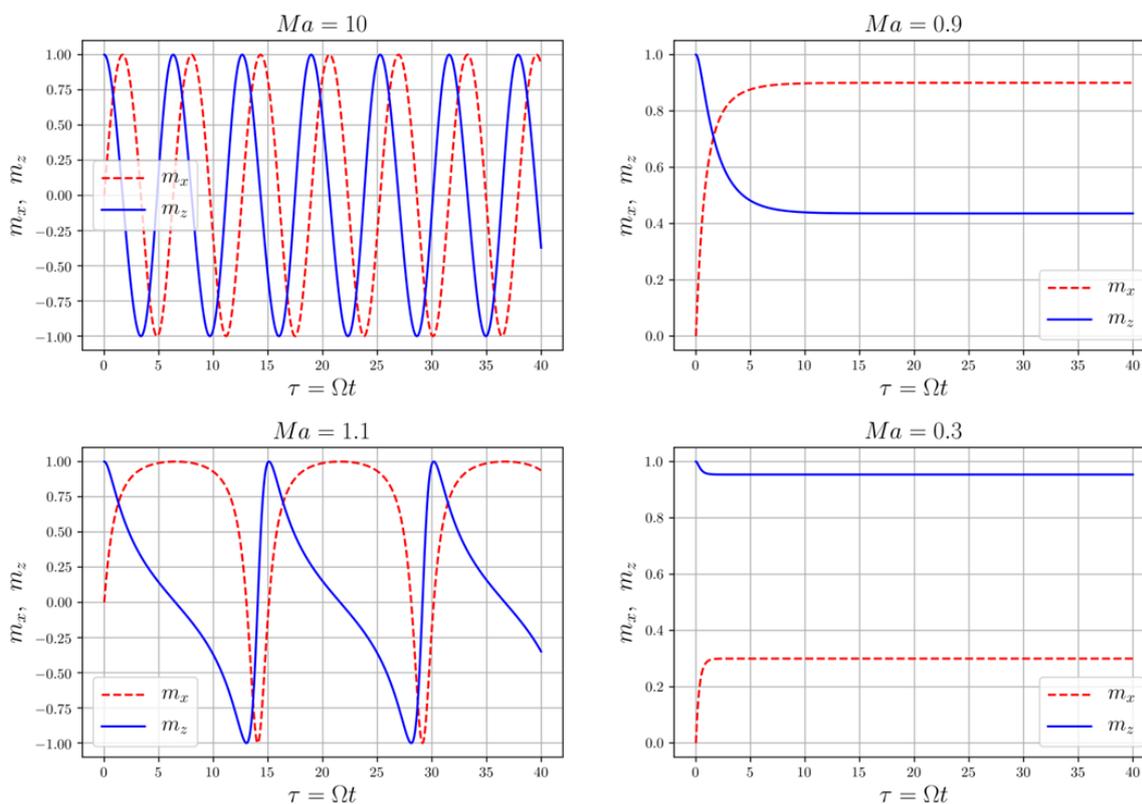


Рис. 1. Динамика компонент намагниченности в атермальном приближении.

Численное решение уравнений (3) и (4). Разные панели отвечают разным значениям числа Мейсона

стают следовать гармоническому закону. Наконец, когда число Мейсона становится меньше критического значения  $Ma = 1$  (т. е. когда воздействия магнитного поля на частицу становится сильнее влияния сдвигового течения), картина качественно меняется. Динамика намагниченности становится аперриодической – со временем она принимает некоторую постоянную ориентацию по отношению к вектору поля. Чем ниже число Мейсона, тем ближе система к состоянию насыщения.

Рис. 2 показывает, как меняется динамика намагниченности под влиянием тепловых флуктуаций. Ключевой результат в том, что теперь вектор намагниченности всегда принимает неко-

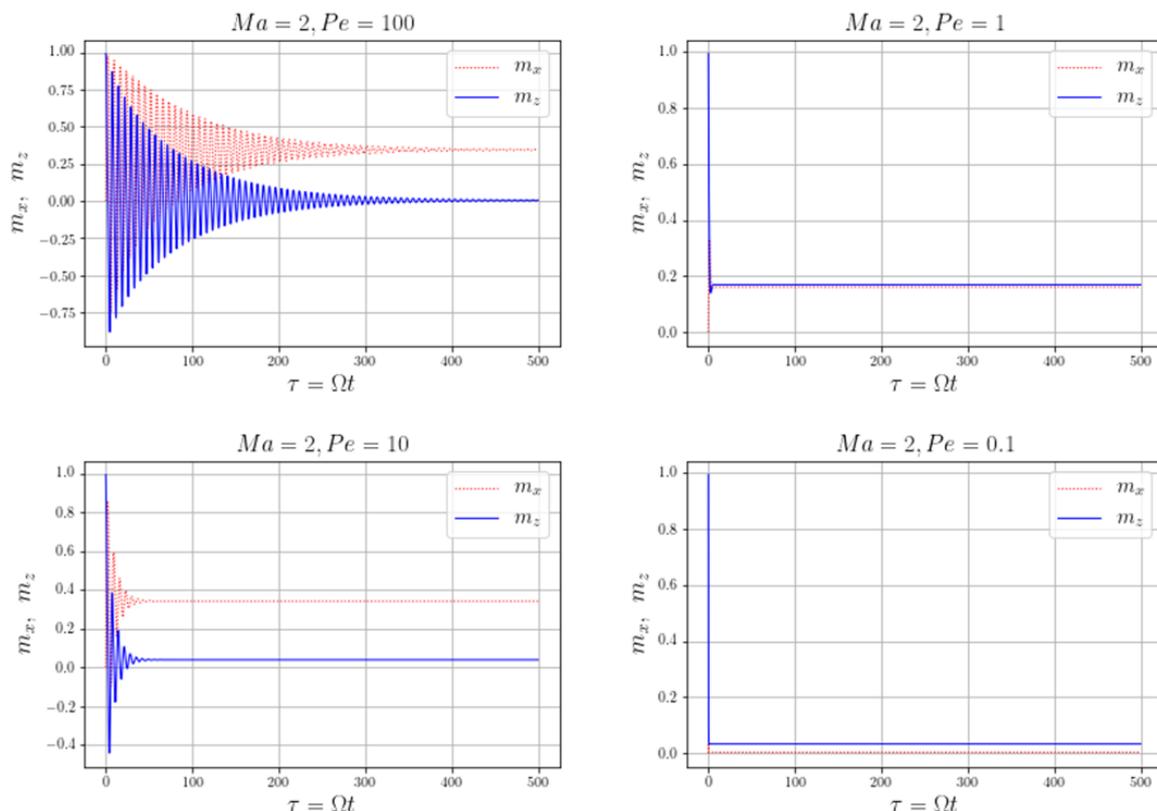


Рис. 2. Динамика компонент намагниченности с учетом тепловых флуктуаций. Численное решение уравнений (6) и (7). Разные панели отвечают разным значениям числа Пекле (число Мейсона всюду  $Ma = 2$ )

торую стационарную ориентацию, независимо от значения числа Мейсона. Теперь при  $Ma > 1$  колебания намагниченности носят затухающий характер. Амплитуда колебаний экспоненциально падает со временем. Чем ниже число Пекле, тем быстрее происходит затухание. Ещё одна особенность – уравнения (6)–(7) не сохраняют длину вектора (в отличие от (3)–(4)). Чем ниже  $Pe$ , тем меньше  $m$  – присутствие тепловых флуктуаций разупорядочивает магнитные моменты частиц и ведет к ослаблению полного магнитного отклика.

Рис. 3 показывает, как зависит величина и ориентация намагниченности в стационарном состоянии от двух управляющих параметров,  $Pe$  и  $Ma$ . Видно, что компонента  $m_x$  (т. е. компонента намагниченности, перпендикулярная к полю, её можно назвать «неравновесной») всегда немонотонно зависит от числа Мейсона. В пределе  $Ma = 0$  система стремится к магнитному насыщению, т. е.  $\mathbf{m} = \{0, 0, 1\}$ . В противоположном случае, при  $Ma \gg 1$ , влияние течения столь велико, что усредненный по всем частицам суспензии полный магнитный момент стремится к нулю. С уменьшением числа Пекле компонента  $m_x$  монотонно падает при любом  $Ma$ . «Равновесная» компонента намагниченности  $m_z$  всегда монотонно уменьшается с числом Мейсона. Зависимость  $m_z$  от числа Пекле имеет различный характер в областях  $Ma < 1$  и  $Ma > 1$ . В первом случае имеет место монотонный рост  $m_z$  с  $Pe$ . Предельное стационарное решение для  $Pe \gg 1$  можно найти из (3)–(4), потребовав равенства нулю производных по времени:  $m_z(Ma < 1, Pe \gg 1) = \sqrt{1 - Ma^2}$ ,  $m_x(Ma < 1, Pe \gg 1) = Ma$ . В области  $Ma > 1$  зависимость равновесной компоненты намагниченности от числа Пекле носит немонотонный характер, максимальное значение  $m_z$  здесь достигается при  $Pe \sim 1$ .

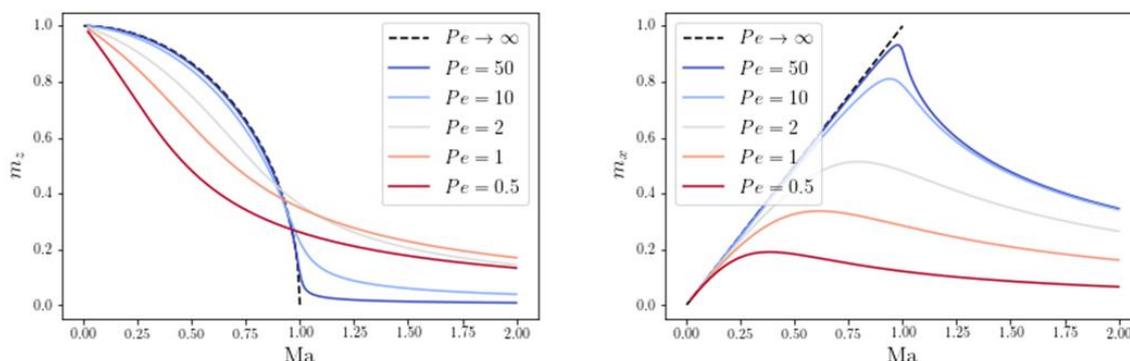


Рис. 3. Стационарные значения «равновесной» ( $m_z$ ) и «неравновесной» ( $m_x$ ) компонент намагниченности в зависимости от числа Мейсона  $Ma$  при различных значениях числа Пекле  $Pe$

### Заключение

В работе теоретически исследована динамика намагниченности разбавленного монодисперсного ферроколлоида при одновременном действии на него простого сдвигового течения и однородного стационарного магнитного поля. Основным инструментом исследования являлась теория эффективного поля Марценюка–Райхера–Шлиомиса [14]. Было обнаружено, что в зависимости от соотношения магнитного и гидродинамического вращающих моментов, действующих на частицы, атермальная динамика намагниченности может иметь периодический либо аперриодический характер. Это, однако, не справедливо при дополнительном учёте тепловых флуктуаций вращения частиц. При любой ненулевой температуре (иными словами, при любом конечном вращательном числе Пекле) вектор намагниченности системы принимает некоторую фиксированную ориентацию. В общем случае намагниченность направлена под углом к внешнему полю.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19-31-60036).*

### Литература

1. Шлиомис М.И. Магнитные жидкости / М.И. Шлиомис // Успехи физических наук. – 1974. – Т. 112, № 3. – С. 427–458.
2. Novel Highly Elastic Magnetic Materials for Dampers and Seals: Part II. Material Behavior in a Magnetic Field / S. Abramchuk, E. Kramarenko, D. Grishin *et al.* // Polymers for Advanced Technologies. – 2007. – Vol. 18, no. 7. – P. 513–518.
3. Affecting Forced Convection Enhancement in Ferrofluid Cooling Systems / W. Cherief, Y. Avenas, S. Ferrouillat *et al.* // Applied Thermal Engineering. – 2017. – Vol. 123. – P. 156–166.
4. Study on the Ferrofluid Lubrication with an External Magnetic Field / W. Huang, C. Shen, S. Liao, X. Wang // Tribology Letters. – 2011. – Vol. 41, no. 1. – P. 145–151.
5. Efficient Drug-Delivery using Magnetic Nanoparticles–Biodistribution and Therapeutic Effects in Tumour Bearing Rabbits / R. Tietze, S. Lyer, S. Dürr *et al.* // Nanomedicine: Nanotechnology, Biology and Medicine. – 2013. – Vol. 9, no. 7. – P. 961–971.
6. Fundamentals and Advances in Magnetic Hyperthermia / E.A. Périgo, G. Hemery, O. Sandre *et al.* // Applied Physics Reviews. – 2015. – Vol. 2, no 4. – P. 041302.
7. Magnetic Particle Imaging-Guided Heating in vivo Using Gradient Fields for Arbitrary Localization of Magnetic Hyperthermia Therapy / Z.W. Tay, P. Chandrasekharan, A. Chiu-Lam *et al.* // ACS nano. – 2018. – Vol. 12, no. 4. – P. 3699–3713.
8. Magnetic Properties of Polydisperse Ferrofluids: A Critical Comparison between Experiment, Theory, and Computer Simulation / Ivanov A.O., Kantorovich S.S., Reznikov E.N. *et al.* // Physical Review E. – 2007. – Vol. 75, Iss. 6. – P. 061405.
9. Soto-Aquino, D. Magnetoviscosity in dilute ferrofluids from rotational Brownian dynamics simulations / D. Soto-Aquino, C. Rinaldi // Physical Review E. – 2010. – Vol. 82, Iss. 4. – P. 046310.

10. Zubarev, A.Y. Rheological Properties of Dense Ferrofluids. Effect of Chain-Like Aggregates / A.Y. Zubarev, S. Odenbach, J. Fleischer // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2002. – Vol. 252. – P. 241–243.
11. Raikher, Y.L. The Effective Field Method in the Orientational Kinetics of Magnetic Fluids and Liquid Crystals / Y.L. Raikher, M.I. Shliomis // *Advances in Chemical Physics*. – 1994. – Vol. 87. – P. 595–752.
12. Brenner, H. Rheology of a Dilute Suspension of Dipolar Spherical Particles in an External Field / H. Brenner // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 1970. – Vol. 32, Iss. 1. – P. 141–158.
13. Klingenberg, D.J. Mason Numbers for Magnetorheology / D.J. Klingenberg, J.C. Ulicny, M.A. Golden // *Journal of Rheology*. – 2007. – Vol. 51, no. 5. – P. 883–893.
14. Martsenyuk, M.A. On the Kinetics of Magnetization of Suspension of Ferromagnetic Particles / M.A. Martsenyuk, Y.L. Raikher, M.I. Shliomis // *Soviet Physics-JETP*. – 1974. – Vol. 38, no. 2. – P. 413–416.
15. Shliomis, M.I. Ferrohydrodynamics: Testing a Third Magnetization Equation / M.I. Shliomis // *Physical Review E*. – 2001. – Vol. 64, Iss. 6. – P. 060501.
16. Kuznetsov, A.A. Nonlinear response of a dilute ferrofluid to an alternating magnetic field / A.A. Kuznetsov, A.F. Pshenichnikov // *Journal of Molecular Liquids*. – 2022. – Vol. 346. – P. 117449.
17. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>

Поступила в редакцию 1 декабря 2022 г.

### Сведения об авторах

Кузнецов Андрей Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, постдок, Венский университет, г. Вена, Австрия, e-mail: andrey.kuznetsov@univie.ac.at

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*  
2023, vol. 15, no. 2, pp. 59–65

---

DOI: 10.14529/mmph230208

## MAGNETODYNAMICS OF A DILUTE FERROCOLLOID IN A SHEAR FLOW

### A.A. Kuznetsov

University of Vienna, Vienna, Austria  
E-mail: andrey.kuznetsov@univie.ac.at

Abstract. The work is devoted to a theoretical study of a dilute suspension of magnetic nanoparticles under the combined action of a simple shear flow and a constant magnetic field. The main attention is paid to the dynamics of the magnetization vector of the system. It is shown that at any nonzero temperature the magnetization takes a stationary orientation in a finite time. The direction of magnetization generally does not coincide with the direction of the field. Equilibrium and non-equilibrium magnetization components are calculated as functions of two dimensionless parameters – Mason number (i.e., ratio of hydrodynamic torque to magnetic) and Peclet number (i. e., ratio of hydrodynamic moment to thermal).

*Keywords:* magnetic nanoparticles; ferrocolloid; shear flow; nonequilibrium magnetodynamics.

### References

1. Shliomis M.I. Magnetic fluids. *Physics–Uspekhi*, 1974, Vol. 17, Iss. 2, pp. 153–169. DOI: 10.1070/PU1974v017n02ABEH004332
2. Abramchuk S., Kramarenko E., Grishin D., Stepanov G., Nikitin L.V., Filipcsei G., Khokhlov A.R., Zrínyi M. Novel Highly Elastic Magnetic Materials for Dampers and Seals: Part II. Material Behavior in a Magnetic Field. *Polymers for Advanced Technologies*, 2007, Vol. 18, no. 7, pp. 513–518. DOI: 10.1002/pat.923

3. Cherief W., Avenas Y., Ferrouillat S., Kedous-Lebouc A., Jossic L., Petit M. Parameters Affecting Forced Convection Enhancement in Ferrofluid Cooling Systems. *Applied Thermal Engineering*, 2017, Vol. 123, pp. 156–166. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2017.05.057
4. Huang W., Shen C., Liao S., Wang X. Study on the Ferrofluid Lubrication with an External Magnetic Field. *Tribology Letters*, 2011, Vol. 41, no. 1, pp. 145–151. DOI: 10.1007/s11249-010-9693-2
5. Tietze R., Lyer S., Dürr S., Struffert T., Engelhorn T., Schwarz M., Eckert E., Göen T., Vasylyev S., Peukert W., Wiekhorst F., Trahms L., Dörfler A., Alexiou C. Efficient Drug-Delivery using Magnetic Nanoparticles—Biodistribution and Therapeutic Effects in Tumour Bearing Rabbits. *Nanomedicine: Nanotechnology, Biology and Medicine*, 2013, Vol. 9, no. 7, pp. 961–971. DOI: 10.1016/j.nano.2013.05.001
6. Périgo E.A., Hemery G., Sandre O., Ortega D., Garaio E., Plazaola F., Teran F.J. Fundamentals and Advances in Magnetic Hyperthermia. *Applied Physics Reviews*, 2015, Vol. 2, no. 4, pp. 041302. DOI: 10.1063/1.4935688
7. Tay Z.W., Chandrasekharan P., Chiu-Lam A., Hensley D.W., Dhavalikar R., Zhou X.Y., Yu E.Y., Goodwill P.W., Zheng B., Rinaldi C., Conolly S.M. Magnetic Particle Imaging-Guided Heating *in vivo* Using Gradient Fields for Arbitrary Localization of Magnetic Hyperthermia Therapy. *ACS nano*, 2018, Vol. 12, no. 4, pp. 3699–3713. DOI: 10.1021/acsnano.8b00893
8. Ivanov A.O., Kantorovich S.S., Reznikov E.N., Holm C., Pshenichnikov A.F., Lebedev A.V., Chremos A., Camp P.J. Magnetic Properties of Polydisperse Ferrofluids: A Critical Comparison between Experiment, Theory, and Computer Simulation. *Physical Review E*, 2007, Vol. 75, Iss. 6, p. 061405. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.061405
9. Soto-Aquino D., Rinaldi C. Magnetoviscosity in Dilute Ferrofluids from Rotational Brownian Dynamics Simulations. *Physical Review E*, 2010, Vol. 82, no. 4, pp. 046310. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.046310
10. Zubarev A.Y., Odenbach S., Fleischer J. Rheological Properties of Dense Ferrofluids. Effect of chain-like aggregates. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2002, Vol. 252, pp. 241–243. DOI: 10.1016/S0304-8853(02)00674-1
11. Raikher Y.L., Shliomis M.I. The Effective Field Method in the Orientational Kinetics of Magnetic Fluids and Liquid Crystals. *Advances in Chemical Physics*, 1994, Vol. 87, pp. 595–752. DOI: 10.1002/9780470141465.ch8
12. Brenner H. Rheology of a Dilute Suspension of Dipolar Spherical Particles in an External Field. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1970, Vol. 32, Iss. 1, pp. 141–158. DOI: 10.1016/0021-9797(70)90110-4
13. Klingenberg D.J., Ulicny J.C., Golden M.A. Mason Numbers for Magnetorheology. *Journal of Rheology*, 2007, Vol. 51, no. 5, pp. 883–893. DOI: 10.1122/1.2764089
14. Martsenyuk M.A., Raikher Y.L., Shliomis M.I. On the Kinetics of Magnetization of Suspension of Ferromagnetic Particles. *Soviet Physics-JETP*, 1974, Vol. 38, Iss. 2, pp. 413–416.
15. Shliomis M.I. Ferrohydrodynamics: Testing a Third Magnetization Equation. *Physical Review E*, 2001, Vol. 64, Iss. 6, p. 060501. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.060501
16. Kuznetsov A.A., Pshenichnikov A.F. Nonlinear Response of a Dilute Ferrofluid to an Alternating Magnetic Field. *Journal of Molecular Liquids*, 2022, Vol. 346, p. 117449.
17. [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate odeint.html)

Received December 1, 2022

### Information about the authors

Kuznetsov Andrey Arkadievich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), PhD, University of Vienna, Vienna, Austria, e-mail: andrey.kuznetsov@univie.ac.at